

На правах рукописи



Андреев Александр Сергеевич

**СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА РАСЧЕТА  
ОБОЛОЧЕК В ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ПОСТАНОВКЕ  
ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ВЕКТОРНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ  
ЛИНЕЙНЫХ И УГЛОВЫХ ПАРАМЕТРОВ НА ШАГЕ  
НАГРУЖЕНИЯ**

**2.1.9. Строительная механика**

**АВТОРЕФЕРАТ**

**диссертации на соискание ученой степени**

**кандидата технических наук**

**Волгоград – 2021**

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Волгоградский государственный аграрный университет» на кафедре «Высшая математика».

**Научный руководитель:** доктор технических наук, профессор

**Клочков Юрий Васильевич**

**Официальные оппоненты:** **Каюмов Рашит Абдулхакович,**  
доктор физико-математических наук,  
профессор кафедры «Механика» Института  
строительства ФГБОУ ВО «Казанский  
государственный архитектурно-строительный  
университет»

**Игнатьев Александр Владимирович,**  
доктор технических наук, доцент,  
профессор кафедры «Цифровые технологии в  
урбанистике, архитектуре и строительстве»  
ФГБОУ ВО «Волгоградский государственный  
технический университет»

**Ведущая организация:** ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов».

Защита состоится 1 марта 2022 года в 10:00 часов на заседании диссертационного совета 24.2.282.05 (Д 212.028.10) в ИАиС ФГБОУ ВО Волгоградском государственном техническом университете по адресу: 400074, г. Волгоград, ул. Академическая, 1, ауд. Б-203.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте [www.vstu.ru](http://www.vstu.ru) ФГБОУ ВО «Волгоградский государственный технический университет».

Автореферат разослан «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2021 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета



Пшеничкина Валерия  
Алексадровна

## **Актуальность темы исследования и степень ее разработанности.**

Оболочечные конструкции различного вида нашли своё широкое использование в современной инженерной практике, что приводит к серьёзным требованиям, относящимся к надёжности их работы и рациональному использованию материала при их конструировании. Данные конструкции обладают высокими прочностными свойствами, имеют малый вес и имеют высокую устойчивость при воздействии на них различного рода нагрузок.

Многие отечественные учёные Новожилов В. В., Власов В. З., Бидерман В. Л., Пикуль В. В., Тимошенко С. П., Векуа И. Н., Черных К. Ф., Вольмир А. С., Паймушин В. Н., Григолюк Э. И., Галимов К. З., Корнишин М. С., Болотин В. В., и др. внесли большой вклад в развитие теории тонких оболочек.

С ростом эффективности компьютерных технологий вырос и спрос на применение численных методов расчета оболочек. В развитие численных методов расчета большой вклад внесли такие исследователи как Петров В. В., Хайруллин Ф. С., Немировский Ю. В., Шалашилин В. И., Каюмов Р. А., Сторожук Е. А., Шешенин С. В., Белостоцкий А. М., Акимов П. А. и др. Наибольшей популярностью среди известных на данный момент численных методов пользуется метод конечных элементов (МКЭ), в развитии которого приняли активное участие отечественные и зарубежные ученые Постнов В. А., Бате К., Голованов А. И., Оден Дж., Зенкевич О. М., Игнатъев В. А., Агапов В. П., Железнов Л. П., Якупов Н. М., Косицын С. Б., Розин Л. А., Соловей Н. А., Шапошников Н. Н., Серазутдинов М. Н., Скопинский В. Н., Баженов В. А., Галлагер Р., и др.

При расчёте оболочечных конструкций в геометрически линейной и нелинейной постановках наиболее частое применение нашла гипотеза Кирхгофа-Лява без учёта деформаций поперечного сдвига. Однако использование сдвиговой теории делает физическую картину деформирования оболочечных конструкций более последовательней и корректней.

**Цель работы** - разработать алгоритмы расчёта на прочность оболочечных конструкций с произвольной геометрией при использовании векторной формы интерполяционной процедуры в геометрически нелинейной

постановке с учётом деформации поперечного сдвига при реализации разработанных алгоритмов в пакетах авторских прикладных программ.

**Задачи исследования:**

- получение на шаге нагружения геометрических соотношений между приращениями деформаций и приращениями компонент вектора перемещения и приращениями компонент вектора углов поворота нормали и их производными;

- получение разрешающих соотношений для разработки алгоритма компоновки матрицы жесткости четырехугольного конечного элемента для расчета тонких оболочек на основе векторной и стандартной форм интерполяционных процедур в геометрически нелинейной постановке с учетом деформаций поперечного сдвига;

- разработка алгоритма формирования матриц жесткостей четырехугольного конечного элемента для расчёта тонких оболочек на основе векторной и стандартной форм интерполяционных процедур с учетом деформации поперечного сдвига в геометрически нелинейной постановке;

- разработка пакетов программ для нахождения численных значений напряжений под действием различного рода нагрузок, действующих на тонкостенную оболочку в геометрически нелинейной постановке;

- проведение сопоставительного анализа численных прочностных расчетов НДС тонких оболочек с учетом деформаций поперечного сдвига в геометрически нелинейной постановке при различных вариантах интерполяционной процедуры искомых величин на шаге нагружения.

**Научная новизна:**

- получены новые геометрические соотношения, в которых была определена связь между приращениями деформаций и компонентами шагового вектора перемещения, компонентами шагового вектора угла наклона нормали и первыми производными вышеуказанных компонент для тонкой оболочки;

- были впервые получены новые физические соотношения, определяющие связь между компонентами тензора приращений напряжений и компонентами тензора приращений деформаций с использованием

предложенной гипотезы о пропорциональности между компонентами девиаторов приращений деформаций и компонентами девиаторов приращений напряжений на шаге нагружения;

- на основе новых геометрических и физических соотношений был разработан алгоритм компоновки матрицы жесткости четырехугольного конечного элемента для расчета оболочечных конструкций в геометрически нелинейной постановке с учетом деформации поперечного сдвига на основе стандартной для МКЭ скалярной интерполяцией искомых величин;

- впервые была применена векторная форма интерполяционной процедуры к интерполяции шаговых компонент вектора перемещения и шаговых компонент вектора угла наклона нормали, а также их производных в криволинейной системе координат;

- на основе новых интерполяционных зависимостей был разработан алгоритм применения четырехугольного конечного элемента для расчета оболочки в геометрически нелинейной постановке с учетом поперечного сдвига, использование которого позволяет учесть жесткие смещения геометрически нелинейно деформируемой оболочечной конструкции при использовании криволинейной системы координат;

- с использованием разработанных новых алгоритмов был выполнен анализ НДС тонких оболочек в геометрически нелинейной постановке с учетом поперечного сдвига. На основе проведенного сравнительного анализа полученных результатов НДС оболочек с использованием стандартной и векторной интерполяционных процедур и результатов, полученными другими авторами был сделан вывод, что для получения корректных результатов расчета необходимо использование новых разработанных алгоритмов в расчете оболочек в геометрически нелинейной постановке, основанных на векторной интерполяции шаговых искомых величин.

**Достоверность результатов** научной работы основана на строгой математической обоснованности выводов основных геометрических и физических соотношений, на корректной постановке задачи с применением векторного и тензорного анализов, на геометрических соотношениях класса

тонкостенных конструкций, на дифференциальной геометрии, на положениях теории интерполяции искомых величин, на соответствии качественных результатов расчета физических процессов деформирования оболочечных конструкций, на совпадении количественных результатов, полученных при реализации разработанных алгоритмов, с результатами исследований других авторов, с результатами полученными аналитическим путем. Во всех приведенных примерах расчета оболочек исследовалась сходимость вычислительного процесса, которая является необходимым условием адекватности методов численного анализа НДС строительных систем и объектов.

**Практическая ценность** диссертационной работы заключена в реализации теоретических результатов диссертации и разработанных вычислительных алгоритмов по исследованию НДС оболочек в геометрически нелинейной постановке с учетом сдвиговых деформаций в виде компьютерных программ, которые могут быть использованы в расчетах на прочность тонких оболочек с разнообразной геометрией, при различных условиях закрепления на границах, подвергающихся воздействию различного рода нагрузок.

**Методология и методы диссертационного исследования.** Основная идея выполненного исследования диссертационной работы заключается в решении задач строительной механики по расчёту оболочек в геометрически нелинейной постановке с учетом сдвиговых деформаций на основе МКЭ с использованием разработанной векторной формы интерполяционной процедуры искомых неизвестных на шаге нагружения.

В ходе данного исследования автором применялись методы математического анализа, векторный и тензорный анализ, табличный и графический анализ, системный подход.

Диссертационная работа соответствует паспорту специальности 2.1.9. Строительная механика, а также пунктам области исследований: 2 «Линейная и нелинейная механика конструкций и сооружений, разработка физико-математических моделей их расчета»; 4 «Численные методы расчета сооружений и их элементов» области исследований.

## **Основные результаты работы, выносимые на защиту:**

- геометрические соотношения, определяющие связь между приращениями деформаций и приращениями компонент шагового вектора перемещения, приращениями компонент шагового вектора угла наклона нормали на шаге нагружения для тонкой оболочечной конструкции в геометрически нелинейной постановке с учетом сдвиговых деформаций;

- физические соотношения, устанавливающие связь между контравариантными компонентами тензора приращений напряжений и ковариантными компонентами тензора приращений деформаций в произвольном слое оболочки на  $(j + 1)$ -ом шаге нагружения, полученные на основе предложенной гипотезы о пропорциональности между компонентами девиаторов приращений деформаций и компонентами девиаторов приращений напряжений;

- алгоритм формирования матрицы жесткости четырехугольного конечного элемента дискретизации в геометрически нелинейной постановке с учетом сдвиговых деформаций на основе общепринятой в МКЭ интерполяции искомых величин;

- алгоритм формирования матрицы жесткости четырехугольного конечного элемента дискретизации в геометрически нелинейной постановке с учетом сдвиговых деформаций на основе разработанной векторной формы интерполяционной процедуры искомых величин;

- результаты сопоставительного исследования НДС оболочек в геометрически нелинейной постановке с учетом сдвиговых деформаций при различных граничных условиях и видах внешней нагрузки с применением общепринятой и векторной форм интерполяционной процедуры искомых величин на шаге нагружения, полученных на основе разработанных алгоритмов расчета.

**Апробация работы.** Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на заседаниях: XXIX Всероссийской школы-конференции «Математическое моделирование в естественных науках» (Пермь, Пермский национальный исследовательский политехнический университет,

2020); XII Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Уфа, Башкирский государственный университет, 2019); научно-практической конференции с международным участием "Инженерные системы - 2018" (Москва, РУДН, 2018) и других. Полностью работа докладывалась на расширенном заседании кафедры «Высшая математика» Волгоградского государственного аграрного университета 11 февраля 2021 г.

**Публикации.** Основные положения диссертации полностью представлены в 21 опубликованной работе, из них: 4 статьи в журналах, проиндексированных в базах данных SCOPUS / Web of Science; 4 статьи в ведущих рецензируемых научных журналах и изданиях; 6 свидетельств о государственной регистрации программ для ЭВМ; 7 статей опубликованы в других изданиях.

**Структура и объём работы.** Основные положения диссертационной работы изложены на 154 страницах, состоят из введения, четырех глав, заключения, выводов, списка литературы и приложений. Работа иллюстрирована 12 таблицами и 32 рисунками. Список литературы содержит 143 источника.

## **СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ**

**Во введении** обоснована актуальность темы исследования, указаны цели и задачи исследования, научная новизна, практическая значимость диссертационной работы, применяемые методы исследований, методология исследования, положения, выносимые на защиту.

**В первой главе** приводится краткий обзор существующих в настоящее время отечественных и зарубежных работ по исследуемой теме. В большинстве случаев авторы используют в своих работах классическую теорию пластин и оболочек, которая была проверена временем и нашла широкое применение на практике. При использовании классической теории возникает погрешность, которая связана с гипотезой Кирхгофа. Эту проблему можно решить, если будет проведён учет деформаций поперечного сдвига. Проведённый анализ работ также показал, что при расчете инженерных конструкций, у которых

наблюдается значительный прогиб элементов, решение в линейной постановке не вполне корректно, так как приводит к погрешности результатов. Решение такого рода задач в геометрически нелинейной постановке с учетом сдвиговой теории приводит к более корректному результату. В работах достаточно полно изучен вопрос с решением задач в геометрически линейной постановке. Расчёт оболочек с учётом геометрической и физической нелинейности на основе метода конечных элементов требует дальнейшего развития и совершенствования.

Применение стандартной интерполяционной процедуры отдельных компонент шагового вектора перемещения и шагового вектора угла наклона нормали при расчетах в криволинейных системах координат приводит к погрешностям вычислений. В таких случаях предпочтительнее использование векторной формы интерполяции шаговых искомым величин, так как она автоматически учитывает смещение конечного элемента как жесткого целого, что приводит к получению более корректных результатов расчёта.

**Во второй главе**, посвященной анализу НДС тонких оболочек в линейной постановке с учётом сдвиговых деформаций, приводится вывод основных геометрических и физических соотношений упругих оболочек. Представлен алгоритм формирования матрицы жесткости четырёхузлового конечного элемента при использовании стандартной для МКЭ интерполяционной процедуры и альтернативной формы векторной интерполяции искомым величин. Отсчет вектора наклона нормали  $\vec{\gamma}$  осуществляется от исходного состояния нормали. На тестовых примерах расчёта показана эффективность применения векторной интерполяционной процедуры при использовании четырехузлового конечного элемента с узловыми неизвестными в виде компонент вектора перемещения и их производных, а также компонент вектора угла наклона нормали.

Пример 1. В качестве примера решения задачи в линейной постановке было исследовано НДС цилиндра, нагруженного вдоль образующей равномерно распределенной нагрузкой интенсивности  $q$  и имеющего по торцам шарнирные опоры, препятствующие вертикальному смещению (рисунок 1), которые в по-

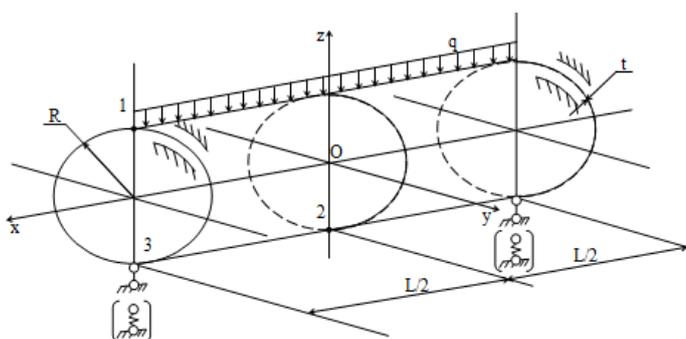


Рисунок 1 – Расчетная схема цилиндра с шарнирными опорами (с пружинными опорами)

следствии были заменены на пружинные. Торцы цилиндра имели скользящую заделку. Были приняты следующие исходные данные:  $q = 1$  Н/см;  $L = 1,5$  м;  $R = 0,4$  м;  $t = 0,6$  см;  $E = 2 \cdot 10^7$  Н/см<sup>2</sup>;  $\nu = 0,3$ .

Расчеты были выполнены в двух

вариантах: при реализации стандартной и векторной форм интерполяции искомым неизвестных. Результаты повариантных расчетов представлены в таблице 1, из анализа которой следует, что при шарнирном опирании оба варианта интерполяции искомым величин приводят к примерно одинаковым результатам в численных значениях расчетных величин.

Таблица 1 - Результаты расчётов с использованием стандартной и векторной интерполяционных процедур при различных величинах жестких смещений цилиндрической оболочки

Координаты точек (x, см; t, рад)	Напряжения, Н/см <sup>2</sup>	Интерполяционная процедура					
		Стандартная			Векторная		
		Величина жесткого смещения, см					
		0.0 (шарнирное опирание)	200.0	500.0	0.0 (шарнирное опирание)	200.0	500.0
Т. 1 (20.0; 0.0)	$\sigma_{11}^e$	111.5	189.7	301.8	111.0	111.0	111.0
	$\sigma_{22}^e$	384.2	634.6	994.0	382.3	382.3	382.3
	$\sigma_{13}^e$	-32.2	-31.1	-32.0	-32.3	-32.3	-32.3
	$\sigma_{11}^u$	-108.8	-30.8	81.1	-108.5	-108.5	-108.5
	$\sigma_{22}^u$	-382.0	-131.6	227.7	-380.7	-380.7	-380.7
	$\sigma_{13}^u$	-32.2	-32.1	-32.0	-32.3	-32.3	-32.3
Т. 3 (20.0; $\pi$ )	$\sigma_{11}^e$	460.6	374.3	250.4	455.5	455.5	455.5
	$\sigma_{22}^e$	717.8	454.7	77.0	696.9	696.9	696.9
	$\sigma_{13}^e$	-253.2	-248.8	-242.5	-254.8	-254.8	-254.8
	$\sigma_{11}^u$	-457.6	-527.4	-627.7	-461.4	-461.4	-461.4
	$\sigma_{22}^u$	-826.3	-1062.1	-1400.4	-842.1	-842.1	-842.1
	$\sigma_{13}^u$	-253.2	-248.8	-242.5	-254.8	-254.8	-254.8

В случае замены шарнирных опор на пружинные (рисунок 1) оболочка получает возможность смещаться в вертикальном направлении как абсолютно жесткое тело. Изменяя жесткость пружины, можно получить различные величины жесткого смещения.

Анализируя данные таблицы 1, можно убедиться, что при использовании стандартной интерполяционной процедуры параметры НДС цилиндра существенно меняются в зависимости от величины жесткого смещения.

Причем, с увеличением жесткого смещения значения напряжений возрастают и достигают неприемлемых значений, некоторые из них меняют свой знак. При векторной форме интерполяционной процедуры параметры НДС цилиндра не изменяются, несмотря на существенную величину жесткого смещения. Полученный результат объясняется тем, что использование векторной формы интерполяционной процедуры позволяет автоматически учитывать смещения КЭ как жесткого целого при использовании криволинейных систем координат.

**В третьей главе** получены основные геометрические соотношения тонких оболочек с учётом сдвиговых деформаций в геометрически нелинейной постановке, определяющие связь между приращениями деформаций и компо-

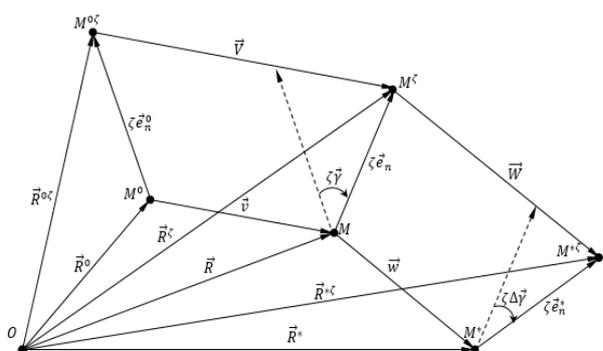


Рисунок 2 – Перемещение точек срединной поверхности  $M^0$  и точки произвольного слоя  $M^{\zeta}$  при шаговом нагружении

нентами шагового вектора перемещения, компонентами шагового вектора угла наклона нормали, а также первыми производными вышеуказанных компонент. Основные соотношения были получены на основе анализа трех состояний системы: исходного

и двух деформированных за  $j$  шагов и на  $(j + 1)$  шаге нагружения (рисунок 2).

Суммарный и шаговый векторы перемещений, а также их первые производные по естественным криволинейным координатам  $s_1$  и  $s_2$  определяются компонентами, отнесенными к базису исходного состояния

$$\begin{aligned} \vec{v} &= u\vec{e}_1^0 + v\vec{e}_2^0 + w\vec{e}_n^0; & \vec{w} &= \Delta u\vec{e}_1^0 + \Delta v\vec{e}_2^0 + \Delta w\vec{e}_n^0; \\ \vec{v}_{,\alpha} &= \omega_\alpha^1\vec{e}_1^0 + \omega_\alpha^2\vec{e}_2^0 + \omega_\alpha^n\vec{e}_n^0; & \vec{w}_{,\alpha} &= l_\alpha^1\vec{e}_1^0 + l_\alpha^2\vec{e}_2^0 + l_\alpha^n\vec{e}_n^0. \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\alpha = s_1, s_2$ .

Радиус-векторы  $\vec{R}^{0\zeta}$ ,  $\vec{R}^\zeta$  и  $\vec{R}^{*\zeta}$ , определяющие соответственно положения точек  $M^{0\zeta}$ ,  $M^\zeta$  и  $M^{*\zeta}$  (рисунок 2) могут быть представлены выражениями

$$\vec{R}^{0\zeta} = \vec{R}^0 + \zeta\vec{e}_n^0; \quad \vec{R}^\zeta = \vec{R}^{0\zeta} + \vec{V}; \quad \vec{R}^{*\zeta} = \vec{R}^\zeta + \vec{W}. \quad (2)$$

Входящие в (2) суммарный  $\vec{V}$  и шаговый  $\vec{W}$  векторы перемещений точек  $M^{0\zeta}$  и  $M^\zeta$  можно записать в виде сумм

$$\vec{V} = \vec{v} + \zeta \vec{\gamma} = \vec{v} + \zeta (\gamma^1 \vec{e}_1^0 + \gamma^2 \vec{e}_2^0); \quad \vec{W} = \vec{w} + \zeta \Delta \vec{\gamma} = \vec{w} + \zeta (\Delta \gamma^1 \vec{e}_1^0 + \Delta \gamma^2 \vec{e}_2^0). \quad (3)$$

Приращения деформаций в точке произвольного слоя оболочки, отстоящего от срединной поверхности на расстоянии  $\zeta$ , находятся с помощью уравнений механики сплошной среды

$$\Delta \varepsilon_{\alpha\beta}^{\zeta} = (g_{\alpha\beta}^* - g_{\alpha\beta}) / 2, \quad (4)$$

$$\text{где } g_{\alpha\beta}^* = \vec{g}_\alpha^* \cdot \vec{g}_\beta^*; \quad g_{\alpha\beta} = \vec{g}_\alpha \cdot \vec{g}_\beta.$$

Столбцы узловых варьируемых параметров четырёхузлового конечного элемента в локальной -  $\xi, \eta$  и глобальной  $s_1, s_2$  системах координат можно записать в следующем виде

$$\begin{aligned} \left\{ \Delta U_y^n \right\}_{1 \times 44}^T &= \left\{ \left\{ \Delta u_y^n \right\}_{1 \times 12}^T \left\{ \Delta v_y^n \right\}_{1 \times 12}^T \left\{ \Delta w_y^n \right\}_{1 \times 12}^T \left\{ \Delta \gamma_y^1 \right\}_{1 \times 4}^T \left\{ \Delta \gamma_y^2 \right\}_{1 \times 4}^T \right\}; \\ \left\{ \Delta U_y^r \right\}_{1 \times 44}^T &= \left\{ \left\{ \Delta u_y^r \right\}_{1 \times 12}^T \left\{ \Delta v_y^r \right\}_{1 \times 12}^T \left\{ \Delta w_y^r \right\}_{1 \times 12}^T \left\{ \Delta \gamma_y^1 \right\}_{1 \times 4}^T \left\{ \Delta \gamma_y^2 \right\}_{1 \times 4}^T \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Искомые величины  $\left\{ \Delta U \right\}_{5 \times 1}$  внутренней точки конечного элемента аппроксимируются через узловые неизвестные с помощью матричного выражения

$$\left\{ \Delta U \right\}_{5 \times 1} = [A]_{5 \times 44} \left\{ \Delta U_y^n \right\}_{44 \times 1}, \quad (6)$$

где  $[A]_{5 \times 44}$  - матрица, элементами которой являются произведения полиномов Эрмита третьей степени и произведения билинейных функций локальных координат.

Компоновка матрицы жесткости и столбца узловых усилий четырёхугольного конечного элемента на шаге нагружения была выполнена минимизацией функционала Лагранжа

$$\Phi_L = \int_V \left\{ \Delta \varepsilon^{\zeta} \right\}_{1 \times 5}^T \left( \left\{ \sigma^{\beta\rho} \right\}_{5 \times 1} + k \left\{ \sigma^{\beta\rho} \right\}_{5 \times 1} \right) dV - \int_F \left\{ \Delta U \right\}_{1 \times 5}^T \left( \left\{ P \right\}_{5 \times 1} + k \left\{ \Delta P \right\}_{5 \times 1} \right) dF. \quad (7)$$

Коэффициент  $k$  в (7) принимает значения 1 или 1/2, причём при  $k = 1$  соответствует равенству возможных, а при  $k = 1/2$  - равенству действительных работ внешних и внутренних сил на  $(j + 1)$ -м шаге нагружения.

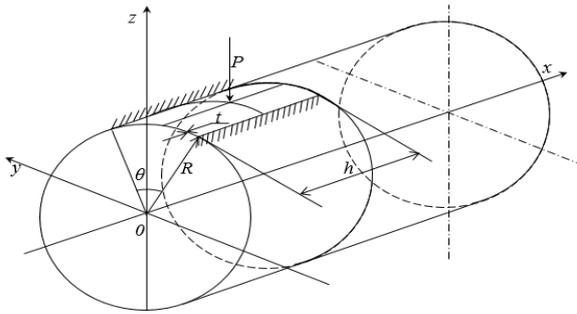


Рисунок 3 – Расчетная схема жесткозащемленной по торцам цилиндрической панели, нагруженной сосредоточенной силой  $P$

радиус цилиндра  $R = 3,381 \text{ м}$ ; толщина оболочки  $t = 0,00476 \text{ м}$ ; длина образующих  $L = 0,0254 \text{ м}$ ; коэффициент Пуассона  $\nu = 0,2$ ; модуль упругости  $E = 7 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ . Результаты расчётов оболочки в геометрически нелинейной постановке представлены в таблице 2, в которой приводятся «физические» значения нормальных напряжений  $\sigma_{22}$ , а также величина прогиба в точке при-

Таблица 2 - Значения напряжений и прогиба при решении задачи в нелинейной

Контролируемые параметры НДС $\sigma$ МПа, $w$ , см	Количество этапов нагружения						Прогиб по Папенгаузену
	50	100	150	200	250	300	
$\sigma_{22}^e$	63.71	67.32	67.92	68.13	68.23	68.29	
$\sigma_{22}^s$	-85.84	-84.96	-85.19	-85.34	-85.42	-85.48	
$w$	-0.422	-0.429	-0.431	-0.432	-0.432	-0.432	-0.437

Пример 2. Была решена задача по определению НДС жестко заземленной по образующим цилиндрической панели, нагруженной в центре пролета сосредоточенной силой  $P$  (рисунок 3). Были приняты следующие исходные данные:  $P = 124,6 \text{ Н}$ ;

ложения сосредоточенной силы при разных числах шагов нагружения. По данным таблицы 2, можно утверждать, что при увеличении числа шагов нагружения наблюдается

устойчивая сходимость вычислительного процесса, как по прогибу, так и по напряжениям. В крайнем правом столбце таблицы 3 указано значение прогиба в точке приложения сосредоточенной силы  $P$ , взятое из монографии Rarenhausen J. Различие в значениях прогиба не превышает 1%. Основываясь на анализе табличных данных, можно сделать вывод, что разработанный алгоритм расчёта позволяет получать приемлемые по точности значения параметров НДС тонкой оболочки в геометрически нелинейной постановке с учетом сдвиговых деформаций.

Пример 3. Был выполнен расчёт фрагмента оболочки, имеющей форму эллиптического цилиндра, с жестким защемлением по образующей. Интенсивность линейно распределенной вдоль образующей цилиндра нагрузки

$q$ , приложенной на свободном краю, равнялась  $1 \text{ кН/м}$  (рисунок 4). Параметры эллипса поперечного сечения имели следующие значения  $b = 0,8$  и  $c = 0,7$  м. Толщина оболочки  $h = 0,01$  м,  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ,  $\nu = 0,3$ . Значение  $k$  было принято равным  $k = 0,5$ . Число дискретных элементов равнялось 100.

Результаты расчётов сведены в таблицу 3, в которой приводятся значения нормальных напряжений  $\sigma_{22}$  на наружной  $\sigma_{22}^n$  и внутренней  $\sigma_{22}^в$  поверхностях на свободном краю и в жесткой заделке, а также значения сдвиговых напряжений  $\sigma_{23}$  в сечении, находящемся вблизи жесткой заделки при различных числах шагов нагружения. В крайнем правом столбце таблицы приведены напряжения, которые соответствуют условиям статического равновесия.



Таблица 3 - Численные значения напряжений  $\sigma_{22}$  и  $\sigma_{23}$  при действии линейно распределённой нагрузки

Сечение $\theta$ , рад	Напряжение, МПа	Число шагов нагружения				Контрольное значение, МПа
		40	60	80	100	
Опорное $\theta = 0,0$	$\sigma_{22}^в$	-46.48	-46.48	-46.48	-46.48	-47.70
	$\sigma_{22}^n$	46.26	46.26	46.26	46.26	47.70
	$\sigma_{23}$	-0.092	-0.092	-0.092	-0.092	-0.100
Свободный край, $\theta = \pi/2$	$\sigma_{22}^в$	0.099	0.101	0.102	0.102	0.100
	$\sigma_{22}^n$	0.094	0.096	0.097	0.097	0.100

По данным таблицы 3 можно отметить, что с увеличением числа шагов нагружения наблюдается устойчивая сходимость вычислительного процесса. Численные значения напряжений  $\sigma_{22}$  и  $\sigma_{23}$  на свободном краю при действии линейно распределённой нагрузки  $q$  близки к значениям, полученным из условия статического равновесия оболочки.

**В четвертой главе** представлен вывод новых интерполяционных зависимостей для компонент вектора шагового перемещения и компонент шагового вектора углов наклона нормали. Отличительной чертой этих интерполяционных зависимостей является то, что интерполяционные зависимости были скомпонованы не для отдельных компонент, а непосредственно для вектора шагового перемещения и шагового вектора угла

наклона нормали. После координатных преобразований были получены новые интерполяционные зависимости, в которых компонента шагового вектора перемещения и компонента шагового вектора углов наклона нормали выражается через полный набор шаговых узловых неизвестных, а не отдельной его части.

Интерполяционные выражения при векторной форме интерполяционной процедуры записываются для самих векторов шагового перемещения и шагового вектора углов наклона нормали

$$\vec{w} = \left\{ \varphi \right\}_{1 \times 12}^T \left\{ \vec{w}^n \right\}_{12 \times 1} = \left\{ \varphi \right\}_{1 \times 12}^T [N]_{12 \times 12} \left\{ \vec{w}^r \right\}_{12 \times 1}; \quad \Delta \vec{\gamma} = \left\{ \psi \right\}_{1 \times 4}^T \left\{ \Delta \vec{\gamma} \right\}_{4 \times 1}, \quad (8)$$

$$\text{где} \quad \left\{ \vec{w}^n \right\}_{12 \times 1}^T = \left\{ \vec{w}^i \vec{w}^j \vec{w}^k \vec{w}^l \vec{w}^i_{,\xi} \dots \vec{w}^l_{,\xi} \vec{w}^i_{,\eta} \dots \vec{w}^l_{,\eta} \right\}; \quad \left\{ \Delta \vec{\gamma} \right\}_{4 \times 1}^T = \left\{ \Delta \vec{\gamma}^i \Delta \vec{\gamma}^j \Delta \vec{\gamma}^k \Delta \vec{\gamma}^l \right\};$$

$$\left\{ \vec{w}^r \right\}_{12 \times 1}^T = \left\{ \vec{w}^i \vec{w}^j \vec{w}^k \vec{w}^l \vec{w}^i_{,1} \dots \vec{w}^l_{,1} \vec{w}^i_{,2} \dots \vec{w}^l_{,2} \right\}.$$

Шаговые векторы узловых точек конечного элемента и их производные из (8) могут быть представлены компонентами узловых базисных векторов

$$\begin{aligned} \vec{w}^\rho &= \Delta u^\rho \vec{a}_1^{0\rho} + \Delta v^\rho \vec{a}_2^{0\rho} + \Delta w^\rho \vec{a}^{0\rho}; \quad \vec{w}_{,\theta^1}^\rho = z_1^{1\rho} \vec{a}_1^{0\rho} + z_1^{2\rho} \vec{a}_2^{0\rho} + z_1^{n\rho} \vec{a}^{0\rho}; \\ \vec{w}_{,\theta^2}^\rho &= z_2^{1\rho} \vec{a}_1^{0\rho} + z_2^{2\rho} \vec{a}_2^{0\rho} + z_2^{n\rho} \vec{a}^{0\rho}; \quad \Delta \vec{\gamma}^\rho = \Delta \gamma^{1\rho} \vec{a}_1^{0\rho} + \Delta \gamma^{2\rho} \vec{a}_2^{0\rho}, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\rho = i, j, k, l$ .

С учётом полученных выражений (9), соотношения (8) примут вид

$$\vec{w} = \left\{ \varphi \right\}_{1 \times 12}^T [N]_{12 \times 12} \left[ \vec{A}_w \right]_{12 \times 36} \left\{ t_w \right\}_{36 \times 1}; \quad \Delta \vec{\gamma} = \left\{ \psi \right\}_{1 \times 4}^T \left[ \vec{A}_\gamma \right]_{4 \times 8} \left\{ t_\gamma \right\}_{8 \times 1}. \quad (10)$$

$$\text{где} \quad \left\{ t_\gamma \right\}_{1 \times 8}^T = \left\{ \Delta \gamma^{1i} \Delta \gamma^{2i} \Delta \gamma^{1j} \Delta \gamma^{2j} \Delta \gamma^{1k} \Delta \gamma^{2k} \Delta \gamma^{1l} \Delta \gamma^{2l} \right\},$$

$$\left\{ t_w \right\}_{1 \times 36}^T = \left\{ \Delta u^i \Delta v^i \Delta w^i \Delta u^j \Delta v^j \Delta w^j \dots \Delta u^l \Delta v^l \Delta w^l z_1^{1i} z_1^{2i} z_1^{1j} z_1^{2j} z_1^{1k} z_1^{2k} z_1^{1l} z_1^{2l} z_2^{1i} z_2^{2i} z_2^{1j} z_2^{2j} z_2^{1k} z_2^{2k} z_2^{1l} z_2^{2l} \right\}.$$

Элементами матриц  $\left[ \vec{A}_w \right]_{12 \times 36}$  и  $\left[ \vec{A}_\gamma \right]_{4 \times 8}$  в равенствах (10) будут соответственно

подматрицы-строки  $\left\{ \vec{a}_w^{0\rho} \right\}_{1 \times 3}^T = \left\{ \vec{a}_1^{0\rho} \vec{a}_2^{0\rho} \vec{a}^{0\rho} \right\}$  и  $\left\{ \vec{a}_\gamma^{0\rho} \right\}_{1 \times 2}^T = \left\{ \vec{a}_1^{0\rho} \vec{a}_2^{0\rho} \right\}$ , которые выражаются

через орты декартовой системы координат

$$\left\{ \vec{a}_w^{0\rho} \right\}_{3 \times 1} = \left[ b^\rho \right]_{3 \times 3} \left\{ \vec{i} \right\}_{3 \times 1}; \quad \left\{ \vec{a}_\gamma^{0\rho} \right\}_{2 \times 1} = \left[ d^\rho \right]_{2 \times 3} \left\{ \vec{i} \right\}_{3 \times 1}. \quad (11)$$

С учётом  $\left\{ \vec{i} \right\}_{3 \times 1} = \left[ b \right]_{3 \times 3}^{-1} \left\{ \vec{a}^0 \right\}_{3 \times 1}$  соотношения (11) могут быть представлены в виде

$$\{\vec{a}_w^{0\rho}\} = [b^\rho][b]^{-1}\{\vec{a}^0\}; \quad \{\vec{a}_\gamma^{0\rho}\} = [d^\rho][b]^{-1}\{\vec{a}^0\}. \quad (12)$$

Матрицы  $[\vec{A}_w]$  и  $[\vec{A}_\gamma]$  с учётом (11) можно представить в виде сумм

$$[\vec{A}_w] = \vec{a}_1^0 [A_w^1] + \vec{a}_2^0 [A_w^2] + \vec{a}^0 [A_w]; \quad [\vec{A}_\gamma] = \vec{a}_1^0 [A_\gamma^1] + \vec{a}_2^0 [A_\gamma^2]. \quad (13)$$

Выполнив подстановки (11) и (12) в (10) соответственно, можно получить равенства вида

$$\Delta u \vec{a}_1^0 + \Delta v \vec{a}_2^0 + \Delta w \vec{a}^0 = \{\varphi\}^T \left( \vec{a}_1^0 [A_w^1] + \vec{a}_2^0 [A_w^2] + \vec{a}^0 [A_w] \right) \{Y_w\}; \quad (14)$$

$$\Delta \gamma^1 \vec{a}_1^0 + \Delta \gamma^2 \vec{a}_2^0 = \{\psi\}^T \left( \vec{a}_1^0 [A_\gamma^1] + \vec{a}_2^0 [A_\gamma^2] \right) \{Y_\gamma\}, \quad (15)$$

$$\text{где } \{Y_w\} = [G][T_w]\{w^r\}; \quad \{Y_\gamma\} = [T_\gamma]\{\Delta \gamma^1\}\{\Delta \gamma^2\}.$$

Интерполяционные зависимости для компонент шагового вектора перемещения и компонент шагового вектора угла наклона нормали можно получить из (14) и (15)

$$\Delta u = \{\varphi\}^T [A_w^1] \{Y_w\}; \quad \Delta v = \{\varphi\}^T [A_w^2] \{Y_w\}; \quad \Delta w = \{\varphi\}^T [A_w] \{Y_w\};$$

$$\Delta \gamma^1 = \{\psi\}^T [A_\gamma^1] \{Y_\gamma\}; \quad \Delta \gamma^2 = \{\psi\}^T [A_\gamma^2] \{Y_\gamma\}. \quad (16)$$

Используя интерполяционные выражения (16), можно получить приращения деформаций на  $(j+1)$ -м шаге нагружения в матричной форме

$$\{\Delta \varepsilon_{mn}^\zeta\} = [B] \{\Delta U^G\}, \quad (17)$$

$$\text{где } \{\Delta \varepsilon_{mn}^\zeta\}^T = \{\Delta \varepsilon_{11}^\zeta \ 2\Delta \varepsilon_{12}^\zeta \ 2\Delta \varepsilon_{13}^\zeta \ \Delta \varepsilon_{22}^\zeta \ 2\Delta \varepsilon_{23}^\zeta\}.$$

Пример 4. Была решена задача по определению НДС оболочки, имеющей форму эллиптического цилиндра на которую действовала сосредоточенная сила в середине пролёта, равная  $P$ . В эллиптическом сечении оболочки, диаметрально противоположно действующей силе  $P$  (рисунок 5), находилась шарнирная опора, которая препятствовала вертикальному смещению оболочки. На торцах цилиндра была расположена скользящая заделка. Из-за наличия плоскостей симметрии оболочки, расчет был выполнен для четвертой её части.

В качестве исходных данных были приняты следующие значения

$E = 0,738 \cdot 10^5 \text{ МПа}; \nu = 0,3125; L = 1,5 \text{ м.}$  Отношение параметров эллипса

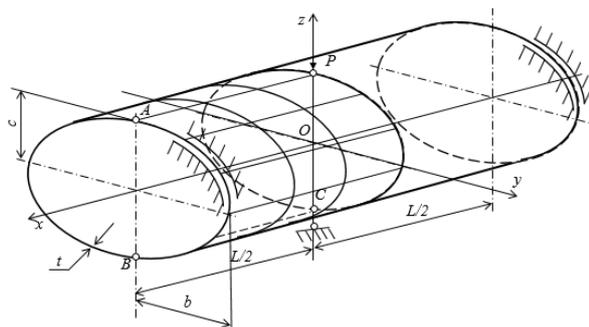


Рисунок 5 – Расчетная схема эллиптического цилиндра, нагруженного сосредоточенной силой  $P$

поперечного сечения эллиптического цилиндра  $b/c$  было принято равным 1,5/1. Результаты повариантных расчётов представлены в таблице 4. Анализируя численные значения напряжений, приведённые в таблице 4 можно убедиться, что различия между вариантами реализации интерполяции

шаговых узловых неизвестных весьма значительные. Исходя из условия симметрии расчётной схемы, значения для нормальных и сдвиговых напряже-

Таблица 4 - Численные значения напряжений и прогиба эллиптического цилиндра, полученные при решении задачи имеющей нелинейную постановку

Координаты точек $x, \theta$ (м, рад)	Напряжения, МПа, прогиб, см	Вариант интерполяционной процедуры					
		Стандартная			Векторная		
		Число шагов нагружения					
		30	40	50	30	40	50
$x = 0,0;$ $\theta = 0,0$	$\sigma_{11}^e$	5.07	5.07	5.07	3.77	3.78	3.78
	$\sigma_{22}^e$	27.36	27.35	27.35	25.37	25.36	25.36
	$\sigma_{13}^e$	-1.46	-1.48	-1.49	-1.04	-1.06	-1.07
	$\sigma_{11}^H$	-4.89	-4.87	-4.86	-3.54	-3.53	-3.52
	$\sigma_{22}^H$	-31.99	-31.99	-31.99	-30.25	-30.26	-30.26
	$\sigma_{13}^H$	-1.46	-1.48	-1.49	-1.04	-1.06	-1.07
$x = 0,0;$ $\theta = \pi$	$\sigma_{11}^e$	2.89	2.89	2.89	3.77	3.78	3.78
	$\sigma_{22}^e$	19.68	19.67	19.67	25.37	25.36	25.36
	$\sigma_{13}^e$	-0.75	-0.77	-0.77	-1.04	-1.06	-1.07
	$\sigma_{11}^H$	-2.73	-2.71	-2.70	-3.54	-3.53	-3.52
	$\sigma_{22}^H$	-24.07	-24.07	-24.08	-30.25	-30.26	-30.26
	$\sigma_{13}^H$	-0.75	-0.76	-0.77	-1.04	-1.06	-1.07
$x = L/2$ $\theta = 0,0$	$w$	-1.5252	-1.5255	-1.5256	-2.0852	-2.0858	-2.0861

ний в точках  $A$  и  $B$  должны совпадать, что и наблюдается во втором варианте расчета. Полученные значения напряжений в первом варианте расчета в точке  $A$  больше напряжений, чем в точке  $B$  в два раза. Значение прогиба в точке приложения сосредоточенной силы  $P$  в первом варианте оказалось в 1,62 раз заниженным, чем во втором варианте расчёта.

Анализ табличного материала позволяет сделать вывод, что при расчете НДС эллиптических цилиндров в геометрически нелинейной постановке общепринятая в МКЭ интерполяционная процедура приводит к некорректным результатам. При расчёте эллиптических цилиндров в геометрически нелинейной постановке следует применять разработанную векторную форму

интерполяции компонент вектора шагового перемещения и шагового вектора углов поворота нормали. Следует отметить, что с увеличением кривизны поперечного сечения эллиптического цилиндра отмеченная некорректность стандартной интерполяционной процедуры будет нарастать. Выполнен расчёт эллиптического цилиндра с вышеприведенными исходными данными при соотношении параметров эллипса поперечного сечения равного 2/1, а также  $b/c = 2,5/1$ . Полученные результаты представлены в графической форме на рисунках 6...9.

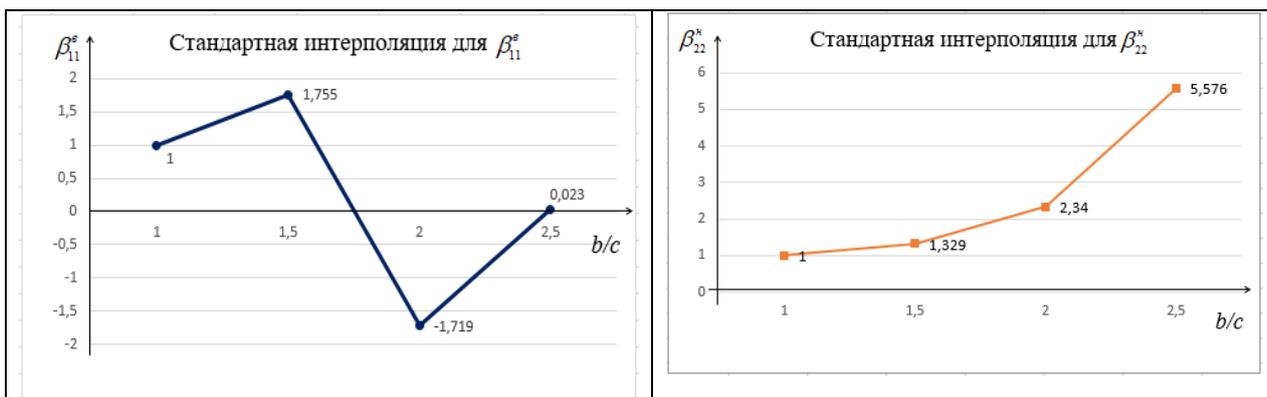


Рисунок 6 – Изменение значений коэффициентов  $\beta_{11}^e = \frac{(\sigma_{11}^e)_A}{(\sigma_{11}^e)_B}$  в зависимости от отношения полуосей эллипса  $b/c$  поперечного сечения эллиптического цилиндра

Рисунок 7 – Изменение значений коэффициентов  $\beta_{22}^h = \frac{(\sigma_{22}^h)_A}{(\sigma_{22}^h)_B}$  в зависимости от отношения полуосей эллипса  $b/c$  поперечного сечения эллиптического цилиндра

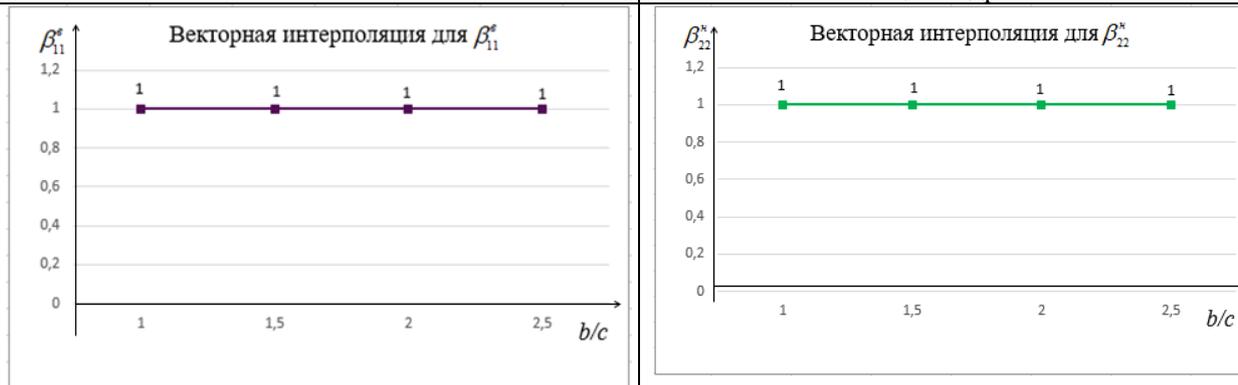


Рисунок 8 – Изменение значений коэффициентов  $\beta_{11}^e = \frac{(\sigma_{11}^e)_A}{(\sigma_{11}^e)_B}$  в зависимости от отношения полуосей эллипса  $b/c$  поперечного сечения эллиптического цилиндра

Рисунок 9 – Изменение значений коэффициентов  $\beta_{22}^h = \frac{(\sigma_{22}^h)_A}{(\sigma_{22}^h)_B}$  в зависимости от отношения полуосей эллипса  $b/c$  поперечного сечения эллиптического цилиндра

Введены коэффициенты, показывающие отношения нормальных и сдвиговых напряжений в точках  $A$  и  $B$  при количестве шагов нагружения,

равным 50:  $\beta_{11}^6 = (\sigma_{11}^6)_A / (\sigma_{11}^6)_B$ ;  $\beta_{22}^n = (\sigma_{22}^n)_A / (\sigma_{22}^n)_B$ . На рисунках 6...9 показаны изменения вышеупомянутых коэффициентов  $\beta_{11}^6$ ,  $\beta_{22}^n$  в зависимости от соотношения параметров эллипса поперечного сечения эллиптического цилиндра  $b/c$  в первом и во втором вариантах расчёта соответственно.

Как видно из рисунков, с увеличением отношения  $b/c$  значения коэффициентов  $\beta_{11}^6$ ,  $\beta_{22}^n$  в первом варианте существенно возрастают и даже изменяют свой знак, что является совершенно неприемлемым. Во втором варианте наблюдаются стабильные значения коэффициентов  $\beta_{11}^6$ ,  $\beta_{22}^n$ , равные единице, что и следует ожидать, исходя из условия симметрии расчётной схемы эллиптического цилиндра.

На основании вышеизложенного табличного и графического материалов можно сделать вывод о том, что при расчёте эллиптических цилиндров с учетом сдвиговых деформаций в геометрически нелинейной постановке необходимо использовать разработанную векторную форму интерполяционной процедуры, применяемую как к компонентам вектора шагового перемещения, так и к компонентам шагового вектора углов поворота нормали. Использование стандартной интерполяционной процедуры в задачах исследования НДС эллиптических цилиндров в геометрически нелинейной постановке приводит к получению некорректных результатов.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. Разработан алгоритм формирования матрицы жесткости и столбца узловых усилий четырёхугольного конечного элемента на основе стандартной для МКЭ интерполяционной процедуры и векторной формы интерполяции искомых величин для анализа НДС тонких оболочек с учётом сдвиговых деформаций в линейной постановке. На тестовых примерах доказано, что векторная форма интерполяционной процедуры позволяет автоматически учитывать смещения оболочечной конструкции как абсолютно твердого тела в неявной форме.

2. Получены основные геометрические и физические соотношения на шаге нагружения для тонкой оболочечной конструкции, определяющие связь

между приращениями деформаций и компонентами шагового вектора перемещения, компонентами шагового вектора угла наклона нормали. Сформированы матричные соотношения между контравариантными компонентами тензора приращений напряжений и ковариантными компонентами тензора приращений деформаций в произвольном слое оболочки на  $(j+1)$ -ом шаге нагружения на основе предложенной гипотезы о пропорциональности между компонентами девиаторов приращений деформаций и компонентами девиаторов приращений напряжений.

3. Разработан алгоритм формирования матрицы жесткости четырёхузлового конечного элемента и столбца узловых усилий на шаге нагружения при реализации разработанной векторной формы интерполяционной процедуры шаговых искомых величин.

4. Выполнен сравнительный анализ результатов конечно-элементных решений оболочек с учетом сдвиговых деформаций при использовании двух вариантов интерполяционной процедуры шаговых неизвестных, который показал, что использование векторной формы интерполяции искомых величин на шаге нагружения в конечно-элементном анализе оболочек с переменной кривизной срединной поверхности позволяет получать корректные значения прочностных параметров. Применение стандартной в МКЭ интерполяции искомых величин при использовании криволинейных координат в расчетах оболочек не приводит к корректным результатам.

5. Разработанные алгоритмы расчета оболочек в геометрически нелинейной постановке с учетом сдвиговых деформаций реализованы в пакетах авторских программ по расчету на прочность оболочечных конструкций, апробированы и внедрены в практику инженерных расчетов.

**Основные положения и научные результаты диссертации изложены в следующих публикациях.**

**Статьи в журналах, проиндексированных в SCOPUS/Web of Science**

1. Klochkov, Yu. V. Finite-element analysis of thin-walled shells under various parameterization options of their surfaces [Электронный ресурс] / Yu. V. Klochkov, A. P. Nikolaev, T. A. Sobolevskaya, A. S. Andreev // IOP Conf. Series: Materials

Science and Engineering 675 (2019) 012053 / International Scientific and Practical Conference Engineering Systems – 2019. - Режим доступа: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/675/1/012053/pdf>.

2. Klochkov, Yuriy V. The Finite Element Desired Quantities Invariant Approximation Method in the Thin Shells Calculation Based on the Timoshenko Hypothesis [Электронный ресурс] / Yuriy V. Klochkov, Tlek R. Ishchanov, Alexander S. Andreev, Mikhail Yu. Klochkov // Materials Science Forum (Volume 974). Pages: 676-680. December 2019. - Режим доступа: <https://www.scientific.net/MSF.974.676>.

3. Klochkov, Yu. V. Geometrically nonlinear calculation of thin shells taking into account shear deformations when using the form of interpolation of the sought quantities [Электронный ресурс] / Yu V Klochkov, T R Ishchanov, A S Andreev and M Yu Klochkov // Journal of Physics: Conference Series, Volume 1901, V International Scientific and Technical Conference "Mechanical Science and Technology Update" (MSTU 2021), 16-17 March 2021. - Режим доступа: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1901/1/012117>.

4. Klochkov, Yuriy Finite element shear models of thin-walled structures of water management systems of agro-industrial complex [Электронный ресурс] / Yuriy Klochkov, Tlek Ishchanov, Alexandr Andreev, Mikhail Klochkov // BIO Web of Conferences 17, 00133 (2020) / BIO Web Conf. Volume 17, 2020 International Scientific-Practical Conference “Agriculture and Food Security: Technology, Innovation, Markets, Human Resources” (FIES 2019). - Режим доступа: [https://www.bio-conferences.org/articles/bioconf/pdf/2020/01/bioconf\\_fies2020\\_00133.pdf](https://www.bio-conferences.org/articles/bioconf/pdf/2020/01/bioconf_fies2020_00133.pdf).

#### **Статьи в ведущих рецензируемых научных журналах и изданиях**

1. Клочков, Ю. В. Учет геометрической нелинейности в конечно-элементных прочностных расчетах тонкостенных конструкций типа оболочек [Текст] / Ю. В. Клочков, А. П. Николаев, Т. Р. Ищанов, А. С. Андреев, М. Ю. Клочков // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. - 2020. - Т. 16. - № 1. - С. 31-37.

2. Клочков, Ю. В. Расчет прочности оболочечных конструкций АПК бункерного типа [Текст] / Ю. В. Клочков, А. П. Николаев, С. Д. Фомин, Т. А. Соболевская, А. С. Андреев // Известия Нижневолжского агроуниверситетского комплекса: Наука и высшее профессиональное образование. - 2019. - № 2 (54). - С. 285-297.

3. Клочков, Ю. В. Численный анализ НДС тонких оболочек в геометрически нелинейной постановке на примере эллиптического цилиндра [Текст] / Ю. В. Клочков, А. П. Николаев, Т. Р. Ищанов, А. С. Андреев, М. Ю. Клочков // Строительная механика и расчет сооружений. - 2020. - № 2 (289). - С. 40-47.

4. Клочков, Ю. В. Векторная аппроксимация в МКЭ для оболочки вращения при учете сдвиговых деформаций [Текст] / Ю. В. Клочков, А. П. Николаев, Т. Р. Ищанов, А. С. Андреев // Проблемы машиностроения и надежности машин. - 2020. - № 4. - С. 35-43.

#### **Публикации в других изданиях**

1. Клочков, Ю. В. Геометрически нелинейный расчет тонких оболочек с учетом сдвиговых деформаций при использовании векторной формы интерполяции искомых величин [Текст] / Ю. В. Клочков, Т. Р. Ищанов, А. С. Андреев, М. Ю. Клочков // В сборнике: Проблемы машиноведения. Материалы V Международной научно-технической конференции. Омск, - 2021. - С. 36-41.

2. Клочков, Ю. В. Учет сдвиговых деформаций в конечно-элементном анализе тонкой оболочки с интерполяцией перемещений как составляющих векторных полей [Текст] / Ю. В. Клочков, Т. Р. Ищанов, М. Ю. Клочков, А. С. Андреев // В сборнике: XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Сборник трудов. В 4-х томах. - 2019. - С. 115-116.

3. Андреев, А. С. Применение конечно-элементных вычислительных комплексов в инженерных расчетах [Текст] / А. С. Андреев // Стратегическое развитие АПК и сельских территорий РФ в современных международных условиях: материалы Международной научно-практической конференции,

посвящённой 70-летию Победы в Великой Отечественной Войне 1941-1945 гг. - 2015. - С. 494-497.

4. Андреев, А. С. Расчет осесимметрично нагруженных оболочек вращения с различными значениями прочностных характеристик [Текст] / А. С. Андреев // Эколого-мелиоративные аспекты рационального природопользования. Материалы Международной научно-практической конференции. - 2017. - С. 370-377.

5. Клочков, Ю. В. Конечно-элементный алгоритм расчета цилиндрической оболочки в геометрически нелинейной постановке [Текст] / Ю. В. Клочков, Т. Р. Ищанов, А. С. Андреев, М. Ю. Клочков // В сборнике: оптимизация сельскохозяйственного землепользования и усиление экспортного потенциала АПК РФ на основе конвергентных технологий. Материалы Международной научно-практической конференции, проведенной в рамках Международного научно-практического форума, посвященного 75-летию Победы в Великой отечественной войне 1941-1945 гг.. Волгоград, - 2020. - С. 331-337.

6. Клочков, Ю. В. Численный анализ НДС оболочек с учётом сдвиговых деформаций в геометрически нелинейной постановке [Текст] / Ю. В. Клочков, А. С. Андреев, М. Ю. Клочков // В сборнике: развитие АПК на основе принципов рационального природопользования и применения конвергентных технологий. Материалы Международной научно-практической конференции, проведенной в рамках Международного научно-практического форума, посвященного 75-летию образования Волгоградского государственного аграрного университета. - 2019. - С. 225-229.

7. Клочков, Ю. В. Конечно-элементный расчет оболочки вращения на основе гипотезы С. П. Тимошенко в геометрически нелинейной постановке [Текст] / Ю. В. Клочков, Т. А. Киселева, А. С. Андреев // В сборнике: Стратегия развития сельского хозяйства в современных условиях - продолжение научного наследия Листопада Г.Е., академика ВАСХНИЛ (РАСХН), доктора технических наук, профессора. - 2019. - С. 165-170.

### **Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ**

1. Свидетельство 2019661376. Программа генерации конечно-элементной

сетки для расчёта эллиптического цилиндра с учётом сдвиговых деформаций в геометрически нелинейной постановке [Текст] / Ю. В. Клочков, Т. Р. Ищанов, А. С. Андреев; правообладатель ФГБОУ ВО Волгоградский ГАУ. - № 2019660241; дата поступления 15.08.2019; дата регистрации 28.08.2019.

2. Свидетельство 2019661375. Программа формирования матрицы жесткости четырехугольного конечного элемента на шаге нагружения для расчета эллиптического цилиндра с учетом сдвиговых деформаций в геометрически нелинейной постановке [Текст] / Ю. В. Клочков, Т. Р. Ищанов, А. С. Андреев; правообладатель ФГБОУ ВО Волгоградский ГАУ. - № 2019660243; дата поступления 15.08.2019; дата регистрации 28.08.2019.

3. Свидетельство 2020612742. Программа вычислений напряжений в эллиптическом цилиндре с учетом геометрической нелинейности и сдвиговой деформации [Текст] / Ю. В. Клочков, Т. Р. Ищанов, А. С. Андреев; правообладатель ФГБОУ ВО Волгоградский ГАУ. - № 2020611288; дата поступления 10.02.2020; дата регистрации 28.02.2020.

4. Свидетельство 2020612532. Комплексная программа по расчету на прочность эллиптического цилиндра с учетом геометрической нелинейности и сдвиговых деформаций [Текст] / Ю. В. Клочков, Т. Р. Ищанов, А. С. Андреев; правообладатель ФГБОУ ВО Волгоградский ГАУ. - № 2020611313; дата поступления 10.02.2020; дата регистрации 25.02.2020.

5. Свидетельство № 2020662613. Программа вычисления напряжений в эллиптическом цилиндре в процессе шагового нагружения при использовании векторной формы интерполяционной процедуры [Текст] / Ю. В. Клочков, Т. Р. Ищанов, А. С. Андреев, М. Ю. Клочков; правообладатель ФГБОУ ВО Волгоградский ГАУ. - № 2020661921; дата поступления 08.10.2020; дата регистрации 16.10.2020.

6. Свидетельство № 2020662987. Программа формирования матрицы жесткости четырехугольного конечного элемента на шаге нагружения при использовании векторной формы интерполяционной процедуры [Текст] / Ю. В. Клочков, Т. Р. Ищанов, А. С. Андреев, М. Ю. Клочков; правообладатель

ФГБОУ ВО Волгоградский ГАУ. - № 2020661846; дата поступления 08.10.2020;  
дата регистрации 21.10.2020.

Андреев Александр Сергеевич

СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА РАСЧЕТА ОБОЛОЧЕК В  
ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ПОСТАНОВКЕ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ  
ВЕКТОРНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ЛИНЕЙНЫХ И УГЛОВЫХ ПАРАМЕТРОВ НА  
ШАГЕ НАГРУЖЕНИЯ

Автореферат

Подписано в печать 21.12. 2021. Формат 60x84<sup>1/16</sup>

Усл.-печ. л. 1,0. Тираж 100. Заказ № 493.

ИПК ФГБОУ ВО Волгоградский ГАУ «Нива».

400002, г. Волгоград, пр. Университетский, 26.