

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Волгоградский государственный технический университет»

На правах рукописи



Клочков Михаил Юрьевич

**СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО
РАСЧЕТА ОБОЛОЧЕК НА ОСНОВЕ СМЕШАННОГО МКЭ С ТЕНЗОРНО-
ВЕКТОРНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИЕЙ ИСКОМЫХ ВЕЛИЧИН**

2.1.9. Строительная механика

Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук

Научный руководитель:

Пшеничкина Валерия Александровна

доктор технических наук, профессор

Волгоград 2026

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	5
ГЛАВА 1. Краткий обзор развития МКЭ в расчетах тонкостенных конструкций	15
1.1. Выводы по первой главе.....	32
ГЛАВА 2. Основные соотношения для упругих оболочек.....	33
2.1. Основные геометрические соотношения оболочек.....	33
2.2. Геометрические соотношения эллипсоидного типа оболочки	35
2.3. Геометрические соотношения эллиптического цилиндра в единичном базисе	38
2.4. Физические соотношения тонких упругих оболочек.....	41
2.5. Геометрические и физические соотношения для оболочек вращения.....	42
2.6. Выводы по второй главе.....	44
ГЛАВА 3. Расчёт упругих оболочек в смешанной формулировке МКЭ.....	45
3.1. Четырёхузловой элемент дискретизации с силовыми и кинематическими узловыми неизвестными.....	45
3.2. Смешанный функционал Рейсснера для четырёхузлового элемента дискретизации.....	49
3.3. Пример расчёта кругового цилиндра.....	54
3.4. Пример расчёта эллиптического цилиндра.....	57
3.5. Пример расчёта эллиптического цилиндра из несжимаемого материала.....	60
3.6. Четырёхузловой элемент дискретизации с деформационными и кинематическими узловыми неизвестными.....	63
3.6.1. Пример расчёта двухшарнирной арки при вариативном использовании силовых узловых неизвестных.....	66
3.6.2. Пример расчёта эллиптического кольца при вариативном использовании силовых узловых неизвестных.....	70
3.6.3. Пример расчёта кругового полукольца при использовании различных формулировок МКЭ.....	72
3.6.4. Пример расчёта эллиптического полукольца с соотношением параметров эллипса 1,25 при использовании различных формулировок МКЭ.....	73
3.6.5. Пример расчёта эллиптического полукольца с соотношением параметров эллипса 2,5 при использовании различных формулировок МКЭ.....	75

3.7. Трехпольный вариант МКЭ в смешанной формулировке.....	77
3.7.1. Пример расчёта эллиптического цилиндра под внутренним давлением.....	82
3.7.2. Расчет оболочки в форме эллиптического кольца под действием растягивающей нагрузки	85
3.7.3. Пример расчёта эллиптического цилиндра под комбинированной нагрузкой.....	87
3.7.4. Пример расчёта цилиндрической оболочки под действием сосредоточенной силы.....	90
3.8. Выводы по третьей главе.....	96
ГЛАВА 4. Применение тензорно-векторной формы интерполяционной процедуры силовых и кинематических неизвестных в конечно-элементных алгоритмах расчета оболочечных конструкций при использовании смешанной формулировки МКЭ.....	98
4.1. Интерполяция полей векторов перемещений.....	100
4.2. Тензорная форма интерполяционной процедуры.....	104
4.2.1. Интерполяция тензоров продольных сил и изгибающих моментов.....	105
4.2.2. Примеры расчёта эллиптического кольца при шарнирном и пружинном опирании.....	109
4.2.3. Примеры расчёта оболочки вращения при шарнирном и пружинном опирании.....	119
4.2.4. Примеры расчёта оболочки вращения с использованием вычислительного комплекса ANSYS.....	127
4.2.5. Примеры расчёта эллиптической арки при шарнирном и пружинном опирании.....	133
4.2.6. Примеры расчёта эллиптического цилиндра при шарнирном и пружинном опирании.....	137
4.3 Выводы по четвертой главе.....	142
ГЛАВА 5. Учет физической нелинейности в расчетах оболочечных конструкций.....	145
5.1. Соотношения теории малых упруго-пластических деформаций при использовании шаговой процедуры последовательного нагружения.....	145
5.2. Процедура компоновки матрицы жесткости ЧЭД на шаге нагружения.....	152
5.3. Пример упруго-пластического расчета консольного фрагмента кругового цилиндра.....	158
5.4. Пример расчета эллипсоида вращения с учетом пластической стадии	

работы материала.....	161
5.5. Реализация трехпольного МКЭ в расчётах оболочек при упруго-пластическом деформировании.....	163
5.6. Пример упруго-пластического расчёта кругового цилиндра при использовании трехпольного варианта МКЭ.....	167
5.7. Пример упруго-пластического расчета круговой цилиндрической панели.....	169
5.8. Пример упруго-пластического расчёта эллиптической панели.....	172
5.9. Пример упруго-пластического расчёта эллиптического кольца.....	179
5.10. Выводы по пятой главе.....	184
Основные результаты и выводы.....	185
Список литературы.....	187
Приложение А. Свидетельства о регистрации программ для ЭВМ.....	209

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время конструкции из оболочек или их фрагментов получили повсеместное распространение, причем область их применения неуклонно расширяется. Все более возрастающие требования по снижению материалоемкости конструкций также способствуют тому, что массивные объекты заменяются, где это только возможно, на экономичные тонкостенные конструкции, к которым относятся оболочечные конструкции. Несмотря на свой относительно небольшой вес конструкции из оболочек остаются весьма прочными и устойчивыми благодаря своей криволинейной форме, что в конечном итоге делает их наиболее предпочтительными. Примерами широкого использования оболочечных конструкций могут служить разнообразные по своей геометрической форме покрытия, перекрытия, ангары, куполы, резервуары, трубопроводы, корпуса летательных и космических аппаратов, сосуды высокого давления, архитектурные формы и многое другое. Повсеместное распространение тонкостенных конструкций типа оболочек, усложнение их геометрических форм и характера прикладываемых внешних нагрузок требует постоянного совершенствования алгоритмов расчета подобного рода конструкций, особенно в физически нелинейной постановке. Данная необходимость обусловлена тем, что анализ напряженно-деформированного состояния (НДС) конструктивных элементов из тонких оболочек, выполняемый на основе классических геометрических и физических аналитических соотношений возможен лишь в весьма узком диапазоне и имеет достаточно много ограничений.

В создание и развитие как линейной, так и нелинейной теории расчета оболочек, как отдельного вида конструкций, решающий вклад внесли отечественные ученые, такие как Новожилов В. В. [89, 90], Черных К. Ф. [116], Власов В. З. [21], Тимошенко С. П. [112, 113], Вольмир А. С. [22], Галимов К. З. [24], Корнишин М. С. [80], Бидерман В. Л. [18], Гольденвейзер А. А. [31], Григолюк Э. Н. [32], Пикуль В. В. [97], Паймушин В. Н. [93, 94, 148], Петров В. В. [95, 96], Крысько В. А. [82, 119, 133, 134] и многие другие. Основная проблема заключается в эффективном применении соотношений линейной и нелинейной

теории оболочек к практическому анализу НДС оболочечных конструкций сложной геометрии и при сложных вариантах нагружения. Перспективным направлением в решении нелинейных задач в механике оболочек является использование численных методов расчета, которые получили мощное развитие благодаря современной компьютерной технике, которая в свою очередь также развивается ускоренными темпами. В развитие численных методов расчета конструкций из тонких оболочек существенный вклад внесли отечественные ученые, такие, как Губайдуллин Д. А. [34], Баженов В.Г. [5-7], Петров В. В. [95, 96], Паймушин В. Н. [93, 94, 122, 148], Крысько В. А. [82, 119, 133, 134], Карпов В. В. [59], Акимов П. А. [3, 121], Белостоцкий А. М. [16, 123], Зозуля В. В. [127], Каюмов Р. А. [60], Козлов В. А. [78, 79], Хайруллин Ф. С. [114], Немировский Ю. В. [87, 88], Шалашилин В. Н. [118], Игумнов Л. А. [86] и многие другие. Среди всех численных методов на современном этапе развития науки наибольшее распространение получил численный метод конечных элементов (МКЭ), в развитии которого большой вклад внесли зарубежные и отечественные ученые, такие, как Зенкевич О. С. [51, 162], Бате К.-Ю. [15], Оден Дж. [92], Галлагер В. [23], Сьярле Д. [111], Деклу Ж. [38], Сахаров А. С. [103], Постнов В. А. [98-100], Розин Л. А. [102], Рикардс Р. Б. [101], Голованов А. И. [26-30], Серазутдинов М. Н. [107, 120], Якупов Н. М. [120, 157-160], Тюкалов Ю. Я. [153-156], Игнатьев В. А. [53, 54], Косицын С. Б. [81], Лалин В. В. [139], Галишникова В. В. [25], Султанов Л. У. [110], Акимов П. А. [3] и многие другие.

В настоящее время МКЭ продолжает активно развиваться. Внимание исследователей всего мира сосредоточено на поиске новых вариантов МКЭ, особенно применительно к физически нелинейному анализу НДС различных объектов техносферы, к которым, несомненно относятся тонкостенные конструкции в форме оболочек различной геометрии. Несмотря на значительное количество разработанных конечноэлементных методик расчета оболочечных конструкций (Железнов Л. П. [41-50], Кабанов В. В. [41, 42], Бакулин В. Н. [8-14], Голованов А. И. [26-30], Султанов Л. У. [110], Якупов Н. М. [120], Серазутдинов М. Н. [107, 120], Тюкалов Ю. Я. [153-156], Косицын С. Б. [81], Агапов В. П. [1, 2],

Лалин В. В. [139] и другие), наличие вычислительных комплексов типа ANSYS, NASTRAN, ABAQUS и им подобных, остается достаточно широкое поле деятельности для совершенствования конечноэлементных алгоритмов анализа НДС тонкостенных конструкций в форме оболочек, особенно в физически нелинейной постановке в наиболее перспективной смешанной формулировке МКЭ.

Целью настоящего исследования является разработка двупольного и трехпольного вариантов МКЭ в смешанной формулировке для расчета тонких оболочек произвольной геометрии с учетом физической нелинейности материала на основе тензорно-векторной формы интерполяционной процедуры искомых кинематических (перемещений и их производных), деформационных (деформаций и искривлений срединной поверхности) и силовых (продольных сил и изгибающих моментов) варьируемых параметров, реализация разработанных конечноэлементных алгоритмов линейного и физически нелинейного расчета оболочек в виде программных продуктов и внедрения их в расчетную инженерную практику.

Для достижения выше обозначенной цели необходимо решение следующего ряда задач.

1. Вывод основных геометрических соотношений тонких оболочек на основе использования параметрического выражения радиус – вектора срединной поверхности и соотношений механики сплошных сред.
2. Разработка алгоритма формирования матрицы жесткости четырёхузлового элемента дискретизации в двупольной смешанной формулировке при вариативном выборе силовых искомых параметров в виде продольных сил и изгибающих моментов или деформаций и искривлений срединной поверхности.
3. Разработка трехпольного варианта смешанного МКЭ на основе предложенного модифицированного смешанного функционала. Разработка алгоритма компоновки матрицы жесткости четырехузлового элемента дискретизации (ЧЭД) с тремя полями искомых неизвестных: перемещений с их производными,

продольных сил и изгибающих моментов, а также деформаций и искривлений срединной поверхности.

4. Разработка тензорной формы интерполяционной процедуры для силовых (продольные силы и изгибающие моменты) и деформационных (деформации и искривления срединной поверхности) искомым варьируемых параметров с реализацией данной формы интерполяции в дву- и трехпольном вариантах смешанного МКЭ.

5. Получение на основе теории малых упруго - пластических деформаций соотношений между приращениями деформаций и приращениями напряжений на одном из этапов последовательного нагружения путем вычисления частных производных от компонент тензора деформаций по компонентам тензора напряжений.

6. Разработка алгоритма формирования на одном из этапов последовательного нагружения матрицы жесткости четырехузловое элемента дискретизации в дву- и трехпольном вариантах МКЭ на основе предложенного смешанного нелинейного функционала.

7. Выполнение решения комплекса тестовых задач по расчету тонкостенных конструкций в форме оболочек различной геометрии в линейной и физически нелинейной постановках для верификации разработанных алгоритмов, установления степени точности конечноэлементных решений путем сопоставления полученных результатов с результатами других авторов и аналитическими решениями.

Научная новизна исследования заключается в следующем.

1. На основе смешанного двупольного функционала с кинематическими (перемещения и их производные) и вариативными силовыми (продольные силы и изгибающие моменты или деформации и искривления срединной поверхности) искомыми прочностными параметрами разработан алгоритм формирования матрицы жесткости четырёхузловое элемента дискретизации;

2. На основе предложенного модифицированного смешанного функционала разработан новый алгоритм формирования матрицы жесткости трехпольного

четырёхузлового элемента дискретизации с тремя полями искомых прочностных параметров в виде компонент вектора перемещения и их первых производных, продольных сил и изгибающих моментов, а также деформаций и искривлений срединной поверхности;

3. Разработан новый вариант тензорной формы интерполяционной процедуры для силовых (продольные силы и изгибающие моменты) и деформационных (деформаций и искривлений срединной поверхности) искомых варьируемых параметров с реализацией данной формы интерполяции в дву- и трехпольном вариантах смешанного МКЭ;

4. На основе теории малых упруго – пластических деформаций получены соотношения между компонентами тензора приращений деформаций и компонентами тензора приращений напряжений на одном из этапов последовательного нагружения при использовании операции дифференцирования компонент тензора деформаций по компонентам тензора напряжений;

5. Разработан новый алгоритм компоновки на шаге нагружения матрицы жесткости четырёхузлового элемента дискретизации на основе предложенного смешанного нелинейного функционала в дву- и трехпольном вариантах смешанного МКЭ;

6. На основе решения комплекса тестовых задач по расчету оболочечных конструкций различной геометрии в линейной и физически нелинейной постановках выполнен сравнительный анализ точности конечноэлементных решений, полученных с использованием разработанных алгоритмов смешанного МКЭ с алгоритмами МКЭ в форме метода перемещений. Доказана корректность и высокая точность вычислений искомых прочностных параметров при использовании разработанных дву- и трехпольном вариантах смешанного МКЭ в сравнении с традиционными формулировками МКЭ.

Теоретическая значимость исследования состоит в предложенных смешанных линейных и нелинейных функционалах, разработанных на их основе дву- и трехпольном вариантах смешанного МКЭ с реализацией в виде алгоритмов формирования матриц жесткостей четырёхузлового элемента дискретизации в

линейной и физически нелинейной постановках. Разработке тензорной формы интерполяции силовых (продольные силы и изгибающие моменты) и деформационных (деформации и искривления срединной поверхности) искомых прочностных параметров. Доказательстве корректности и высокой точности конечноэлементных решений при использовании тензорно – векторной формы интерполяции в расчетах оболочек со значительной кривизной срединной поверхности или допускающих смещения как абсолютно твердые тела под действием приложенной нагрузки.

Практическая значимость исследования заключается в разработке алгоритмов формирования матриц жесткостей смешанного четырёхузлового элемента дискретизации в дву– и трехпольном вариантах смешанного МКЭ в линейной и физически нелинейной постановках при использовании тензорно – векторной формы интерполяции искомых величин. В создании программных модулей, реализующих разработанные дву- и трехпольные элементы дискретизации, позволяющие выполнять прочностные расчеты, в том числе в физически нелинейной постановке оболочек произвольной конфигурации со значительной кривизной поверхности, в том числе допускающих смещения как абсолютно твердые тела. В возможности эффективного использования созданных пакетов прикладных программ организациями, занимающимися проектированием и реконструкцией тонкостенных объектов в виде оболочек при выполнении прочностных расчетов в линейной и физически нелинейной постановках.

Методология и методы исследования.

Исследования основываются на теории тонких оболочек, теории интерполяции искомых величин через их узловые значения, теории малых упруго – пластических деформаций, расчете статически неопределимых систем методом сил, матричной алгебре, векторном, тензорном, математическом анализе, численном методе конечных элементов, шаговой процедуре нагружения, других методах, принятых в строительной механике и механике сплошных сред.

Положения, выносимые на защиту.

1. Разработанный на основе смешанного функционала алгоритм формирования матрицы жесткости двупольного четырёхузлового элемента дискретизации с кинематическими (перемещения и их первые производные) и вариативными силовыми (продольные силы и изгибающие моменты или деформации и искривления срединной поверхности) искомыми неизвестными.
2. Разработанный на основе предложенного модифицированного смешанного функционала алгоритм компоновки матрицы жесткости элемента дискретизации в форме четырехугольника с узлами, расположенными в его вершинах с тремя полями неизвестных в виде перемещений с их частными производными первого порядка, продольных сил и изгибающих моментов, а также деформаций и искривлений срединной поверхности оболочечной конструкции.
3. Тензорная форма интерполяционной процедуры для силовых (продольные и изгибающие моменты) и деформационных (деформации и искривления срединной поверхности) искоемых варьируемых параметров с реализацией данной формы интерполяции в дву- и трехпольном вариантах смешанного МКЭ.
4. Разработанные на основе теории малых упруго – пластических деформаций соотношения между приращениями деформаций и приращениями напряжений, полученные путем вычисления частных производных от компонент тензора деформаций по компонентам тензора напряжений.
5. Скомпонованный на основе нелинейного смешанного функционала алгоритм формирования матрицы жесткости четырёхузлового элемента дискретизации на одном из этапов последовательного нагружения в дву- и трехпольном вариантах смешанного МКЭ.
6. Результаты решения комплекса тестовых задач по расчету оболочечных конструкций различной геометрии в линейной и физически нелинейной постановках, а также сравнительный анализ конечноэлементных решений, полученных на основе разработанных дву- и трехпольном вариантах смешанного МКЭ с вариативными формами аппроксимирующих выражений искоемых величин

с решениями, полученными в результате применения МКЭ в виде метода перемещений.

Достоверность и адекватность результатов численных экспериментов

обеспечивается за счет:

1. Корректной с точки зрения математики постановки задач.
2. Применением классических точки зрения строительной механики методов в решении задач.
3. Привлечением основных постулатов построения аппроксимирующих выражений для искомых величин, использованием векторной и тензорной алгебры, применением теорем математического анализа, соотношений механики сплошных сред для получения необходимых геометрических и физических соотношений, а также для построения алгоритмов численного анализа.
4. Всесторонней проверкой корректности и точности конечноэлементных решений при определении НДС оболочечных конструкций различной геометрии в линейной и физически нелинейной постановках путем сопоставления численных значений искомых прочностных параметров со значениями, полученными другими исследователями, а также значениями, которые могут быть вычислены по аналитическим формулам.
5. Использование критерия сходимости для численных методов при измельчении сетки узлов, на которую разбивается оболочечная конструкция, а также увеличением количества шагов нагружения при расчетах оболочек за пределом упругости.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 5 глав, заключения, списка литературы (163 наименований) и приложения. Объем диссертации составляет 217 страницы текста и содержит 43 рисунка, а также 47 таблиц.

Краткое содержание диссертации.

Во введении излагаются актуальность, цели и задачи исследования, представлены научная новизна, достоверность, теоретическая и практическая

значимость выполненных исследований, приводится краткое содержание диссертации по главам.

В первой главе излагается краткий обзор развития численного метода конечных элементов применительно к расчету тонкостенных конструкций из оболочек, в том числе физически нелинейной постановке.

Во второй главе выполняется вывод основных геометрических и физических соотношений тонких упругих оболочек. Для получения соотношений Коши предложена формула радиус-вектора, задающего срединную поверхность оболочечной конструкции как функцию осевой координаты и параметра эллипса поперечного сечения. Посредством дифференцирования данного радиус-вектора были найдены базисные векторы, скалярные произведения которых необходимы для получения геометрических и физических зависимостей, компонуемых на основе соотношений механики сплошных сред.

В третьей главе на основе смешанного функционала излагается алгоритм компоновки матрицы жесткости двупольного четырёхузлового элемента дискретизации с кинематическими (перемещения и их производные первого порядка) и вариативными силовыми (продольные силы и изгибающие моменты или деформации и искривления срединной поверхности) искомыми параметрами. На основе разработанного мультипольного смешанного функционала излагается процедура получения матрицы жесткости трехпольного ЧЭД с тремя полями неизвестных: компонент вектора перемещения с их частными производными, продольных сил и изгибающих моментов, а также деформаций и искривлений срединной поверхности оболочечной конструкции. Выполнена серия численных экспериментов, доказывающих корректность и высокую точность конечноэлементных решений разработанных вариантов смешанного МКЭ в сравнении с традиционным МКЭ в формулировке метода перемещений.

В четвертой главе излагается разработанная тензорно-векторная форма интерполяционной процедуры искоемых кинематических (компоненты вектора перемещения и их производные), силовых (продольные силы и изгибающие моменты) и деформационных (деформации и искривления срединной

поверхности) прочностных параметров применительно к дву- и трехпольному вариантам смешанного МКЭ. Выполнен ряд численных экспериментов по определению НДС оболочечных конструкций со значительными градиентами кривизны срединной поверхности или допускающих смещения как абсолютно твердых тел под действием приложенной поверхностной нагрузки. Результатами сравнительного анализа доказана высокая эффективность применения тензорно-векторной формы интерполяционной процедуры в расчетах оболочек указанного выше типа в сравнении с классической покомпонентной интерполяцией.

В пятой главе на основе теории малых упругопластических деформаций с привлечением процедуры вычисления частных производных от компонент тензора деформаций по компонентам тензора напряжений найдены зависимости между приращениями деформаций и приращениями компонент тензора напряжений на одном из этапов последовательного нагружения, в результате чего формируется матрица пластичности на шаге последовательного нагружения.

На основе предложенного нелинейного смешанного функционала компонуется матрица жесткости четырехузловое элемента дискретизации на одном из этапов последовательного нагружения в дву- и трехпольном вариантах смешанного МКЭ. Выполнен ряд численных экспериментов по расчёту оболочечных конструкций в физически нелинейной постановке, подтверждающих корректность и высокую точность конечноэлементных решений, полученных при использовании разработанных вычислительных алгоритмов физически нелинейного анализа НДС оболочечных конструкций.

В заключении приводятся основные выводы по результатам выполненных исследований.

ГЛАВА 1. КРАТКИЙ ОБЗОР РАЗВИТИЯ МКЭ В РАСЧЕТАХ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

В настоящий период тонкостенные конструкции из оболочек и их фрагментов получили самое широкое распространение. К таковым относятся: покрытия и перекрытия, ангары, складские помещения, резервуары, бункеры, трубопроводы различного назначения, сосуды высокого давления, архитектурные формы, корпуса судов, летательных аппаратов и многое другое. Обширная сфера применения подобного рода тонкостенных конструкций требует дальнейшего развития и совершенствования алгоритмов и методов расчета оболочек, особенно в нелинейной постановке. Несмотря на тот факт, что теория тонких оболочек разработана достаточно подробно [116, 89, 90, 97, 20, 22, 95, 96, 18, 24, 32, 41, 42, 33, 80, 82, 133, 134, 91, 112, 113] практическая реализация основных соотношений теории оболочек в виде систем дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных наталкивается на известные ограничения и затруднения, что весьма ограничивает сферу их применения при решении практических задач, особенно в нелинейной постановке. Бурное развитие компьютерной техники и вычислительных технологий выдвинули на первое место по своей значимости численные методы расчета [5-7, 93-96], отодвинув аналитические методы расчета на задний план. Среди всех численных методов, используемых для решения задач механики оболочек безусловным лидером в настоящее время является метод конечных элементов (МКЭ). В развитии МКЭ весомый вклад внесли как отечественные [98-100, 102, 118, 26-30, 1, 2, 107, 120, 108, 153-156, 139, 3, 16, 41-50, 81, 53-56, 61, 8-15, 103], так и зарубежные ученые [15, 51, 163, 111, 92, 57, 58, 4, 23, 101, 132].

Несмотря на весьма обширный объем выполненных исследований, посвященных применению МКЭ к решению задач строительной механики различных систем и объектов, в том числе оболочек, продолжается активное научно-исследовательская работа по развитию и совершенствованию конечноэлементных алгоритмов расчета тонкостенных конструкций из оболочек или их фрагментов, особенно в нелинейной постановке.

Круговые цилиндрические оболочки из композитного материала исследуются с точки зрения прочности и устойчивости в работах Железнова Л.П. [44-47] при различных видах внешней нагрузки. Поставленная задача решена «с учетом моментности и нелинейности их докритического напряженно-деформированного состояния. Нелинейная задача прочности и устойчивости решена методами конечных элементов и линеаризации Ньютона – Канторовича. Критические нагрузки определены в процессе решения геометрически нелинейной задачи с использованием критерия Сильвестра. Используются ранее разработанные на основе гипотезы Тимошенко конечные элементы композитных цилиндрических оболочек естественной кривизны, в аппроксимации перемещений которых в явном виде выделены их жесткие перемещения» [45]. Кроме круговых цилиндрических оболочек объектом исследования того же автора являются и некруговые цилиндрические оболочки. Так, например, Железнов Л.П. указывает что им «исследована устойчивость овальной цилиндрической оболочки, выполненной из полимерного композиционного материала. Установлено влияние способов укладки монослоев, нелинейности деформирования, параметра овальности на критические нагрузки потери устойчивости оболочки и весовую эффективность композитных оболочек» [48, 49, 50].

Подкрепленные эллиптические цилиндрические оболочки рассматриваются Железновым Л.П., Кабановым В.В., Бойко Д.В., в работах, в которых «излагается конечно-элементная постановка решения задач, разработан численный алгоритм и компьютерная программа исследования нелинейного деформирования и устойчивости дискретно и неоднородно подкрепленных оболочек, исследована устойчивость при поперечном изгибе подкреплённой стингерами цилиндрической оболочки с эллиптическим контуром поперечного сечения, выявлено влияние эллиптичности и нелинейности деформирования оболочки докритической стадии, дискретности и неоднородности подкреплений» [41, 42].

Прочность и устойчивость фрагмента фюзеляжа в виде круговой цилиндрической оболочки из композитного материала исследуются Железновым

Л.П., Серьёзовым А.Н. в работе, в которой «используются разработанные авторами данной работы на основе гипотезы Тимошенко конечные элементы цилиндрических композитных оболочек естественной кривизны, в аппроксимации перемещений которых в явном виде выделены их жесткие перемещения (перемещения конечных элементов как твердого тела)» [43].

Трехслойные цилиндрические оболочки, в том числе ослабленные прямоугольными в плане вырезами, являлись объектом конечноэлементного исследования в работах Бакулина В.Н. [8-14]. В данных работах были изучены вопросы влияния толщины несущего внутреннего слоя на НДС трехслойных оболочек, исследовано влияние угла раствора прямоугольных вырезов на прочностные параметры цилиндров. В частности, Бакулиным В.Н. в своей работе «для уменьшения размерности моделей послойного анализа трехслойных нерегулярных оболочек вращения цилиндрической формы рассматривается применение в отличие от большинства работ МКЭ, в которых аппроксимируются функции перемещений, эффективных аппроксимирующих функций, обобщённых деформацией (АФД) для двумерных КЭ несущих слоев, построенных на основе моментной теории тонких оболочек» [8]. При построении аппроксимирующих функций Бакулин В.Н. также обращает внимание на то, что «перемещения конечного элемента как твердого тела, учет которых приводит к повышению скорости сходимости численных решений, находятся интегрированием геометрических соотношений, связывающих компоненты вектора обобщённых деформаций с компонентами вектора перемещений, при нулевых значениях деформаций» [9,13].

В работе Якупова Н.М., Киямова Х.Г., Мухамедовой И.З. [160] на основе трехмерного конечного элемента с кубической аппроксимацией искомых величин исследовано НДС двухслойных цилиндрических оболочек. Изучено влияние толщины внутреннего слоя полимерметаллической оболочки на параметры НДС при нагружении трубы внутренним давлением.

В работах Тюкалова Ю.Я. [155, 156] для анализа НДС пластин и балок предложен объемный призматический конечный элемент, скомпонованный на

основе кусочно-постоянной аппроксимации полей напряжений с использованием принципа возможных перемещений в сочетании с методом множителей Лагранжа. В результате получен объемный конечный элемент с непрерывными полями напряжений на его границах, но прерывистыми внутри данного элемента. В качестве тестовых примеров приведены расчеты изгиба пластин и балок, подтверждающие эффективность предложенного конечного элемента.

Четырехугольный конечный элемент, основанный на линейной аппроксимации разработан Тюкаловым Ю.Я. в [154] для расчета пластин. Использование функционала дополнительной энергии, принципа виртуальных перемещений и аппроксимации моментов позволили аналитическим путем определить элементы матрицы жесткости вышеупомянутого конечного элемента.

Устойчивость тонких пластин исследуется в [153] Тюкаловым Ю.Я. с помощью треугольных и четырехугольных конечных элементов с кусочно-постоянной аппроксимацией полей моментов. Используется функционал с множителями Лагранжа, включающий алгебраические уравнения равновесия узловых точек сетки дискретизации. Представлен сравнительный анализ устойчивости пластин, рассчитанных аналитически и с помощью предложенных КЭ.

Трехмерные КЭ с кубической интерполяцией искомых величин предложены Якуповым С.Н., Киямовым Х.Г., Якуповым Н.М. в [161]. Параметризация исследуемой области осуществляется с помощью эрмитовых кубических сплайнов. В качестве тестового примера исследовано НДС армированных и неармированных плит.

Тороидальная оболочка с внутренним углублением является объектом исследования Якупова Н.М., Киямова Х.Г., Мухамедовой И.З. в [158]. Задача решается с помощью трёхмерного сплайного варианта МКЭ.

В работе Якупова С.Н., Киямова Х.Г., Якупова Н.М. [159] предлагается синтезированный элемент со сложной геометрией. Синтез трех- и двумерных элементов с кубической аппроксимацией искомых величин позволяет получить высокоточные криволинейные конечные элементы. Данный тип элемента

рекомендуется для исследования НДС структур с покрытием и локальным расслоением. В качестве тестового примера было изучено НДС трехслойной пластины.

Колебательный процесс композитной рамной конструкции с учетом диссипативных свойств материала исследуется Сидоровым В.Н., Бадьиной Е.С., Детиной Е.П. в [104] с помощью конечноэлементной модели, матрица демпфирования которой получена из условия стационарности полной энергии деформирования. Реализация решения уравнения движения рамы методом Ньюмарка осуществлена в расчетном комплексе MATLAB.

Двумерная задача теории упругости решается Акимовым П.А., Мозгалевой М.Л. в [3] дискретно-континуальным методом конечных элементов (ДКМКЭ) с использованием аппарата обобщенных функций с привлечением В-сплайнов. Изложена методика аппроксимации вектор-функций и операторов ДКМКЭ. Приведено решение тестовой задачи по расчету балки-стенки и сравнение результатов предложенного варианта ДКМКЭ с классическим вариантом МКЭ.

Конечный элемент с 14-ю степенями свободы предложен Паймушиным В.Н., Фирсовым В.А., Шишкиным В.М. в [93,94] для моделирования удлиненной пластины с поверхностным демпфирующим покрытием. Отмечается, что «создан четырехслойный элемент с 14 степенями свободы, моделирующий удлиненную пластину с интегральным демпфирующим покрытием: слой I (основной материал) работает в рамках гипотез Кирхгофа-Лява; демпфирующие слои II, IV находятся в плоском напряженном состоянии; армирующий слой III работает на растяжение сжатие (толщина данного слоя считается пренебрежимо малой)» [93]. Изучены собственные частоты колебаний данной пластины с учетом частотной зависимости динамических модулей упругости используемого материала пластины. Результаты исследований установлено, что потеря устойчивости внешних слоев пластины происходит по неклассической поперечно-сдвиговой форме.

Анализ упругопластического деформирования при конечных уровнях деформации при помощи разработанной конечноэлементной модели

рассматривается Pascon J.P. в [149]. Трехмерный гиперэластичный объект представлен в компактной двумерной форме плоского напряженного состояния. Используется изопараметрический треугольный мембранный элемент с варьируемой степенью аппроксимации. Приводятся значения параметра изотропного упрочнения, эквивалентного напряжения, а также представлены результаты сравнительного анализа решений, полученных с помощью разработанного алгоритма и конечных элементов других авторов.

В работе Косицина С.Б., Акулич В.Ю. [81] исследуется НДС ортогонально пересекающихся цилиндрически оболочек, находящихся в заглубленном в грунт состоянии. Расчет выполнен с помощью программного комплекса ANSYS с учетом физической и контактной нелинейностей. Рассмотрена постадийная очередность расчетных состояний по мере строительства тройникового сооружения.

Анализ процессов нелинейного деформирования, потери устойчивости и собственных колебаний упругих оболочек при термомеханическом нагружении выполняется Кривенко О.П. с соавторами в [136] на основе трехмерной теории термоупругости и при использовании универсального конечного элемента. На числовых примерах показаны надежность и эффективность разработанного алгоритма.

Киричевский Р.В., Скринникова А.В. в своей работе, посвященной изучению влияния аппроксимирующих функций на скорость сходимости МКЭ отмечают, что «получены коэффициенты тензора преобразования при различных аппроксимирующих функциях с использованием одномерных полиномов Лагранжа, которые используются для построения матрицы жесткости конечного элемента: линейной, квадратичной и кубической. Найденные коэффициенты тензора преобразования были использованы при расчете внутренних и внешних радиальных перемещений в полом толстостенном резиновом цилиндре, находящемся под внутренним давлением. Анализ сходимости МКЭ при выборе линейных, квадратичных и кубических аппроксимирующих функций перемещений для выполненных расчетов показал, что использование конечного

элемента с аппроксимирующей кубической функцией позволяет ускорить сходимость МКЭ и получить более точные результаты.» [61].

Сопоставительный анализ результатов конечноэлементного, вариационно-разностного и аналитического методов расчета торса с направляющим эллипсом представлен Ивановым В.В. и Алёшиной О.О. в [52]. Аналитическое решение было получено на основе безмоментной теории оболочек. При реализации конечноэлементного варианта расчета был использован вычислительный комплекс SCAD. Вариационно-разностный метод расчета заключался в применении программы «SHELL.VRM». Выполненный сравнительный анализ трех методов расчета позволил выявить положительные и отрицательные стороны каждого из рассмотренных подходов.

В работах Игнатьева А.В., Завьялова И.С., Бочкова М.И. [55, 56] рассматривается процедура редуцирования системы конечноэлементных уравнений, полученных на основе классического смешанного МКЭ. В частности, отмечается, что «алгоритм построения редуцированной системы конечно-элементных уравнений, полученных на основе МКЭ в форме КСМ, базируется на интерполяции основных неизвестных смешанного метода в узлах мелкой сетки через значения тех же неизвестных в узлах крупной сетки» [55]. Предложенный алгоритм апробирован на расчетах пластины с различными вариантами закрепления по контуру, в том числе с квадратным вырезом. Выполнен сравнительный анализ разработанного алгоритма с решениями ПК ЛИРА САПР.

Геометрически нелинейное поведение сжатой подкрепленной пластины при учете взаимодействия общей формы выпучивания и местных форм волнообразования рассматривается Мануйловым Г.А., Косицыным С.Б., Грудцыной И.Е. в [84] двумя способами: при помощи полуаналитического решения системы нелинейных уравнений и при использовании конечноэлементного комплекса Patran-Nastran.

Композитные оболочки, пластины и балки являются объектом исследования Матвеева А.Д. в [85]. Инструментом исследования выступают многосеточные конечные элементы (МнКЭ), которые позволяют достичь понижения размерности

дискретных моделей с помощью вложенных сеток. Отмечается, что «в данной работе предложен метод образующих конечных элементов (КЭ) для построения трехмерных композитных МнКЭ двух типов сложной формы. Суть предлагаемого метода состоит в следующем. Область МнКЭ 1-го типа получается путем поворота заданного плоского образующего односеточного КЭ (сложной формы) вокруг заданной оси на заданный угол, МнКЭ 2-го типа – путем параллельного перемещения образующего КЭ в заданном направлении на заданное расстояние. МнКЭ 1-го типа применяются для расчета композитных оболочек вращения, МнКЭ 2-го типа – для расчета композитных цилиндрических оболочек (с переменным радиусом кривизны срединной поверхности), пластин и балок сложной формы» [85].

Для решения осесимметричных задач Чеховым В.В. в работе [117] предложено развитие тензорно-матричной системы уравнений МКЭ для исследования больших деформаций несжимаемого упругого тела. Представлены результаты решения тестовых задач для цилиндра и уплотнительных колец.

Изгиб тонких и толстых пластин с особенностями напряжений исследуется Çalik-Karaköse Ü.N. в [125] с помощью двух типов прямоугольных конечных элементов с тремя степенями свободы в узле. Для реализации конечноэлементной формулировки используются теории пластин Кирхгофа и Рейсснера-Миндлина. Градиентная теория упругости используется для анализа концентрации напряжений в вершинах трещин при сосредоточенных видах нагрузки на пластины.

Задача по определению предельной нагрузки пластического разрыва в сосудах высокого давления с форсунками рассматривается Скопинским В.Н., Берковым Н.А. в [152] способом расчета максимума характеристической кривой нагружения. Для решения данной задачи используется нелинейный анализ МКЭ и теория аппроксимации кривых. Рассмотрены два варианта аппроксимации характеристической кривой: эллиптическая и квадратичная. Получены аналитические выражения для величины разрывной нагрузки и представлены

сравнительный анализ расчета давления разрыва с использованием полученных формул и нелинейного МКЭ.

Пересекающиеся оболочки (сосуды с патрубками и им подобные) являются объектом исследования Скопинского В.Н., Беркова Н.А., Столяровой Н.А., которые указывают, что «для конечно-элементного моделирования соединений пересекающихся оболочек применяются четырёхугольные оболочечные элементы двойной кривизны с 20 степенями свободы; для получения нелинейного решения используется итерационная процедура модифицированного метода Ньютона-Рафсона с пошаговым приложением нагрузки» [108]. В работе определяются предельные нагрузки на рассматриваемые конструктивные соединения. Представлены результаты сравнительного анализа по разработанной программе с известными опытными данными и приведены результаты о влиянии угла наклона патрубка и отношения диаметров сосуда и патрубка, значение максимально допустимого давления.

Новый подход к интерполяции частных производных перемещений в трехмерном восьмиузловом конечном элементе с одной точкой интегрирования предлагается Чекмарёвым Д.Т., Глазовой Е.Г., Абу Даввасом. Отмечается, что «Теоретической основой данного подхода является дальнейшее развитие класса ажурных схем МКЭ. Полученные формулы позволяют строить несовместные схемы МКЭ с улучшенными свойствами. В работе обсуждаются проблемы неустойчивости типа «песочные часы», сдвигового и объемного запираания. Предлагается новый эффективный подход к решению проблемы «песочных часов». Также обсуждается возможность применения новых формул аппроксимации производных к конечным элементам вырожденной формы с числом узлов меньше восьми.» [115].

Решение задачи теории упругости для объекта, имеющего односторонние связи предлагается Станкевичем И.В. в работе, в которой в качестве инструмента решения «рассматривается один из вариантов МКЭ в рамках смешанной схемы, основанной на применении функционала Рейсснера. Процедуры предложенного в работе алгоритма использованы для решения задачи о контактом

взаимодействии, когда нагруженное внешними силами упругое тело конечных размеров опирается на абсолютно жесткое полупространство» [109]. Матрица податливости, полученная в результате минимизации функционала Рейсснера по перемещениям и напряжениям, содержит нулевой блок. В качестве тестового примера приведен расчет пластины, находящийся в плоском напряженном состоянии.

Железобетонные фермы и плиты являются объектами нелинейного расчета Агапова В.П. в [1, 2], реализуемого в конечноэлементном вычислительном комплексе ПРИНС. Учитываются предварительное напряжение элементов ферм и усиление композитными тканями плит.

Экспериментально-численное исследование поведение трещины при термомеханическом нагружении выполнено Шлянниковым В. с соавторами в [151] на основе мультифизического анализа полей перемещений, деформаций и напряжений. Численное исследование проводилось с помощью соответствующих модулей вычислительного конечноэлементного комплекса ANSYS.

В работе [150] Роговым А.А., Столбовой О.С. предложена математическая модель, описывающая поведение сложных сред при конечных деформациях, учитывающая фазовый переход сплавов и полимеров с памятью формы. Пластические деформации, возникающие во время фазового перехода, зависят от температуры, напряжений и интенсивности магнитного поля (для сплавов). Численная реализация разработанной модели была осуществлена методом конечных элементов с использованием пакета FEniCS. Решена задача азимутального кручения полого цилиндра из полимера с памятью формы.

В работе Nodargi N.A., Bisegna. P. [146] разработан новый восьмиузловой четырехугольный конечный элемент в смешанной формулировке, основанной на функционале Ху-Вашицу. Для учета существенно нелинейной деформации предполагается, что интерполяция деформаций является разрывной, кусочно-постоянной. На примере расчета конструкций из эластопласта и сплавов с памятью формы доказывається точность и эффективность разработанного

смешанного конечного элемента, в том числе сравнением с совместными четырехугольными элементами.

Описанный выше восьмиузловой четырехугольный смешанный элемент применяется Nodargi N.A., Bisegna. P. в [147] для анализа НДС кирпичных стен. Основными искомыми параметрами конечного элемента, скомпонованного при использовании функционала Ху-Вашицу, являются перемещения, деформации и напряжения. С целью выполнения нелокальной регуляризации уравнений предложен новый алгоритм, эффективность которого существенно выше, что подтверждается численными примерами.

Геометрически нелинейная задача расчета конструкций решается Magisano D. Garcea G. в [145] с помощью МКЭ путем повышения эффективности использования метода Ньютона. Предлагается улучшить итерационную схему, что позволяет выполнять расчеты при крупных шагах последовательного нагружения. Предложенный конечноэлементный геометрически нелинейный алгоритм реализован в формулировке метода перемещений. Разработанная модификация метода Ньютона позволяет существенно улучшить численные решения геометрически нелинейных задач расчета конструкций по сравнению со стандартной процедурой Ньютона.

В [143] Madeo A. с соавторами предложен новый конечный элемент в смешанной формулировке. Авторы предлагают назвать его изостатическим элементом вследствие равенства количества параметров напряжений и перемещений. Компонуется предлагаемый элемент на основе использования вариационного принципа Хеллингера-Рейсснера. Утверждается, что такой элемент эффективен уже при редких сетках дискретизации. В качестве доказательной базы представлены результаты численных примеров расчета.

В работе Daghighi S. и соавторов [130] в качестве оболочечной конструкции предлагается использовать, так называемый суперэллипсоид вращения. Целью данного предложения является снижение до минимума изгибных напряжений при заданной нагрузке в виде внутреннего давления. Для поиска оптимальных форм проводилось параметрическое исследование нескольких суперэллипсоидов, а

также выполнено сравнение аналитического решения с конечноэлементным расчетом.

Треугольный конечный элемент разработан Cavalcante E., Neto E.L. в [128] для расчета пластины Рейсснера-Миндлина на предельную прочность. Данный тип элемента, по мнению авторов, в среднем удовлетворяет уравнениям равновесия и не является нижней границей нагрузки при разрушении. Утверждается, что критерий предельной прочности выполняется по всему конечному элементу. Также приведено решение ряда тестовых задач.

Смешанная формулировка МКЭ используется Magisano D., Garcea G. в [145] для анализа предельного состояния трехмерных каркасов, подвергающихся огневому воздействию. На каждом шаге для определения состояния элементов каркаса используется итерационная процедура Ньютона в сочетании с аналитическим вычислением касательных операторов. Представлены численные примеры, подтверждающие эффективность разработанного алгоритма для больших по размеру каркасов.

В работе Liguori F.S., Madeo A., Garcea G. [141] для исследования процессов упруго – пластического деформирования оболочечных конструкций предлагают использовать четырехузловой конечный элемент в смешанной формулировке. Данный тип элемента предполагает использование интерполяции равновесного напряжения и поля перемещений вдоль границ. В статье представлен результат сопоставительного расчета, выполненного с использованием разработанного конечного элемента и вычислительного комплекса ABAQUS.

Описанный выше двупольный четырехузловой смешанной элемент используют Liguori F.S., Madeo A. в [142] для геометрически нелинейного анализа многослойных композитных конструкций. Данный тип элемента называется изостатическим с минимальным количеством искоемых параметров. Он позволяет избегать блокировки и не имеет дефектов ранга. Результаты численных расчетов демонстрируют высокую скорость сходимости при геометрически нелинейном анализе составных оболочечных конструкций.

Анализ динамических характеристик системы оболочек цилиндрической формы, состоящей из металлических листов и многослойных алюминиевых трубчатых сердечников с различной толщиной стенок выполнен Li Shiqiang с соавторами в [140] с привлечением конечноэлементного вычислительного комплекса LS – DYNA. В результате выполненных расчетов была выявлена оптимальная конфигурация многослойной структуры, подвергающейся внутренней нагрузке взрывного характера.

Для исследования НДС нелинейных упругих материалов при конечных деформациях Chi H. с соавторами в [129] предлагают использование многоугольных конечных элементов, которые, как утверждают авторы, являются более удобными при моделировании сложных микроструктур и при учете периодических граничных условий. Полигональные элементы более устойчивы к конечным деформациям, чем стандартные конечные элементы и позволяют получать более точные результаты при расчете на изгиб и сдвиг. Смешанные полигональные элементы низкого порядка более стабильны на сетках Вороного, однако имеют недостатки в виде несогласованности при сгущении сеток. В данной работе используется схема коррекции градиента, осуществляемая путем добавления возмущения к градиенту после перемещений. В данной работе также представлены примеры расчета.

Трехмерный смешанный конечный элемент предлагают использовать Bilotta A.A., Garcea G., Leonetti L. в [124] для решения задач упруго-пластического деформирования, а также для анализа предельных состояний. Поле перемещений внутренней области конечного элемента интерполируется с помощью квадратичной функции, а поле деформаций принимается кусочно-постоянным путем разделения элемента на четыре тетраэдрические области. Эффективность предложенного конечного элемента проверена серией численных экспериментов.

В работе Caylnk I., Mahnken R. [126] представлена концепция стабилизации смешанных треугольных конечных элементов с помощью площадных функций. Элемент используется для решения геометрически линейных (упругих и упруго-

пластических) и геометрически нелинейных упругих задач. На тестовых примерах доказывалось, что разработанная концепция стабилизации смешанного треугольного конечного элемента позволяет избежать блокировки и уменьшить разброс напряжений для несжимаемых материалов.

В работе [135] Kryslj P. излагает метод стабилизации шестигранного конечного элемента. Параметры стабилизации выражаются в терминах входных параметров реального материала. Выполнен сравнительный анализ предложенного шестигранного элемента с аналогичными элементами вычислительного комплекса ABAQUS. Указывается, что представленный конечный элемент весьма эффективен при использовании в расчетах пластин и оболочек.

В работе Magisano D., Leonetti L., Garcea G. [144] изложена методика построения многоугольных конечных элементов произвольной формы. Функции формы были получены путем решения уравнения Пуассона. Данные функции формы позволяют формировать задачи для многоугольных элементов с произвольным количеством сторон. Реализуется смешанная формулировка с несколькими полями искомых неизвестных. Приведены тестовые примеры решения задач, которые продемонстрировали оптимальную скорость сходимости вычислительного процесса.

В работах [137, 138] Kulikov G.M., Carrera E., Plotnicova S.V. для расчета композитных пластин и оболочек с пьезоэлектрическими накладками предлагают гибридный смешанный четырехугольный конечный элемент с использованием метода отсчетных поверхностей. Искомые функциями срединной поверхности являются функции перемещений, температуры и электрических потенциалов. На первом этапе с помощью МКЭ вычисляются значения температуры, которые далее используются в качестве исходных данных для решения задачи термоупругости. При построении вычислительного алгоритма применяется функционал Ху-Вашицу с использованием полиномов Лагранжа. Демонстрируется результативность тестовых расчетов даже при грубых сетках.

Многослойные тонкостенные конструкции сложной геометрии исследуются на основе универсального конечного элемента Бережным Д.В., Фахрутдиновым Л.Р., Габитовой А.К., которые отмечают, что «для используемого при однослойном моделировании оболочечной конструкции конечного элемента вводятся изопараметрические аппроксимации геометрии и перемещений. Матрица жесткости вычисляется численно по квадратурной формуле Гаусса-Лежандра, в каждой квадратурной точке вводится статическая гипотеза, обычно используемая для оболочек средней толщины, об отсутствии влияния поперечного напряжения на мембранные, изгибные и деформации поперечного сдвига. Для устранения эффекта заклинивания предлагается использование метода двойной аппроксимации по точкам суперсходимости» [16]. Реализуется квадратичная аппроксимация по площади и линейная по толщине элемента. В качестве тестового примера представлен статически расчет гондолы легкомоторного самолета.

Для решения задачи термоупругости Zhao M. Ju., Cen S., Shang Ya., Li Ch. F. в своей работе [162] предлагают применять два класса элементов дискретизации. Двумерный четырехугольник с искомыми неизвестными в виде двух перемещений и температуры в каждом узле и объемный элемент, имеющий 8 узлов и 32 степени свободы (три перемещения и температура). Применяется изопараметрическая интерполяция и аналитические пробные функции. Численными примерами показана эффективность разработанных элементов при использовании грубых и искаженных сеток.

Из анализа выше процитированных работ следует, что отечественные и зарубежные ученые ведут активный поиск новых подходов, направленных на совершенствование конечноэлементных технологий применительно к решению широкого класса задач, в том числе строительной механики оболочек. Достигнуты значимые успехи в конечноэлементном анализе упругих оболочек различной геометрии и широкого спектра прикладываемых внешних нагрузок. В этой связи внимание исследователей смещается в сторону изучения процессов нелинейного деформирования оболочечных конструкций. Классическая

формулировка МКЭ в форме метода перемещений по-прежнему широко используется в конечноэлементном линейном и нелинейном анализах НДС оболочек. Однако, все большее распространение в работах, как отечественных, так и зарубежных исследователей получает смешанная формулировка МКЭ, обладающая несомненными преимуществами, такими как возможность одновременного получения в ходе решения сразу нескольких полей искомых параметров НДС, например, кинематических (перемещения и их производные) и силовых (напряжения, усилия и моменты). Смешанная формулировка МКЭ, как будет показано ниже в настоящей работе, позволяет значительно повысить точность конечноэлементных решений линейных и нелинейных задач строительной механики оболочек даже при относительно крупных сетках дискретизации исследуемого оболочечного объекта. При решении прикладных задач строительной механики оболочек, несомненно, более логичным видится применение цилиндрической, сферической и других типов криволинейных координат. Необходимым условием для корректного использования вышеупомянутых криволинейных систем координат в конечноэлементных расчетах оболочечных конструкций является возможность учета перемещения элемента дискретизации как твердого целого. Несмотря на то, что существуют разнообразные варианты решения данной проблемы [58. 108. 26-30, 8-14, 41-50], направленные в основном, на учет жестких смещений в явном виде, остается открытым вопрос о наиболее оптимальном варианте решения данной проблемы при реализации смешанной формулировке МКЭ в расчетах оболочечных конструкций.

В научной школе профессора Николаева А.П. для решения задач механики оболочек в линейной и нелинейной постановках были разработаны двумерные оболочечные элементы треугольной [65, 67, 69, 71, 72,] и четырехугольной [68, 70, 76] форм с различными наборами узловых неизвестных в формулировке метода перемещений. В рамках упомянутой школы также были разработаны трехмерные конечные элементы, как в формулировке метода перемещений [73, 131], так и в смешанной формулировке [35, 36]. Анализ упомянутых работ,

посвященных разработке трехмерных смешанных конечных элементов показывает, что в качестве искоемых прочностных параметров данных элементов используются компоненты тензора напряжений и компоненты вектора перемещений. В качестве функций формы принимаются трилинейные функции локальных координат. Матрица податливости компонуется путем минимизации смешанного функционала по узловым значениям напряжений и перемещений. В результате формируется матрица податливости, содержащая нулевой блок, наличие которого нежелательно, так как в ряде случаев может привести к плохой обусловленности глобальной матрицы податливости. Для решения проблемы учета жестких смещений в неявной форме для конечных элементов в формулировке метода перемещений разработана векторная форма интерполяционной процедуры [37, 39, 40, 66, 74, 75], а для элементов смешанного типа - тензорно-векторная интерполяция.

Для решения задач механики тонких оболочек целесообразней использовать двумерные оболочечные элементы в смешанной формулировке, которым пока уделяется еще недостаточное внимание исследователей. Кроме того, при разработке смешанных оболочечных двумерных элементов пристальное внимание следует уделять трехпольным элементам дискретизации, искомыми неизвестными которых выбираются кинематические (перемещения их производные), деформационные (деформации и искривления срединной поверхности) и силовые (продольные усилия и изгибающие моменты) прочностные параметры. При компоновке матрицы жесткости такого элемента дискретизации следует предусмотреть возможность исключения нулевого блока из структуры матрицы во избежание проблемы плохой обусловленности глобальной матрицы жесткости оболочечной конструкции. При разработке данного типа смешанного двумерного оболочечного элемента также необходимо использовать наряду с традиционной скалярной интерполяцией искоемых величин и тензорно-векторную форму интерполяционной процедуры.

Следовательно, становится возможным для решения задач механики тонких оболочек предложить новый вариант трехпольного смешанного двумерного

элемента дискретизации с тензорно-векторной формой интерполяционной процедуры для корректного и высокоточного расчета оболочечных конструкций различной геометрии в линейной и физически нелинейной постановках.

1.1. Выводы по первой главе

1. В настоящее время теория расчета оболочек в линейной и нелинейной постановках разработана достаточно подробно, однако при решении практических инженерных задач используются численные методы расчета в силу сложности и трудоемкости нахождения аналитических решений.

2. Среди множества численных методов расчета оболочек приоритетным методом следует признать МКЭ, который в основном находит свою реализацию в форме метода перемещений.

3. Смешанный вариант МКЭ выглядит наиболее оптимальным при решении задач численного анализа НДС конструкций из оболочек, так как предоставляет возможность непосредственного одновременного получения кинематических и силовых искомых параметров.

4. Для расчета конструкций в форме тонких оболочек целесообразно применять двумерные оболочечные элементы дискретизации в смешанной формулировке, так как размер матрицы жесткости двумерных элементов существенно меньше, чем у трехмерных элементов, а точность конечноэлементных решений остается достаточно высокой.

5. Для учета жестких смещений конечного элемента в неявном виде при разработке двумерного смешанного конечного элемента необходимо применять интерполяцию тензорных и векторных полей в случаях применения криволинейных координат.

6. При разработке алгоритма компоновки матрицы жесткости двумерного элемента дискретизации в смешанной формулировке необходимо предусмотреть возможность учета не только упругой, но и пластической стадии работы оболочечной конструкции.

ГЛАВА 2. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

2.1. Основные геометрические соотношения оболочек

Срединную поверхность тонкой оболочки можно задать радиус-вектором вида

$$\vec{R}^0 = x(\theta^1, \theta^2)\vec{i} + y(\theta^1, \theta^2)\vec{j} + z(\theta^1, \theta^2)\vec{k}, \quad (2.1)$$

где θ^1, θ^2 – криволинейные координаты, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орты прямоугольной декартовой системы координат.

Ковариантные векторы базиса в точке M^0 срединной поверхности оболочки определяются дифференцированием (2.1) по θ^α ($\alpha = 1, 2$)

$$\vec{a}_\alpha^0 = \vec{R}_{,\theta^\alpha}^0, \quad (2.2)$$

а орт нормали к соприкасающейся плоскости в точке M^0 векторным произведением

$$\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}_1^0 \times \vec{a}_2^0}{|\vec{a}_1^0 \times \vec{a}_2^0|}. \quad (2.3)$$

Для получения производных векторов базиса по криволинейным координатам можно воспользоваться деривационными формулами дифференциальной геометрии [19]

$$\vec{a}_{\alpha,\theta^\beta}^0 = \Gamma_{\alpha\beta}^{0\gamma} \vec{a}_\gamma^0 + b_{\alpha\beta}^0 \vec{a}^0; \quad \vec{a}_{,\theta^\beta}^0 = -b_\beta^{0\gamma} \vec{a}_\gamma^0, \quad (2.4)$$

где $\Gamma_{\alpha\beta}^{0\gamma}$ – символы Кристоффеля второго рода; $b_\beta^{0\gamma}$ – компоненты тензора кривизны; индексы β, γ последовательно принимают значения 1, 2.

Если в точке M^0 к соприкасающейся плоскости восстановить перпендикуляр и отложить на этом перпендикуляре в пределах толщины оболочки точку $M^{0\zeta}$ на расстоянии ζ от точки M^0 , то положение точки $M^{0\zeta}$ определится радиус-вектором

$$\vec{R}^{0\zeta} = \vec{R}^0 + \zeta \vec{a}^0. \quad (2.5)$$

Применив к (2.5) операцию дифференцирования по θ^α можно получить ковариантные векторы базиса в точке $M^{0\zeta}$

$$\vec{g}_\alpha^0 = \vec{R}_{,\theta\alpha}^{0\zeta}. \quad (2.6)$$

В результате приложения к оболочке внешней поверхностной нагрузки точки M^0 и $M^{0\zeta}$ займут новые положения M и M^ζ , определяемые радиусами $\vec{R}$ и $\vec{R}^\zeta$ соответственно

$$\vec{R} = \vec{R}^0 + \vec{v}; \quad \vec{R}^\zeta = \vec{R}^{0\zeta} + \vec{V}. \quad (2.7)$$

Входящий в формулу радиус-вектора $\vec{R}$ вектор перемещения точки M^0 представляется компонентами базиса $\vec{a}_\alpha^0, \vec{a}^0$

$$\vec{v} = v^\alpha \vec{a}_\alpha^0 + v \vec{a}^0. \quad (2.8)$$

Для определения вектора перемещения точки $M^{0\zeta}$ можно воспользоваться гипотезой прямой нормали, согласно которой вектор $\vec{V}$ будет равен

$$\vec{V} = \vec{v} + \zeta(\vec{a} - \vec{a}^0). \quad (2.9)$$

Входящие в (2.9) орт нормали в точке M деформированного состояния оболочки определится векторным произведением

$$\vec{a} = \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|}, \quad (2.10)$$

где

$$\vec{a}_\alpha = \vec{R}_{,\theta\alpha} = \vec{a}_\alpha^0 + \vec{v}_{,\theta\alpha}; \quad (2.11)$$

$$\vec{v}_{,\theta\alpha} = t_\alpha^\gamma \vec{a}_\gamma^0 + t_\alpha \vec{a}^0. \quad (2.12)$$

Здесь t_α^γ и t_α - компоненты производных вектора перемещения точки M^0 , отнесенные к локальному базису недеформированного состояния.

Ковариантные векторы базиса деформированного состояния оболочки определяется дифференцированием второй формулы (2.7) по θ^α

$$\vec{g}_\alpha = \vec{R}_{,\theta\alpha}^\zeta = \vec{g}_\alpha^0 + \vec{V}_{,\theta\alpha} \text{ или с учетом (2.9)}$$

$$\vec{g}_\alpha = \vec{g}_\alpha^0 + \vec{v}_{,\theta\alpha} + \zeta(\vec{a} - \vec{a}^0)_{,\theta\alpha}. \quad (2.13)$$

Для получения соотношений Коши можно взять формулу из механики сплошной среды [105]

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^\zeta = 0,5(g_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}^0), \quad (2.14)$$

где $\varepsilon_{\alpha\beta}^\zeta$ деформации оболочки в точке M^ζ .

Компоненты метрического тензора деформированного $g_{\alpha\beta}$ и исходного $g_{\alpha\beta}^0$ состояний, входящие в (2.14), определяются скалярными произведениями соответствующих векторов базиса (2.13) и (2.6)

Соотношения (2.14) могут быть представлены суммой

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{\zeta} = \varepsilon_{\alpha\beta} + \zeta \kappa_{\alpha\beta}, \quad (2.15)$$

где $\varepsilon_{\alpha\beta}$ – деформации, а $\kappa_{\alpha\beta}$ – искривления в точке M срединной поверхности оболочки.

2.2. Геометрические соотношения эллипсоидного типа оболочки

Выберем в качестве примера реализации основных геометрических соотношений, изложенных в 2.1 трехосный эллипсоид, уравнение которого в декартовой системе координат имеет вид [19]

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (2.16)$$

Использование (2.16) нецелесообразно, так как при дифференцировании радиус-вектора, скомпонованного на основе (2.16)

$$\vec{a}_{\alpha}^0 = \vec{R}_{,\theta\alpha}^0 = \left(x\vec{i} + y\vec{j} + \frac{c}{ab} \sqrt{a^2b^2 - b^2x^2 - a^2y^2} \right)_{,\theta\alpha} \quad (2.17)$$

возникает необходимость соблюдения условия

$$\sqrt{a^2b^2 - b^2x^2 - a^2y^2} \geq 0, \quad (2.18)$$

которое не позволяет рассчитывать эллипсоид в целом, как замкнутую оболочку.

С целью исключения отмеченного выше ограничения (2.18) предлагается использование формулы радиус-вектора, задающего поверхность трехосного эллипсоида в следующем виде

$$\vec{R}^0 = x \cdot \vec{i} + r(x) \cdot b \cdot \sin t \cdot \vec{j} + r(x) \cdot c \cdot \cos t \cdot \vec{k}, \quad (2.19)$$

где $r(x) = \sqrt{1 - (x/a)^2}$, t – параметр, отсчитываемый в плоскости, перпендикулярной оси OX от оси OZ против хода часовой стрелки (Рисунок 2.1)

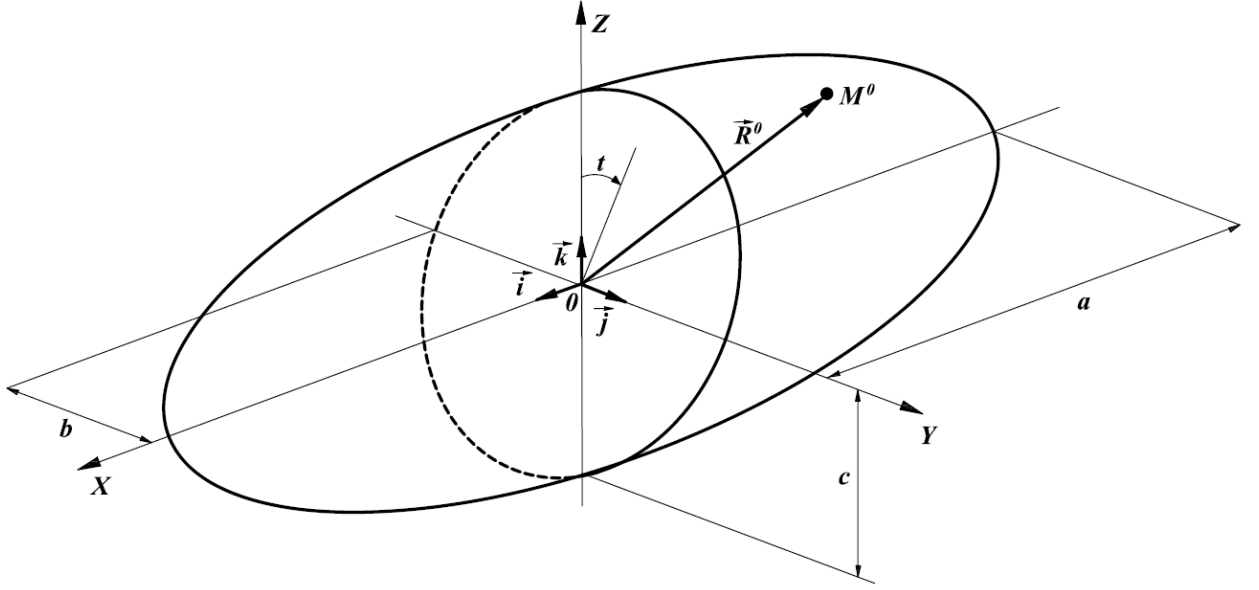


Рисунок 2.1 – Трехосный эллипсоид

Используя в качестве криволинейных координат θ^α осевую координату x и параметр t , дифференцированием (2.19) можно получить ковариантные векторы базиса точки M^0

$$\begin{aligned}\vec{a}_1^0 &= \vec{R}_{,x}^0 = \vec{i} + r_{,x}b \sin t \vec{j} + r_{,x}c \cos t \vec{k}; \\ \vec{a}_2^0 &= \vec{R}_{,t}^0 = r(x)b \cos t \vec{j} - r(x)c \sin t \vec{k}.\end{aligned}\quad (2.20)$$

Орт нормали в точке M^0 равен

$$\begin{aligned}\vec{a}^0 &= \frac{\vec{a}_1^0 \times \vec{a}_2^0}{|\vec{a}_1^0 \times \vec{a}_2^0|} = \\ &= (-r(x) \cdot r_{,x} \cdot b \cdot c \cdot \vec{i} + r(x)c \sin t \vec{j} + r(x)b \cos t \vec{k}) / \sqrt{a^0},\end{aligned}\quad (2.21)$$

где $a^0 = a_{11}^0 a_{22}^0 - (a_{12}^0)^2$; $a_{11}^0 = \vec{a}_1^0 \cdot \vec{a}_1^0 = 1 + r_{,x}^2(b^2 \sin^2 t + c^2 \cos^2 t)$;

$$a_{22}^0 = \vec{a}_2^0 \cdot \vec{a}_2^0 = r^2(x)(b^2 \cos^2 t + c^2 \sin^2 t) = r^2 \cdot \text{sum};$$

$$a_{12}^0 = \vec{a}_1^0 \cdot \vec{a}_2^0 = r(x) \cdot r_{,x} \cdot \sin 2t (b^2 - c^2) / 2.$$

Компоненты тензора кривизны $b_{\alpha\beta}^0$ могут быть вычислены по формуле

$$b_{\alpha\beta}^0 = \vec{R}_{,\theta^\alpha \theta^\beta}^0 \cdot \vec{a}^0 \text{ или с учетом (2.20), (2.21)}$$

$$b_{11}^0 = \vec{R}_{,xx}^0 \cdot \vec{a}^0 = b \cdot c \cdot r(x) \cdot \frac{r_{,xx}}{\sqrt{a^0}}; \quad b_{22}^0 = \vec{R}_{,tt}^0 \cdot \vec{a}^0 = -b \cdot c \cdot \frac{(r(x))^2}{\sqrt{a^0}};$$

$$b_{12}^0 = \vec{R}_{,xt}^0 \cdot \vec{a}^0 = 0. \quad (2.22)$$

Входящие в (2.4) символы Кристоффеля можно определить формулой [19]

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{0\gamma} = a^{0\gamma\rho} \Gamma_{\rho\alpha\beta}^0, \quad (2.23)$$

где $a^{0\gamma\rho}$ – контравариантные компоненты метрического тензора, а символы Кристоффеля первого рода вычисляются по формуле Борисенко А. И. [19]

$$\Gamma_{\rho\alpha\beta}^0 = \frac{(a_{\alpha\beta,\rho}^0 + a_{\alpha\rho,\beta}^0 - a_{\beta\rho,\alpha}^0)}{2}, \quad (2.24)$$

где $a_{11,t}^0 = r_{,x}^2 \sin 2t (b^2 - c^2)$; $a_{22,t}^0 = r^2(x) \cdot \sin 2t (c^2 - b^2)$;

$a_{12,t}^0 = r(x) \cdot r_{,x} \cdot \cos 2t (b^2 - c^2)$; $a_{11,x}^0 = 2 \cdot r_{,x} \cdot r_{,xx} \cdot (b^2 \sin^2 t + c^2 \cos^2 t)$;

$a_{22,x}^0 = 2 \cdot r(x) \cdot r_{,x} \cdot \sin 2t$; $a_{12,x}^0 = (r_{,x}^2 + r(x) \cdot r_{,xx}) \cdot \sin 2t (b^2 - c^2) / 2$.

Опуская некоторые промежуточные математические выкладки соотношения (2.15) можно записать в следующем виде

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = (\vec{a}_\alpha^0 \cdot \vec{v}_{,\beta} + \vec{v}_{,\alpha} \cdot \vec{a}_\beta^0) / 2; \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \kappa_{\alpha\beta} = & (\vec{v}_{,\alpha} \cdot \vec{a}_{,\beta}^0 + \vec{v}_{,\beta} \cdot \vec{a}_{,\alpha}^0 + \vec{a}_\alpha^0 \cdot \vec{a}_{,\beta} + \vec{a}_\beta^0 \cdot \vec{a}_{,\alpha} + \\ & + \vec{a}_\alpha^0 \cdot b_\beta^{0\rho} \cdot \vec{a}_\rho^0 + \vec{a}_\beta^0 \cdot b_\alpha^{0\rho} \cdot \vec{a}_\rho^0) / 2. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Входящие в (2.26) производные орта нормали к срединной поверхности в деформированном состоянии могут быть получены дифференцированием (2.10) по криволинейным координатам θ^α ($\theta^1 = x$, $\theta^2 = t$)

$$\vec{a}_{,\alpha} = (\vec{a}_{1,\alpha} \times \vec{a}_2 + \vec{a}_1 \times \vec{a}_{2,\alpha}) / |\vec{a}_1 \times \vec{a}_2| + (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \cdot (1 / |\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|)_{,\alpha}. \quad (2.27)$$

Модуль векторного произведения $|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|$ можно записать в виде

$$|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2| = \sqrt{a} = \sqrt{a_{11}a_{22} - (a_{12})^2}. \quad (2.28)$$

Подкоренное выражение (2.28) можно представить функцией деформаций срединной поверхности

$$\begin{aligned} a_{11}a_{22} - (a_{12})^2 &= (2\varepsilon_{11} + a_{11}^0)(2\varepsilon_{22} + a_{22}^0) - (2\varepsilon_{12} + a_{12}^0)^2 = \\ &= 4\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + 2\varepsilon_{11}a_{22}^0 + 2a_{11}^0\varepsilon_{22} + a_{11}^0a_{22}^0 - 4(\varepsilon_{12})^2 - 4\varepsilon_{12}a_{12}^0 - (a_{12}^0)^2. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Пренебрегая нелинейными слагаемыми, можно записать следующее выражение

$$a_{11}a_{22} - (a_{12})^2 = 2(\varepsilon_{11}a_{22}^0 + \varepsilon_{22}a_{11}^0 - 2\varepsilon_{12}a_{12}^0) + a^0. \quad (2.30)$$

Входящие в (2.30) ковариантные компоненты метрического тензора $a_{\alpha\beta}^0$ могут быть заменены их контравариантными компонентами

$$a_{22}^0 = a^{011} \cdot a^0; a_{11}^0 = a^{022} \cdot a^0; a_{12}^0 = -a^{012} \cdot a^0. \quad (2.31)$$

Соотношение (2.30) с учетом (2.31) можно представить в виде

$$\begin{aligned} a_{11}a_{22} - (a_{12})^2 &= 2a^0(\varepsilon_{11}a^{011} + \varepsilon_{22}a^{022} + 2\varepsilon_{12}a^{012}) + a^0 = \\ &= a^0(2\varepsilon_\gamma^\gamma + 1). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Входящее в структуру (2.27) выражение $(1/\sqrt{a})$ при учете (2.32) и использовании приближенных формул $\sqrt[m]{1+d} \approx 1 + \frac{d}{m}$, $\frac{1}{1+d} \approx 1 - d$, может быть представлено в виде

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a^0(1 + 2\varepsilon_\rho^\rho)}} \approx \frac{1}{\sqrt{a^0}(1 + \varepsilon_\rho^\rho)} \approx \frac{1}{\sqrt{a^0}} \cdot (1 - \varepsilon_\rho^\rho). \quad (2.33)$$

Соотношение (2.33) является более удобным при выполнении операции дифференцирования по криволинейным координатам

$$\begin{aligned} (1/\sqrt{a})_{,\alpha} &= (1/\sqrt{a^0})_{,\alpha}(1 - \varepsilon_\rho^\rho) + (1/\sqrt{a^0})(-\varepsilon_\rho^\rho)_{,\alpha} = \\ &= -\frac{1}{2}(a^0)^{-3/2}a_{,\alpha}^0(1 - \varepsilon_\rho^\rho) - (\varepsilon_\rho^\rho)_{,\alpha}/\sqrt{a^0}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Соотношение (2.34) используется для получения выражений для производных орта нормали деформированного состояния оболочки (2.27).

2.3. Геометрические соотношения эллиптического цилиндра в

единичном базисе

Радиус-вектор (2.19) эллиптического цилиндра можно задать формулой

$$\vec{R}^0 = x \cdot \vec{i} + b \cdot \sin t \cdot \vec{j} + c \cdot \cos t \cdot \vec{k}, \quad (2.35)$$

Орты локального базиса точки M^0 срединной поверхности эллиптического цилиндра определяются по формулам

$$\begin{aligned} \vec{e}_1^0 &= \vec{R}_{,x}^0 = \vec{i}; \quad \vec{e}_2^0 = \vec{R}_{,t}^0 \frac{dt}{dS_2} = (b \cdot \cos t \cdot \vec{j} - c \cdot \sin t \cdot \vec{k}) \frac{dt}{dS_2}; \\ \vec{e}_n^0 &= \vec{e}_1^0 \times \vec{e}_2^0 = (c \cdot \sin t \cdot \vec{j} + b \cdot \cos t \cdot \vec{k}) \frac{dt}{dS_2}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

где $\frac{dt}{dS_2} = \frac{1}{\sqrt{b^2 \cos^2 t + c^2 \sin^2 t}} = \frac{1}{sum}$.

Дифференцируя (2.36) по x и дуге поперечного сечения S_2 можно получить производные ортов локального базиса

$$\begin{aligned} \vec{e}_{1,x}^0 &= 0; \vec{e}_{2,x}^0 = 0; \vec{e}_{n,x}^0 = 0; \vec{e}_{1,2}^0 = 0; \vec{e}_{2,2}^0 = \vec{e}_{2,t}^0 \cdot \frac{dt}{dS_2} = n_{23} \vec{e}_2^0; \\ \vec{e}_{n,2}^0 &= \vec{e}_{n,t}^0 \cdot \frac{dt}{dS_2} = n_{32} \vec{e}_2^0, \end{aligned} \quad (2.37)$$

где $n_{23} = -b \cdot c / (sum)^{3/2}$; $n_{32} = -n_{23}$.

Векторы базиса точки $M^{0\zeta}$ определяются дифференцированием радиус-вектора $\vec{R}^{0\zeta}$ по x и S_2

$$\begin{aligned} \vec{g}_1^0 &= \vec{R}_{,x}^{0\zeta} = (\vec{R}^0 + \zeta \vec{e}_n^0)_{,x} = \vec{e}_1^0; \vec{g}_2^0 = \vec{R}_{,2}^{0\zeta} = (\vec{R}^0 + \zeta \vec{e}_n^0)_{,2} = \\ &= \vec{e}_2^0 + \zeta n_{32} \vec{e}_2^0 = \vec{e}_2^0 (1 + \zeta n_{32}). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Радиус-вектор точки M^ζ деформированного состояния эллиптического цилиндра определяется выражением

$$\vec{R}^\zeta = \vec{R}^{0\zeta} + \vec{V} = \vec{R}^{0\zeta} + \vec{v} + \zeta(\vec{e}_n - \vec{e}_n^0). \quad (2.39)$$

Векторы базиса точки M^ζ деформированного состояния эллиптического цилиндра могут быть получены дифференцированием (2.39) по x и S_2

$$\vec{g}_1 = \vec{R}_{,x}^\zeta = \vec{g}_1^0 + \vec{v}_{,x} + \zeta(\vec{e}_n - \vec{e}_n^0)_{,x}; \vec{g}_2 = \vec{R}_{,2}^\zeta = \vec{g}_2^0 + \vec{v}_{,2} + \zeta(\vec{e}_n - \vec{e}_n^0)_{,2}, \quad (2.40)$$

где

$$\vec{e}_n = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 / |\vec{e}_1 \times \vec{e}_2|. \quad (2.41)$$

Входящие в (2.41) векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ определяются по формулам

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \vec{R}_{,x} = (\vec{R}^0 + \vec{v})_{,x} = \vec{e}_1^0 + t_1^1 \vec{e}_1^0 + t_1^2 \vec{e}_2^0 + t_1 \vec{e}_n^0; \\ \vec{e}_2 &= \vec{R}_{,2} = (\vec{R}^0 + \vec{v})_{,2} = \vec{e}_2^0 + t_2^1 \vec{e}_1^0 + t_2^2 \vec{e}_2^0 + t_2 \vec{e}_n^0. \end{aligned}$$

Тогда векторное произведение $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2$ примет вид

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_n^0 (1 + t_1^1)(1 + t_2^2) - \vec{e}_2^0 t_2 (1 + t_1^1) - \vec{e}_1^0 t_1 (1 + t_2^2)$$

или пренебрегая нелинейными слагаемыми

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_1^0 (-t_1) + \vec{e}_2^0 (-t_2) + \vec{e}_n^0 (1 + t_1^1 + t_2^2). \quad (2.42)$$

Модуль векторного произведения $|\vec{e}_1 \times \vec{e}_2|$ определяется выражением

$$|\vec{e}_1 \times \vec{e}_2| = \sqrt{(-t_1)^2 + (-t_2)^2 + (1 + t_1^1 + t_2^2)^2} \quad (2.43)$$

или при отбрасывании нелинейных слагаемых

$$|\vec{e}_1 \times \vec{e}_2| = \sqrt{1 + 2t_1^1 + 2t_2^2}. \quad (2.44)$$

Используя приближенные формулы

$$\sqrt[n]{1+a} \approx 1 + \frac{a}{n}; \quad \frac{1}{1+a} \approx 1 - a \quad (2.45)$$

(a – малая по сравнению с единицей величина) орт нормали к срединной поверхности в деформированном состоянии с учетом (2.42) и (2.43) может представлен следующим выражением

$$\vec{e}_n = (\vec{e}_1^0(-t_1) + \vec{e}_2^0(-t_2) + \vec{e}_n^0(1 + t_1^1 + t_2^2))(1 - t_1^1 - t_2^2)$$

или пренебрегая нелинейными слагаемыми

$$\vec{e}_n = \vec{e}_1^0(-t_1) + \vec{e}_2^0(-t_2) + \vec{e}_n^0. \quad (2.46)$$

Известное соотношение из механики сплошной среды может быть привлечено для нахождения деформаций в точке M^ζ оболочки [105]

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^\zeta = (g_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}^0)/2 \quad (2.47)$$

или в развернутом виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^\zeta &= \vec{e}_1^0 \cdot \vec{V}_{,x} = t_1^1 + \zeta(-t_1)_{,x}; \\ \varepsilon_{22}^\zeta &= \vec{e}_2^0 \cdot (1 + \zeta n_{32}) \cdot \vec{V}_{,2} = t_2^2 + \zeta((-t_2)_{,2} + n_{32}t_2^2); \\ 2\varepsilon_{12}^\zeta &= t_2^1 + t_1^2 + \zeta((-t_1)_{,2} + (-t_2)_{,x} + n_{32}t_1^2), \end{aligned} \quad (2.48)$$

где $(-t_1)_{,x} = -v_{,xx}$; $(-t_2)_{,2} = -v_{,22} - v_{,2}^2 n_{32} + v^2 n_{23,2}$;

$$(-t_1)_{,2} = -v_{,x2}; \quad (-t_2)_{,x} = -v_{,2x} - v_{,x}^2 n_{23}.$$

Соотношения (2.48) могут быть представлены в виде сумм

$$\varepsilon_{11}^\zeta = \varepsilon_{11} + \zeta \kappa_{11}; \quad \varepsilon_{22}^\zeta = \varepsilon_{22} + \zeta \kappa_{22}; \quad 2\varepsilon_{12}^\zeta = 2\varepsilon_{12} + \zeta 2\kappa_{12}, \quad (2.49)$$

где $\varepsilon_{11} = t_1^1$; $\varepsilon_{22} = t_2^2$; $2\varepsilon_{12} = t_2^1 + t_1^2$; $\kappa_{11} = (-t_1)_{,x}$;

$$\kappa_{22} = (-t_2)_{,2} + n_{32}t_2^2; \quad 2\kappa_{12} = (-t_1)_{,2} + (-t_2)_{,x} + n_{32}t_1^2.$$

2.4. Физические соотношения тонких упругих оболочек

Закон Гука для тонких оболочек может быть сформулирован на основе соотношений механики сплошных сред [105]

$$\sigma^{\alpha\beta} = \lambda P_\varepsilon g^{\alpha\beta} + 2\mu g^{\alpha\gamma} g^{\beta\rho} \varepsilon_{\gamma\rho}^\zeta, \quad (2.50)$$

где $P_\varepsilon = g^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}^\zeta$ – первый инвариант тензора деформаций.

В развернутом виде физические соотношения примут вид

$$\begin{aligned} \sigma^{11} &= \lambda(g^{11}\varepsilon_{11}^\zeta + g^{22}\varepsilon_{22}^\zeta + g^{12}2\varepsilon_{12}^\zeta + g^{33}\varepsilon_{33}^\zeta)g^{11} + \\ &+ 2\mu(g^{11}g^{11}\varepsilon_{11}^\zeta + g^{12}g^{12}\varepsilon_{22}^\zeta + 2g^{11}g^{12}\varepsilon_{12}^\zeta) = g^{11}g^{11}(\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11}^\zeta + \\ &+ (\lambda g^{11}g^{22} + 2\mu g^{12}g^{12})\varepsilon_{22}^\zeta + (\lambda g^{11}g^{12} + 2\mu g^{11}g^{12})2\varepsilon_{12}^\zeta + \lambda g^{11}g^{33}\varepsilon_{33}^\zeta; \\ \sigma^{22} &= \lambda(g^{11}\varepsilon_{11}^\zeta + g^{22}\varepsilon_{22}^\zeta + g^{12}2\varepsilon_{12}^\zeta + g^{33}\varepsilon_{33}^\zeta)g^{22} + \\ &+ 2\mu(g^{21}g^{21}\varepsilon_{11}^\zeta + g^{22}g^{22}\varepsilon_{22}^\zeta + 2g^{21}g^{22}\varepsilon_{12}^\zeta) = (\lambda g^{11}g^{22} + 2\mu g^{21}g^{21})\varepsilon_{11}^\zeta + \\ &+ (\lambda + 2\mu)g^{22}g^{22}\varepsilon_{22}^\zeta + (\lambda + 2\mu)g^{12}g^{22}2\varepsilon_{12}^\zeta + \lambda g^{22}g^{33}\varepsilon_{33}^\zeta; \\ \sigma^{12} &= \lambda(g^{11}\varepsilon_{11}^\zeta + g^{22}\varepsilon_{22}^\zeta + g^{12}2\varepsilon_{12}^\zeta + g^{33}\varepsilon_{33}^\zeta)g^{12} + \\ &+ 2\mu(g^{11}g^{21}\varepsilon_{11}^\zeta + g^{12}g^{22}\varepsilon_{22}^\zeta + (g^{11}g^{22} + g^{12}g^{21})\varepsilon_{12}^\zeta) = \\ &= (\lambda + 2\mu)g^{11}g^{12}\varepsilon_{11}^\zeta + (\lambda + 2\mu)g^{12}g^{22}2\varepsilon_{22}^\zeta + \\ &+ (\lambda g^{12}g^{12} + \mu(g^{11}g^{22} + g^{12}g^{21}))2\varepsilon_{12}^\zeta + \lambda g^{12}g^{33}\varepsilon_{33}^\zeta. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Входящая в (2.51) деформация ε_{33}^ζ может быть представлена функцией нормальных и касательной деформаций исходя из допущения о равенстве нулю нормального напряжения в направлении, перпендикулярном срединной поверхности тонкой оболочки

$$\sigma^{33} = \lambda(g^{11}\varepsilon_{11}^\zeta + g^{22}\varepsilon_{22}^\zeta + g^{12}2\varepsilon_{12}^\zeta + g^{33}\varepsilon_{33}^\zeta)g^{33} + 2\mu g^{33}g^{33}\varepsilon_{33}^\zeta = 0. \quad (2.52)$$

Из (2.52) можно получить следующее выражение

$$\varepsilon_{33}^\zeta = \frac{-\lambda g^{11}g^{33}\varepsilon_{11}^\zeta - \lambda g^{22}g^{33}\varepsilon_{22}^\zeta - \lambda g^{12}g^{33}2\varepsilon_{12}^\zeta}{(\lambda - 2\mu)g^{33}g^{33}}. \quad (2.53)$$

В результате подстановки (2.53) в (2.51) может быть скомпоновано следующее матричное соотношение

$$\left\{ \sigma^{\alpha\beta} \right\}_{3 \times 1} = [C_\sigma]_{3 \times 3} \left\{ \varepsilon_{\alpha\beta}^\zeta \right\}_{3 \times 1}, \quad (2.54)$$

$$\text{где } \left\{ \sigma^{\alpha\beta} \right\}_{1 \times 3}^T = \{ \sigma^{11} \sigma^{22} \sigma^{12} \}; \left\{ \varepsilon_{\alpha\beta}^\zeta \right\}_{1 \times 3}^T = \{ \varepsilon_{11}^\zeta \varepsilon_{22}^\zeta 2\varepsilon_{12}^\zeta \}.$$

Элементы, входящие в (2.54) матрицы упругости $[C_\sigma]_{3 \times 3}$, имеют следующую структуру

$$\begin{aligned} C_{\sigma_{11}} &= g^{11} g^{11} (\lambda + 2\mu) - \lambda^2 g^{11} g^{11} / (\lambda + 2\mu); \\ C_{\sigma_{12}} &= \lambda g^{11} g^{22} + 2\mu g^{12} g^{12} - \lambda^2 g^{22} g^{11} / (\lambda + 2\mu); \\ C_{\sigma_{13}} &= g^{11} g^{12} (\lambda + 2\mu) - \lambda^2 g^{11} g^{12} / (\lambda + 2\mu); \\ C_{\sigma_{21}} &= C_{\sigma_{12}}; C_{\sigma_{22}} = g^{22} g^{22} (\lambda + 2\mu) - \lambda^2 g^{22} g^{22} / (\lambda + 2\mu); \\ C_{\sigma_{23}} &= g^{12} g^{22} (\lambda + 2\mu) - \lambda^2 g^{22} g^{12} / (\lambda + 2\mu); C_{\sigma_{31}} = C_{\sigma_{13}}; C_{\sigma_{32}} = C_{\sigma_{23}}; \\ C_{\sigma_{33}} &= g^{12} g^{12} (\lambda + 2\mu) + \mu g^{11} g^{22} - \lambda^2 g^{12} g^{12} / (\lambda + 2\mu). \end{aligned} \quad (2.55)$$

2.5. Геометрические и физические соотношения для оболочек вращения

При расчете тонких оболочек, которые относятся к классу оболочек вращения, можно воспользоваться соотношениями тонких оболочек, изложенными в монографии академика Новожилова В.В. [89]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial v^1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} v^2 + \frac{v}{R_1}; \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} v^1 + \frac{1}{A_2} \frac{\partial v^2}{\partial \alpha_2} + \frac{v}{R_2}; \\ \varepsilon_{12} &= \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{v^1}{A_1} \right) + \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{v^2}{A_2} \right); \\ \kappa_{11} &= -\frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial v}{\partial \alpha_1} - \frac{v^1}{R_1} \right) - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial v}{\partial \alpha_2} - \frac{v^2}{R_2} \right); \\ \kappa_{22} &= -\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial v}{\partial \alpha_2} - \frac{v^2}{R_2} \right) - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial v}{\partial \alpha_1} - \frac{v^1}{R_1} \right); \\ \kappa_{12} &= -\frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \frac{\partial v}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{\partial v}{\partial \alpha_2} \right) + \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{R_1} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial v^1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} v^1 \right) + \frac{1}{R_2} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial v^2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} v^2 \right), \quad (2.56)$$

где α_1, α_2 – криволинейные координаты; R_1, R_2 – радиусы главных кривизн.

Выбирая в качестве криволинейных координат для оболочки вращения длину дуги меридиана $\alpha_1 = S$ и окружной угол $\alpha_2 = \theta$, параметры A_1 и A_2 следует принять равными $A_1 = 1$, $A_2 = r(x)$ – радиус вращения. С учетом вышеизложенного соотношения (2.56) для оболочки вращения примут вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= v_{,s}^1 + \frac{v}{R_1}; \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{r(x)} \cdot r_{,s} v^1 + \frac{1}{r(x)} \cdot v_{,\theta}^2 + \frac{v}{R_2}; \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{r(x)} \cdot v_{,\theta}^1 + r(x) \left(\frac{v_{,s}^2 \cdot r(x) - v^2 \cdot r_{,s}}{r^2(x)} \right); \\ \kappa_{11} &= -v_{,ss} + \left(\frac{v_{,s}^1 \cdot R_1 - v^1 \cdot R_{1,s}}{R_1^2} \right); \\ \kappa_{22} &= -\frac{1}{r^2(x)} \cdot v_{,\theta\theta} + \frac{1}{r(x)} \left(\frac{v_{,\theta}^2 \cdot R_2 - v^2 \cdot R_{2,\theta}}{R_2^2} \right) - \frac{1}{r(x)} \cdot r_{,s} \left(v_{,s} - \frac{v^1}{R_1} \right); \\ \kappa_{12} &= -\frac{1}{r(x)} \cdot \left(v_{,s\theta} - \frac{1}{r(x)} \cdot r_{,s} \cdot v_{,\theta} \right) + \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{r(x)} \cdot v_{,\theta}^1 + \\ &\quad + \frac{1}{R_2} \left(v_{,s}^2 - \frac{1}{r(x)} \cdot r_{,s} v^2 \right). \end{aligned} \quad (2.57)$$

Физические соотношения для оболочки вращения согласно [89] имеют следующий вид

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E}{1-\nu^2} \cdot (\varepsilon_{11}^\zeta + \nu \varepsilon_{22}^\zeta); \quad \sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot (\varepsilon_{22}^\zeta + \nu \varepsilon_{11}^\zeta); \\ \sigma_{12} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \cdot \varepsilon_{12}^\zeta, \end{aligned} \quad (2.58)$$

где $\varepsilon_{11}^\zeta = \varepsilon_{11} + \zeta \kappa_{11}$; $\varepsilon_{22}^\zeta = \varepsilon_{22} + \zeta \kappa_{22}$; $\varepsilon_{12}^\zeta = \varepsilon_{12} + 2\zeta \kappa_{12}$; E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона.

Очевидно, что по формулам (2.58) вычисляются «физические» значения напряжений, так как в процессе вывода соотношений (2.56) используется ортонормированный базис.

«Физические» значения продольных сил, изгибающих и крутящего моментов могут быть вычислены по формулам [89]

$$\begin{aligned} T_{11} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}); \quad T_{22} = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11}); \quad T_{12} = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \varepsilon_{12}; \\ M_{11} &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\kappa_{11} + \nu\kappa_{22}); \quad M_{22} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\kappa_{22} + \nu\kappa_{11}); \\ M_{12} &= \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \kappa_{12}, \end{aligned} \quad (2.59)$$

где h - толщина оболочки.

Соотношения (2.59) могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} (\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}) &= \frac{1-\nu^2}{Eh} T_{11}; \quad (\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11}) = \frac{1-\nu^2}{Eh} T_{22}; \\ \varepsilon_{12} &= \frac{2(1+\nu)}{Eh} T_{12}; \quad (\kappa_{11} + \nu\kappa_{22}) = \frac{12(1-\nu^2)}{Eh^3} M_{11}; \\ (\kappa_{22} + \nu\kappa_{11}) &= \frac{12(1-\nu^2)}{Eh^3} M_{22}; \quad \kappa_{12} = \frac{12(1+\nu)}{Eh^3} M_{12}. \end{aligned} \quad (2.60)$$

В результате подстановки (2.60) в (2.58) можно выразить напряжения через продольные усилия и моменты

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{T_{11}}{h} + \zeta \frac{12}{h^3} M_{11}; \quad \sigma_{22} = \frac{T_{22}}{h} + \zeta \frac{12}{h^3} M_{22}; \\ \sigma_{12} &= \frac{T_{12}}{h} + \zeta \frac{12}{h^3} M_{12}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

2.6. Выводы по второй главе

1. Получены основные соотношения тонких оболочек произвольной геометрии на основе гипотезы Кирхгофа-Лява.
2. Для тонких оболочек эллипсоидального типа на основе предложенных вариантов параметризации срединной поверхности получены соотношения Коши, не имеющие областей неопределенности и позволяющие без принципиальных затруднений выполнять расчёт оболочек замкнутого профиля.

ГЛАВА 3. РАСЧЁТ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК В СМЕШАННОЙ ФОРМУЛИРОВКЕ МКЭ

3.1. Четырехузловой элемент дискретизации с силовыми и кинематическими узловыми неизвестными

Срединная поверхность оболочки моделируется совокупностью четырехузловых элементов дискретизации (ЧЭД), взаимодействующих между собой в узлах i, j, k, l , находящихся в вершинах криволинейных четырехугольников (Рисунок 3.1 а).

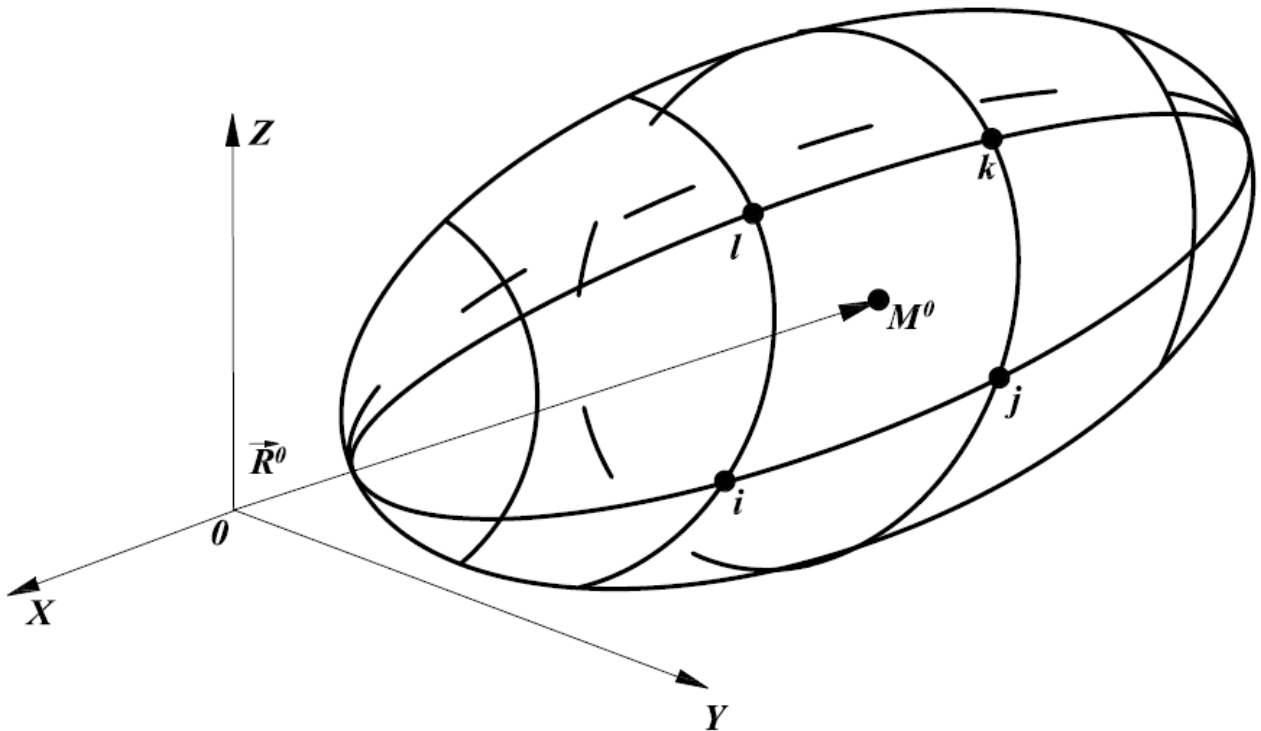


Рисунок 3.1 а – Четырехузловой элемент дискретизации конечно-элементной модели тонкой оболочки в глобальной системе координат

С целью организации численного интегрирования по площади элемента с привлечением квадратуры Гаусса оболочечный ЧЭД отображается на квадрат с локальной системой координат $-1 \leq \xi, \eta \leq 1$ (Рисунок 3.1 б).

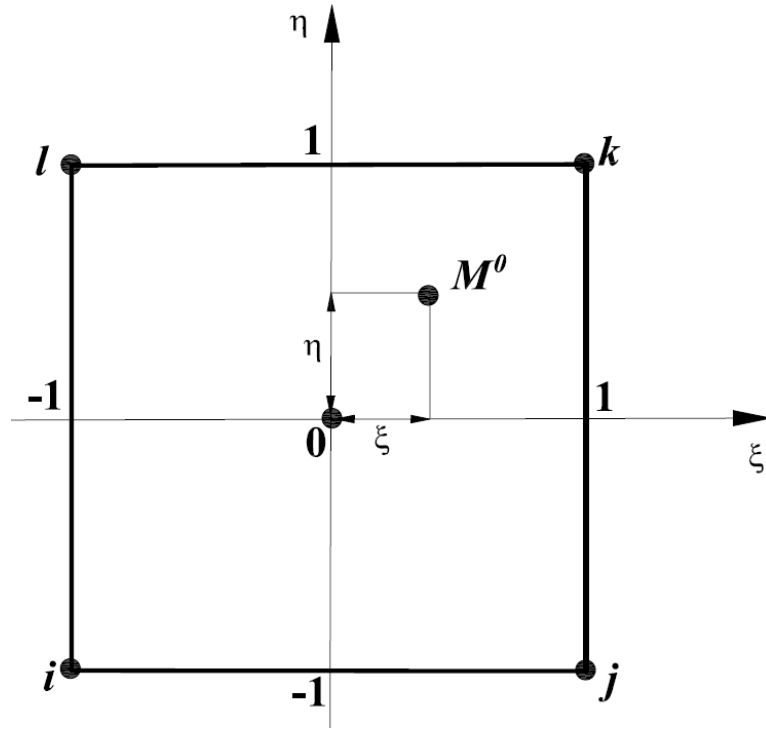


Рисунок 3.1 б – Четырехузловой элемент дискретизации конечно-элементной модели тонкой оболочки в локальной системе координат

Глобальные криволинейные координаты θ^α точки M^0 срединной поверхности тонкой оболочки выражаются через локальные координаты ξ, η посредством билинейных зависимостей

$$\begin{aligned} \theta^\alpha = & \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{2} \theta^{\alpha i} + \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{2} \theta^{\alpha j} + \\ & + \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{2} \theta^{\alpha k} + \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{2} \theta^{\alpha l}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Применяя к (3.1) процедуру дифференцирования по ξ и η можно получить производные глобальных криволинейных координат по локальным координатам

$$\begin{aligned} \theta_{,\xi}^\alpha = & -\frac{1}{2} \frac{(1-\eta)}{2} \theta^{\alpha i} + \frac{1}{2} \frac{(1-\eta)}{2} \theta^{\alpha j} + \frac{1}{2} \frac{(1+\eta)}{2} \theta^{\alpha k} - \frac{1}{2} \frac{(1+\eta)}{2} \theta^{\alpha l}; \\ \theta_{,\eta}^\alpha = & -\frac{1}{2} \frac{(1-\xi)}{2} \theta^{\alpha i} - \frac{1}{2} \frac{(1+\xi)}{2} \theta^{\alpha j} + \frac{1}{2} \frac{(1+\xi)}{2} \theta^{\alpha k} + \frac{1}{2} \frac{(1-\xi)}{2} \theta^{\alpha l}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Из (3.1) можно найти обратные зависимости

$$\xi = f_1(\theta^1, \theta^2); \quad \eta = f_2(\theta^1, \theta^2) \quad (3.3)$$

и производные локальных координат ξ, η по глобальным криволинейным координатам

$$\xi_{,\theta^\alpha} = \frac{\partial f_1(\theta^1, \theta^2)}{\partial \theta^\alpha}; \quad \eta_{,\theta^\alpha} = \frac{\partial f_2(\theta^1, \theta^2)}{\partial \theta^\alpha}. \quad (3.4)$$

Кинематическими узловыми неизвестными выбранного ЧЭД принимаются тангенциальные и нормальное перемещения, а также частные производные первого порядка этих перемещений, которые в локальной ξ, η и глобальной θ^α системах координат могут быть записаны в виде матриц-строк следующим образом

$$\{U^L\}_{1 \times 36}^T = \left\{ \{v^{1L}\}_{1 \times 12}^T \{v^{2L}\}_{1 \times 12}^T \{v^L\}_{1 \times 12}^T \right\}; \quad (3.5)$$

$$\{U^G\}_{1 \times 36}^T = \left\{ \{v^{1G}\}_{1 \times 12}^T \{v^{2G}\}_{1 \times 12}^T \{v^G\}_{1 \times 12}^T \right\}; \quad (3.6)$$

где $\{q^L\}_{1 \times 12}^T = \{q^i q^j q^k q^l q_{,\xi}^i q_{,\xi}^j q_{,\xi}^k q_{,\xi}^l q_{,\eta}^i q_{,\eta}^j q_{,\eta}^k q_{,\eta}^l\};$

$$\{q^G\}_{1 \times 12}^T = \{q^i q^j q^k q^l q_{,\theta^1}^i q_{,\theta^1}^j q_{,\theta^1}^k q_{,\theta^1}^l q_{,\theta^2}^i q_{,\theta^2}^j q_{,\theta^2}^k q_{,\theta^2}^l\}.$$

Здесь под q понимается компонента вектора перемещения v^1, v^2, v .

Между $\{q^L\}_{12 \times 1}$ и $\{q^G\}_{12 \times 1}$ на основании (3.2) можно скомпоновать следующую

матричную зависимость

$$\{q^L\}_{12 \times 1} = [P_r]_{12 \times 12} \{q^G\}_{12 \times 1}; \quad (3.7)$$

В качестве силовых узловых неизвестных четырехузлового элемента дискретизации принимаются продольные силы, изгибающие и крутящий моменты. Столбцы узловых значений продольных сил и моментов будут иметь следующий вид

$$\{N\}_{1 \times 12}^T = \{N^{11i} N^{11j} N^{11k} N^{11l} N^{22i} N^{22j} N^{22k} N^{22l} N^{12i} N^{12j} N^{12k} N^{12l}\}; \quad (3.9)$$

$$\{M\}_{1 \times 12}^T = \{M^{11i} M^{11j} M^{11k} M^{11l} M^{22i} M^{22j} M^{22k} M^{22l} M^{12i} M^{12j} M^{12k} M^{12l}\}; \quad (3.10)$$

$$[P_r]_{12 \times 12} =$$

1											
	1										
		1									
			1								
				$(\theta_{,\xi}^1)^i$				$(\theta_{,\xi}^2)^i$			
					$(\theta_{,\xi}^1)^j$				$(\theta_{,\xi}^2)^j$		
						$(\theta_{,\xi}^1)^k$				$(\theta_{,\xi}^2)^k$	
							$(\theta_{,\xi}^1)^l$				$(\theta_{,\xi}^2)^l$
				$(\theta_{,\eta}^1)^i$				$(\theta_{,\eta}^2)^i$			
					$(\theta_{,\eta}^1)^j$				$(\theta_{,\eta}^2)^j$		
						$(\theta_{,\eta}^1)^k$				$(\theta_{,\eta}^2)^k$	
							$(\theta_{,\eta}^1)^l$				$(\theta_{,\eta}^2)^l$

. (3.8)

Интерполяционная процедура для кинематических неизвестных осуществляется посредством использования произведений полиномов Эрмита третьей степени [64]

$$q = \{\varphi\}_{1 \times 12}^T \{q^L\}_{12 \times 1}, \quad (3.11)$$

а для интерполирования продольных сил и моментов применяются билинейные функции, входящие в структуру (3.1)

$$N^{\alpha\beta} = \{\psi\}_{1 \times 4}^T \{N^{\alpha\beta}\}_{4 \times 1}; \quad M^{\alpha\beta} = \{\psi\}_{1 \times 4}^T \{M^{\alpha\beta}\}_{4 \times 1}, \quad (3.12)$$

где $\{N^{\alpha\beta}\}_{1 \times 4}^T = \{N^{\alpha\beta i} N^{\alpha\beta j} N^{\alpha\beta k} N^{\alpha\beta l}\}$; $\{M^{\alpha\beta}\}_{1 \times 4}^T = \{M^{\alpha\beta i} M^{\alpha\beta j} M^{\alpha\beta k} M^{\alpha\beta l}\}$;

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{2} \frac{(1-\eta)}{2}; \quad \psi_2 = \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{2} \frac{(1-\eta)}{2}; \\ \psi_3 &= \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{2} \frac{(1+\eta)}{2}; \quad \psi_4 = \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{2} \frac{(1+\eta)}{2}. \end{aligned}$$

3.2. Смешанный функционал Рейсснера

для четырехузлового элемента дискретизации

Смешанный функционал Рейсснера может быть скомпонован исходя из положения, что удельная энергия деформации деформируемого твердого тела может быть представлена в виде разности между полной энергией деформации и дополнительной энергией деформации [101]

$$\Phi_S = \int_V \{\sigma^{\alpha\beta}\}_{1 \times 3}^T \{\varepsilon_{\alpha\beta}^{\zeta}\}_{3 \times 1} dV - \frac{1}{2} \int_V \{\sigma^{\alpha\beta}\}_{1 \times 3}^T [C_{\varepsilon}]_{3 \times 3} \{\sigma^{\alpha\beta}\}_{3 \times 1} dV - \frac{1}{2} \int_F \{U\}_{1 \times 3}^T \{P\}_{3 \times 1} dF, \quad (3.13)$$

где $\{U\}_{1 \times 3}^T = \{v^1 v^2 v\}$ – матрица-строка компонент вектора перемещения точки срединной поверхности оболочки; $\{P\}_{3 \times 1}$ – столбец внешней нагрузки.

Входящая в (3.13) матрица упругости komponуется на основе соотношения, обратного (2.46)

$$\{\varepsilon_{\alpha\beta}^{\zeta}\}_{3 \times 1} = [C_{\sigma}]_{3 \times 3}^{-1} \{\sigma^{\alpha\beta}\}_{3 \times 1} = [C_{\varepsilon}]_{3 \times 3} \{\sigma^{\alpha\beta}\}_{3 \times 1}. \quad (3.14)$$

Столбец компонент тензора напряжений $\{\sigma^{\alpha\beta}\}_{3 \times 1}$ с учетом соотношений теории тонких оболочек (2.53) может быть представлен матричным произведением

$$\{\sigma^{\alpha\beta}\}_{3 \times 1} = [G_\sigma]_{3 \times 6} \{NM\}_{6 \times 1}, \quad (3.15)$$

где

$$\{NM\}_{1 \times 6}^T = \{N^{11}N^{22}N^{12}M^{11}M^{22}M^{12}\};$$

$$[G_\sigma]_{3 \times 6} = \begin{bmatrix} \frac{1}{F} & 0 & 0 & \frac{\zeta}{I} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{F} & 0 & 0 & \frac{\zeta}{I} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{F} & 0 & 0 & \frac{\zeta}{I} \end{bmatrix};$$

F, I – площадь поперечного сечения и момент инерции при ширине сечения, равной единице.

Входящий в функционал (3.13) столбец деформаций в произвольном слое тонкой оболочки $\{\varepsilon_{\alpha\beta}^\zeta\}_{3 \times 1}$ на основании (2.14), (2.15) и (3.11) может быть представлен в виде матричного произведения

$$\{\varepsilon_{\alpha\beta}^\zeta\}_{3 \times 1} = [G_\varepsilon]_{3 \times 6} \{\varepsilon_{\alpha\beta}\}_{6 \times 1} = [G_\varepsilon]_{3 \times 6} [B]_{6 \times 36} \{U^L\}_{36 \times 1} = [G_\varepsilon]_{3 \times 6} [B]_{6 \times 36} [P_R]_{36 \times 36} \{U^G\}_{36 \times 1}, \quad (3.16)$$

где $\{\varepsilon_{\alpha\beta}\}_{1 \times 6}^T = \{\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}2\varepsilon_{12}\kappa_{11}\kappa_{22}2\kappa_{12}\}$ – деформации и искривления в точке M^0 срединной поверхности; $[P_R]_{36 \times 36}$ – матрица перехода от столбца $\{U^L\}_{36 \times 1}$ к столбцу $\{U^G\}_{36 \times 1}$, компонуемая на основе (3.8)

$$[P_R]_{36 \times 36} = \begin{bmatrix} [P_r]_{12 \times 12} & [\emptyset]_{12 \times 12} & [\emptyset]_{12 \times 12} \\ [\emptyset]_{12 \times 12} & [P_r]_{12 \times 12} & [\emptyset]_{12 \times 12} \\ [\emptyset]_{12 \times 12} & [\emptyset]_{12 \times 12} & [P_r]_{12 \times 12} \end{bmatrix}; \quad [G_\varepsilon]_{3 \times 6} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \zeta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \zeta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \zeta \end{bmatrix}.$$

Принимая во внимание интерполяционные зависимости для кинематических (3.11) и силовых (3.12) искомых неизвестных можно скомпоновать следующие матричные соотношения

$$\{U\} = \begin{bmatrix} A \\ P_R \end{bmatrix} \{U^G\}; \quad (3.17)$$

$\begin{matrix} 1 \times 3 & 3 \times 36 & 36 \times 36 & 36 \times 1 \end{matrix}$

$$\{NM\} = [H] \{NM^{\alpha\beta}\}; \quad (3.18)$$

$\begin{matrix} 6 \times 1 & 6 \times 24 & 24 \times 1 \end{matrix}$

$$[A] = \begin{bmatrix} \{\varphi\}^T_{1 \times 12} & \{\emptyset\}^T_{1 \times 12} & \{\emptyset\}^T_{1 \times 12} \\ \{\emptyset\}^T_{1 \times 12} & \{\varphi\}^T_{1 \times 12} & \{\emptyset\}^T_{1 \times 12} \\ \{\emptyset\}^T_{1 \times 12} & \{\emptyset\}^T_{1 \times 12} & \{\varphi\}^T_{1 \times 12} \end{bmatrix};$$

$$\{NM^{\alpha\beta}\}^T_{1 \times 24} = \left\{ \{N^{11}\}^T_{1 \times 4} \{N^{22}\}^T_{1 \times 4} \{N^{12}\}^T_{1 \times 4} \{M^{11}\}^T_{1 \times 4} \{M^{22}\}^T_{1 \times 4} \{M^{12}\}^T_{1 \times 4} \right\}.$$

Функционал (3.13) с учетом (3.15)...(3.18) может быть преобразован к виду

$$\begin{aligned} \Phi_S = & \{NM^{\alpha\beta}\}^T_{1 \times 24} \int_V [H]^T_{24 \times 6} [G_\sigma]^T_{6 \times 3} [G_\varepsilon]_{3 \times 6} [B]_{6 \times 36} dV [P_R]_{36 \times 36} \{U^G\}_{36 \times 1} - \\ & - \frac{1}{2} \{NM^{\alpha\beta}\}^T_{1 \times 24} \int_V [H]^T_{24 \times 6} [G_\sigma]^T_{6 \times 3} [C_\varepsilon]_{3 \times 3} [G_\sigma]_{3 \times 6} [H]_{6 \times 24} dV \{NM^{\alpha\beta}\}_{24 \times 1} - \\ & - \{U^G\}^T_{1 \times 36} [P_R]^T_{36 \times 36} \int_F [A]^T_{36 \times 3} \{P\}_{3 \times 1} dF. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Выполняя процедуру минимизации смешанного функционала (3.19) по $\{NM^{\alpha\beta}\}^T_{1 \times 24}$ можно получить матричное уравнение вида

$$\begin{aligned} & \int_V [H]^T_{24 \times 6} [G_\sigma]^T_{6 \times 3} [G_\varepsilon]_{3 \times 6} [B]_{6 \times 36} dV [P_R]_{36 \times 36} \{U^G\}_{36 \times 1} - \\ & - \int_V [H]^T_{24 \times 6} [G_\sigma]^T_{6 \times 3} [C_\varepsilon]_{3 \times 3} [G_\sigma]_{3 \times 6} [H]_{6 \times 24} dV \{NM^{\alpha\beta}\}_{24 \times 1} = 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

или в более компактном виде

$$[Q]_{24 \times 36} \{U^G\}_{36 \times 1} - [Y]_{24 \times 24} \{NM^{\alpha\beta}\}_{24 \times 1} = 0, \quad (3.21)$$

$$\text{где } [Q]_{24 \times 36} = \int_V [H]_{24 \times 6}^T [G_\sigma]_{6 \times 3}^T [G_\varepsilon]_{3 \times 6} [B]_{6 \times 36} dV [P_R]_{36 \times 36};$$

$$[Y]_{24 \times 24} = \int_V [H]_{24 \times 6}^T [G_\sigma]_{6 \times 3}^T [C_\varepsilon]_{3 \times 3} [G_\sigma]_{3 \times 6} [H]_{6 \times 24} dV.$$

Представив первое слагаемое в функционале (3.19) в виде

$$\{U^G\}_{1 \times 36}^T [P_R]_{36 \times 36}^T \int_V [B]_{36 \times 6}^T [G_\varepsilon]_{6 \times 3}^T [G_\sigma]_{3 \times 6} [H]_{6 \times 24} dV \{NM^{\alpha\beta}\}_{24 \times 1}, \quad (3.22)$$

можно осуществить минимизацию по кинематическим узловым неизвестным

$$\{U^G\}_{1 \times 36}^T$$

$$[P_R]_{36 \times 36}^T \int_V [B]_{36 \times 6}^T [G_\varepsilon]_{6 \times 3}^T [G_\sigma]_{3 \times 6} [H]_{6 \times 24} dV \{NM^{\alpha\beta}\}_{24 \times 1} - [P_R]_{36 \times 36}^T \int_F [A]_{36 \times 3}^T \{P\}_{3 \times 1} dF = 0 \quad (3.23)$$

или

$$[Q]_{36 \times 24}^T \{NM^{\alpha\beta}\}_{24 \times 1} - \{f^G\}_{36 \times 1} = 0, \quad (3.24)$$

где $\{f^G\}_{36 \times 1} = [P_R]_{36 \times 36}^T \int_F [A]_{36 \times 3}^T \{P\}_{3 \times 1} dF$ – столбец узловой внешней поверхностной нагрузки.

Объединяя (3.21) и (3.24), можно скомпоновать следующую систему матричных уравнений

$$\begin{cases} [Q]_{24 \times 36} \{U^G\}_{36 \times 1} - [Y]_{24 \times 24} \{NM^{\alpha\beta}\}_{24 \times 1} = 0; \\ [Q]_{36 \times 24}^T \{NM^{\alpha\beta}\}_{24 \times 1} - \{f^G\}_{36 \times 1} = 0. \end{cases} \quad (3.25)$$

Система (3.25) может быть представлена в следующем виде

$$\begin{bmatrix} -[Y]_{24 \times 24} & [Q]_{24 \times 36} \\ [Q]_{36 \times 24}^T & [\emptyset]_{36 \times 36} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{NM^{\alpha\beta}\}_{24 \times 1} \\ \{U^G\}_{36 \times 1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\emptyset\}_{24 \times 1} \\ \{f^G\}_{36 \times 1} \end{Bmatrix} \quad (3.26)$$

или в более компактной форме

$$[K_s]_{60 \times 60} \{U_s\}_{60 \times 1} = \{R_s\}_{60 \times 1}, \quad (3.27)$$

где $[K_s]_{60 \times 60} = \begin{bmatrix} -[Y]_{24 \times 24} & [Q]_{24 \times 36} \\ [Q]^T_{36 \times 24} & [\emptyset]_{36 \times 36} \end{bmatrix}$ – матрица податливости четырехузлового элемента

дискретизации; $\{U_s\}_{1 \times 60}^T = \left\{ \{NM^{\alpha\beta}\}_{1 \times 24}^T \{U^G\}_{1 \times 36}^T \right\}$ – обобщенный столбец узловых усилий элемента дискретизации.

В полученной матрице податливости $[K_s]_{60 \times 60}$, как и в [36], содержится нулевой блок $[\emptyset]_{36 \times 36}$, который снижает обусловленность глобальной матрицы податливости всей оболочечной конструкции. Поэтому в настоящем исследовании предлагается альтернативный подход, позволяющий исключить нулевой блок $[\emptyset]_{36 \times 36}$ и существенно сократить размерность матрицы жесткости используемого элемента дискретизации.

С этой целью из уравнения (3.21) необходимо выразить столбец силовых узловых неизвестных

$$\{NM^{\alpha\beta}\}_{24 \times 1} = [Y]_{24 \times 24}^{-1} [Q]_{24 \times 36} \{U^G\}_{36 \times 1}. \quad (3.28)$$

Далее, выполнив подстановку (3.28) в (3.24), можно записать следующую систему алгебраических уравнений

$$[Q]_{36 \times 24}^T [Y]_{24 \times 24}^{-1} [Q]_{24 \times 36} \{U^G\}_{36 \times 1} = \{f^G\}_{36 \times 1} \quad (3.29)$$

или в более компактном виде

$$[K]_{36 \times 36} \{U^G\}_{36 \times 1} = \{f^G\}_{36 \times 1}, \quad (3.30)$$

где $[K]_{36 \times 36}$ – матрица жесткости четырехузлового элемента дискретизации в смешанной формулировке МКЭ.

Как следует из анализа структуры (3.29), матрица жесткости используемого двумерного элемента дискретизации $[K]_{36 \times 36}$ не содержит нулевого блока и имеет существенно меньшую размерность по сравнению с матрицей податливости, полученной на основе подхода, изложенного в [35, 36] для трехмерных элементов дискретизации.

Глобальная матрица жесткости оболочечной конструкции компонуется из матриц жесткостей отдельных четырехузловых элементов дискретизации посредством матрицы нумерации глобальных узловых неизвестных, именуемой в МКЭ матрицей индексов [99]. В результате решения глобальной системы алгебраических уравнений можно определить глобальный столбец кинематических узловых неизвестных $\{U_N^G\}_{N \times 1}$.

Силовые узловые неизвестные в пределах каждого из четырехузловых элементов дискретизации могут быть определены посредством соотношения (3.25).

Напряжения $\sigma^{\alpha\beta}$ в каждой узловой точке сетки дискретизации оболочечной конструкции могут быть вычислены с помощью выражения (3.15).

Работоспособность и корректность разработанного конечно-элементного алгоритма расчета конструкций из тонких оболочек была апробирована на следующих примерах.

3.3. Пример расчёта кругового цилиндра

Был выполнен расчет оболочки в форме кругового цилиндра, имеющего на одном из торцов жесткую заделку и торец, свободный от закреплений на другом конце оболочки.

Оболочка была нагружена внутренним давлением интенсивностью q_v и равномерно распределенной по свободному торцу осевой нагрузкой q_x . Расчетная схема цилиндрической оболочки изображена на рисунке 3.2. Исходные данные имели следующие значения: радиус цилиндра $R = 0,9$ м; толщина оболочки $h = 0,02$ м; $q_v = 5$ МПа; $q_x = 0,5$ МН/м; модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$.

Оболочка моделировалась квадратной сеткой элементов дискретизации, которая последовательно сгущалась.

В процессе расчета контролировались параметры напряженно-деформированного состояния на закрепленном и свободном торцах цилиндра.

Итоги вычислений представлены в табличной форме (Табл. 3.1). В данной таблице показано, как изменялись значения нормальных напряжений на внутренней σ^{in} , наружной σ^{out} и срединной σ^{midl} поверхностях оболочки по мере измельчения сетки узлов. Для сравнения в таблице 3.1 также приведены напряжения, вычисленные аналитическим путем исходя из условия равновесия

$$\sigma_{11} = \frac{q_x}{h} = \frac{0,5 \text{ МН/м}}{0,02 \text{ м}} = 25 \text{ МПа}; \quad \sigma_{22} = \frac{q_v \cdot R}{h} = \frac{5 \text{ МПа} \cdot 0,9 \text{ м}}{0,02 \text{ м}} = 225 \text{ МПа}.$$

Анализ численных значений нормальных напряжений, представленных в таблице 3.1, позволяет фиксировать высокую скорость сходимости вычислительного процесса по мере сгущения сетки элементов дискретизации. Сопоставляя численные значения напряжений с их аналитическими значениями, можно наблюдать их практически полное совпадение (погрешность вычисления σ_{22}^{midl} на свободном торце цилиндра составляет 0,22 %).

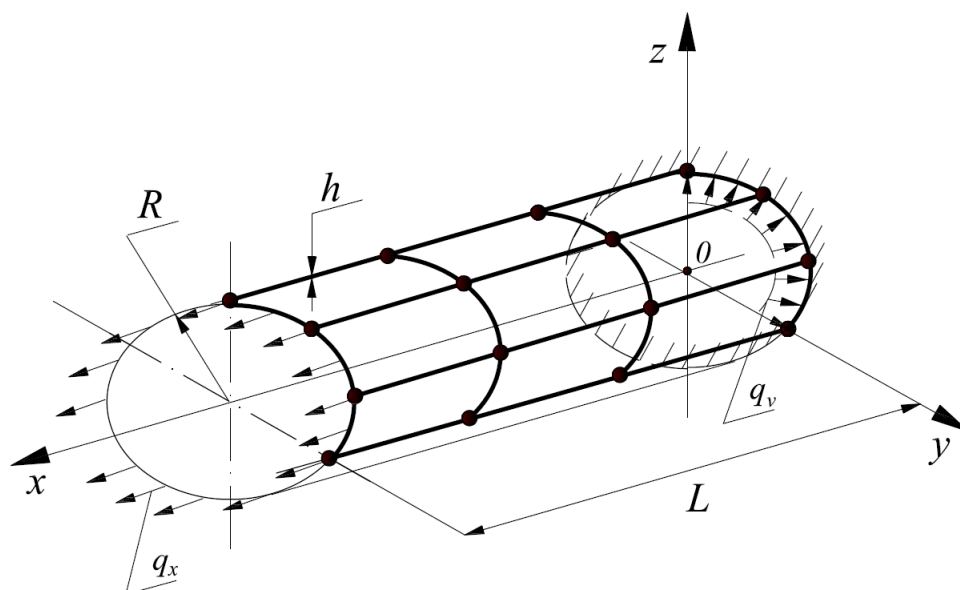


Рисунок 3.2 – Расчетная схема кругового цилиндра с равномерно распределенной осевой нагрузкой q_x и внутренним давлением q_v

Как было отмечено выше, разработанный вычислительный алгоритм расчета тонких оболочек в смешанной формулировке МКЭ позволяет на основе (3.28) находить значения продольных сил и моментов в любом из узлов сетки дискретизации оболочечной конструкции. В таблице 3.2 представлены численные значения искомых силовых параметров в контролируемых сечениях

рассчитываемой оболочки. В крайней правой колонке приведены аналитические значения для продольных сил и моментов на торцах оболочки.

Таблица 3.1 – Значения нормальных напряжений
на торцах цилиндрической оболочки

Характерное сечение	Напряжения, МПа	Сетка узлов дискретизации				Аналитическое решение
		21×21	41×41	51×51	61×61	
Жесткая заделка	σ_{11}^{in}	410,5	417,5	418,3	418,8	-
	σ_{11}^{out}	-360,5	-367,5	-368,3	-368,8	-
	σ_{11}^{mild}	25,00	25,00	25,00	25,00	25,00
	σ_{22}^{in}	117,5	122,3	123,0	123,3	-
	σ_{22}^{out}	-113,7	-113,1	-113,0	-112,9	-
	σ_{22}^{mild}	4,48	7,24	7,62	7,84	-
Свободный торец	σ_{11}^{in}	24,98	24,99	25,00	25,00	-
	σ_{11}^{out}	25,02	25,01	25,00	25,00	-
	σ_{11}^{mild}	25,00	25,00	25,00	25,00	25,00
	σ_{22}^{in}	226,8	226,8	226,8	226,8	-
	σ_{22}^{out}	222,0	222,0	222,0	222,0	-
	σ_{22}^{mild}	224,5	224,5	224,5	224,5	225,0

Таблица 3.2 – Значения продольных сил и изгибающих моментов
на торцах цилиндрической оболочки

Характерное сечение	Усилия, Н; моменты, Н · м	Сетка узлов дискретизации				Аналитическое решение
		21×21	41×41	51×51	61×61	
Жесткая заделка	N_{11}	500,0	500,0	500,0	500,0	500,0
	N_{22}	89,7	144,7	152,5	156,8	-
	M_{11}	-2570,0	-2616,6	-2622,3	-2625,4	-
	M_{22}	-771,2	-785,8	-787,6	-788,6	-
Свободный торец	N_{11}	500,0	500,0	500,0	500,0	500,0
	N_{22}	4490,5	4490,3	4490,3	4490,3	4500,0
	M_{11}	0,131	0,035	0,023	0,016	0,000
	M_{22}	-49,3	-49,3	-49,3	-49,3	-

Анализ данных, приведенных в таблице 3.2 также позволяет фиксировать высокую скорость сходимости вычислительного процесса по искомым силовым параметрам. Численные «физические» значения торцевой продольной силы N_{11} ,

ориентированной вдоль оси OX , соответствуют величине равномерно распределенной по свободному торцу нагрузки $q_x = 0,5$ МН/м, а «физическое» значение продольной силы N_{22} , ориентированной вдоль окружности поперечного сечения на свободном торце оболочки, имеет минимальную погрешность $\delta = 0,2$ %. «Физический» изгибающий момент M_{11} на свободном торце цилиндра стремится к нулевому значению по мере сгущения сетки дискретизации.

На основании вышеизложенного можно сделать вывод о корректности разработанного алгоритма и достаточной для инженерной практики точности вычисления контролируемых прочностных параметров НДС оболочечных конструкций.

3.4. Пример расчёта эллиптического цилиндра

Определено НДС цилиндрической оболочки с эллиптическим поперечным сечением, жестко заделанной по концам, загруженной внутренним давлением $q = 5$ МПа. Вследствие наличия симметрии рассматривалась 1/8 часть оболочки. Расчетная схема представлена на рисунке 3.3.

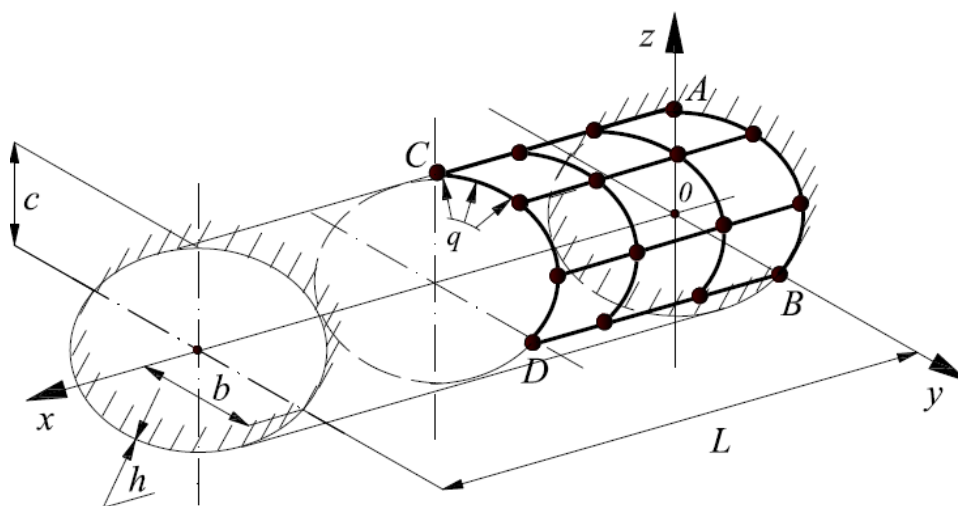


Рисунок 3.3 – Расчетная схема цилиндрической оболочки с эллиптическим поперечным сечением

В рассматриваемой задаче приняты следующие исходные данные:

$$b = 1,0 \text{ м}; c = 0,8 \text{ м}; L = 1,0 \text{ м}; h = 0,02 \text{ м}; E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}; \nu = 0,3.$$

Вычисленные значения контролируемых параметров в характерных точках конструкции в зависимости от степени сгущения сетки узлов оболочки приведены в таблице 3.3.

Таблица 3.3 – Значения нормальных напряжений и изгибающих моментов в эллиптическом цилиндре

Характерное сечение	Напряжения, МПа; моменты, Н·м	Сетка узлов дискретизации					Решение в формулировке метода перемещений, 61×61
		41×41	51×51	61×61	81×81	101×101	
Жесткая заделка, $x = 0,0$; $t = 0,0$ рад. (точка A)	σ_{11}^{in}	642,1	642,4	642,5	642,7	642,8	642,4
	σ_{11}^{out}	-544,6	-544,9	-545,0	-545,2	-545,2	-544,8
	σ_{22}^{in}	183,5	185,1	186,1	187,4	188,1	192,7
	σ_{22}^{out}	-172,5	-171,1	-170,1	-169,0	-168,3	-163,4
	M_{11}	-395,6	-395,8	-395,8	-396,0	-396,0	-
	M_{22}	-118,7	-118,8	-118,9	-118,9	-118,9	-
Жесткая заделка, $x = 0,0$; $t = \pi/2$ рад. (точка B)	σ_{11}^{in}	264,8	265,2	265,4	265,6	265,7	265,5
	σ_{11}^{out}	-118,3	-118,7	-118,9	-119,1	-119,2	-119,0
	σ_{22}^{in}	85,21	84,00	83,16	82,06	81,38	79,65
	σ_{22}^{out}	-29,70	-31,12	-32,10	-33,32	-34,06	-35,70
	M_{11}	-127,7	-128,0	-128,1	-128,2	-128,3	-
	M_{22}	-38,90	-38,95	-39,00	-39,00	-39,00	-
Середина пролета, $x = L/2$; $t = 0,0$ рад. (точка C)	σ_{11}^{in}	71,35	71,34	71,33	71,33	71,32	71,27
	σ_{11}^{out}	95,77	95,79	95,80	95,80	95,81	95,67
	σ_{22}^{in}	312,4	312,3	312,3	312,3	312,3	312,0
	σ_{22}^{out}	338,5	338,5	338,5	338,5	338,5	338,1
Середина пролета, $x = L/2$; $t = \pi/2$ рад. (точка D)	σ_{11}^{in}	37,72	37,72	37,73	37,73	37,73	37,84
	σ_{11}^{out}	9,81	9,81	9,81	9,81	9,81	9,83
	σ_{22}^{in}	173,9	173,9	174,0	174,0	174,0	174,7
	σ_{22}^{out}	144,2	144,2	144,2	144,3	144,3	144,8

Как следует из анализа табличных данных, сходимость вычислительного процесса как по напряжениям, так и по моментам является весьма устойчивой. С целью верификации разработанного алгоритма в правой крайней колонке даны значения напряжений, вычисленные при использовании ЧЭД, матрица жесткости которого была получена на основе МКЭ в форме метода перемещений [64, 66, 68].

Как показал сравнительный анализ конечно-элементных решений, полученных на основе разработанного алгоритма, и МКЭ, реализованного по методу перемещений, значения напряжений можно признать совпадающими во всех контролируемых точках с весьма незначительным допустимым минимальным различием в значениях σ_{22} в точках A и B .

Однако, необходимо принять во внимание, что при использовании МКЭ в смешанной формулировке возможно непосредственное получение численных значений силовых факторов (усилий и моментов) и напряжений в любой из узловых точек рассчитываемой оболочки. При использовании МКЭ в формулировке метода перемещений значения напряжений получить непосредственно не представляется возможным. Для вычисления искомых значений напряжений при данной формулировке МКЭ необходимо организовать ряд предварительных математических операций. На первом этапе, учитывая, что в результате решения СЛАУ получены узловые значения перемещений и только их первых производных, необходимо, используя функции формы найти частные производные второго порядка от нормальной компоненты вектора перемещения. На втором этапе, используя, например, соотношения (2.48) вычисляются деформации в произвольном слое оболочки, расположенном на некотором расстоянии по вертикали от срединной поверхности. На третьем этапе можно уже приступить к вычислению напряжений, используя для этой цели, скомпонованную во второй главе матрицу упругости (2.54) или соотношения (2.58), предназначенные для использования в расчетах оболочек вращения.

Естественно, удлинение цепочки вычислительных процедур делает алгоритм более громоздким, что увеличивает риски повышения погрешности вычислительных операций.

Использование разработанного алгоритма смешанного МКЭ позволяет устранить вышеупомянутые недостатки, возникающие при реализации МКЭ в форме метода перемещений и открывает возможность прямого, сразу же после решения СЛАУ, получения искомых силовых и кинематических параметров без излишних вычислительных процедур. Данный факт является, несомненно, существенным преимуществом разработанного варианта смешанного МКЭ при решении задач, связанных с прочностными расчетами конструкций из оболочек.

3.5. Пример расчёта эллиптического цилиндра из несжимаемого материала

Описанный выше алгоритм смешанного МКЭ можно использовать в расчетах конструкций, выполненных из несжимаемого материала, когда коэффициент Пуассона равен $\nu = 0,5$. Особенность заключается в том, что применение МКЭ в форме метода перемещений к решению данного класса задач может быть затруднительным в силу возникновения неопределенности из-за нахождения выражения $(1 - 2\nu)$ в знаменателе, входящем в структуру формул элементов матрицы упругости (2.54).

Разработанный вариант смешанного МКЭ лишен указанного недостатка. Подтверждением данного факта является пример расчета эллиптического цилиндра с $\nu = 0,5$. Расчетная схема и прочие исходные данные взяты из примера 3.4. Результаты расчетов приведены в форме таблицы 3.4. Визуализация результатов расчета представлена на рисунках 3.4 и 3.5. В таблице 3.4 представлены численные значения нормальных напряжений и изгибающих моментов в опорном и пролетном сечениях эллиптического цилиндра в зависимости от степени измельчения сетки узлов дискретизации рассчитываемого фрагмента оболочки.

Анализируя табличные данные, можно констатировать устойчивую сходимость вычислительного процесса по мере сгущения сетки узлов дискретизации.

На рисунке 3.4 представлены графики изменения нормальных напряжений и изгибающих моментов M_{11} , M_{22} вдоль образующей цилиндра.

Из рисунка 3.4 видно, что напряжения имеют максимальные значения в опорном сечении (жесткой заделке). Постепенно снижаясь в области, расположенной на расстоянии $L/10$ от опорного сечения, что соответствует физическому смыслу решаемой задачи.

Таблица 3.4 – Значения нормальных напряжений и изгибающих моментов в эллиптическом цилиндре из несжимаемого материала

Характерное сечение	Напряжения, МПа; моменты, Н·м	Сетка узлов дискретизации				
		41×41	51×51	61×61	81×81	101×101
Жесткая заделка, $x = 0,0$; $t = 0,0$ рад. (точка A)	σ_{11}^{in}	689,8	690,0	690,1	690,2	690,3
	σ_{11}^{out}	-493,3	-493,5	-493,6	-493,7	-493,8
	σ_{22}^{in}	334,4	336,0	337,1	338,4	339,1
	σ_{22}^{out}	-257,0	-255,6	-254,7	-253,6	-252,9
	M_{11}	-394,3	-394,5	-394,6	-394,6	-394,7
	M_{22}	-197,6	-197,7	-197,8	-197,8	-197,8
Жесткая заделка, $x = 0,0$; $t = \pi/2$ рад. (точка B)	σ_{11}^{in}	247,8	248,1	248,3	248,5	248,6
	σ_{11}^{out}	-41,27	-41,60	-41,77	-41,95	-42,03
	σ_{22}^{in}	129,5	128,3	127,4	126,3	125,7
	σ_{22}^{out}	-14,97	-16,52	-17,55	-18,83	-19,60
	M_{11}	-96,36	-96,57	-96,69	-96,81	-96,86
	M_{22}	-49,39	-49,47	-49,51	-49,55	-49,56
Середина пролета, $x = L/2$; $t = 0,0$ рад. (точка C)	σ_{11}^{in}	108,7	108,7	108,7	108,7	108,7
	σ_{11}^{out}	156,3	156,3	156,3	156,3	156,3
	σ_{22}^{in}	305,4	305,4	305,4	305,4	305,4
	σ_{22}^{out}	347,3	347,2	347,2	347,2	347,2
Середина пролета, $x = L/2$; $t = \pi/2$ рад. (точка D)	σ_{11}^{in}	73,92	73,92	73,92	73,91	73,91
	σ_{11}^{out}	34,0	34,0	34,0	34,0	34,0
	σ_{22}^{in}	179,4	179,4	179,4	179,5	179,5
	σ_{22}^{out}	139,2	139,2	139,3	139,3	139,3

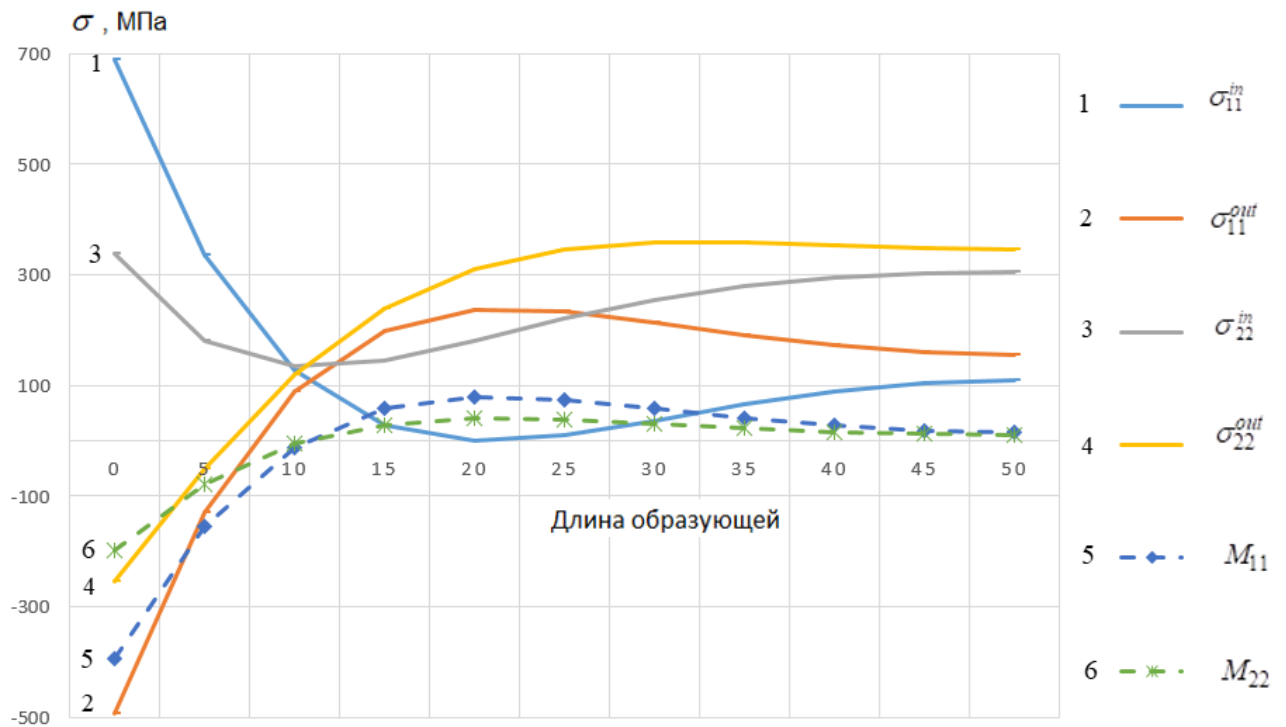


Рисунок 3.4 – Эпюры нормальных напряжений и изгибающих моментов вдоль образующей при $t = 0,0$ рад

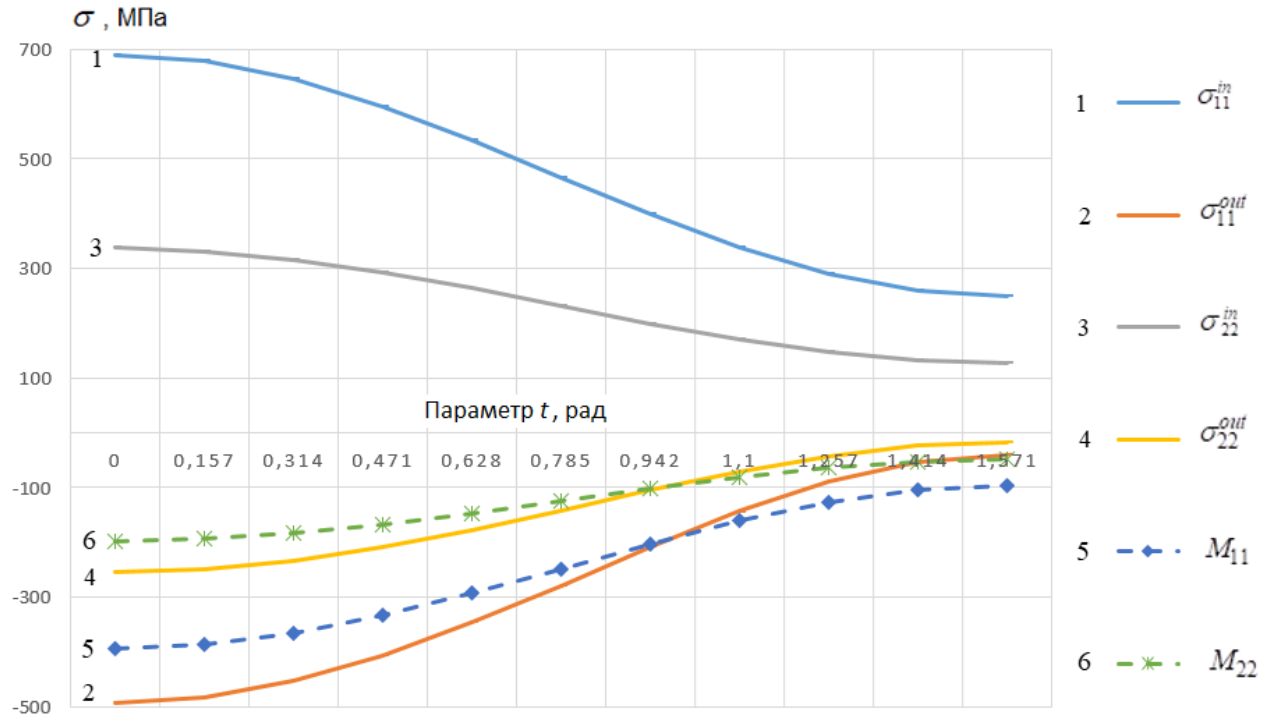


Рисунок 3.5 – Эпюры нормальных напряжений и изгибающих моментов в жесткой заделке при $x = 0,0$ м

На рисунке 3.5 представлены изменения напряжений σ^{in} и σ^{out} и моментов M_{11} , M_{22} вдоль дуги эллипса, являющегося поперечным сечением оболочки в жесткой заделке ($x = 0,0$ м).

Из рисунка 3.5 следует, что напряжения и моменты достигают своих максимальных значений при $t = 0$. Далее значения напряжений и моментов монотонно уменьшаются и достигают минимума при $t = \pi/2$.

Анализируя данные расчетов, подученные в примерах 3.1-3.5, можно обозначить следующие положительные стороны разработанного алгоритма:

1. Сходимость вычислительного процесса с использованием разработанного конечного элемента в смешанной формулировке является устойчивой как по силовым факторам, так и по кинематическим.

2. Полученные численные значения напряжений в контролируемых точках находятся в адекватном соответствии со значениями напряжений, найденными из условий статического равновесия (погрешность вычислений не превышает 0,5 %).

3. Применение разработанного варианта смешанного ЧЭД предоставляет возможность непосредственного получения искомым силовых параметров в процессе решения системы разрешающих уравнений.

4. Разработанный конечный элемент в смешанной формулировке пригоден для определения НДС тонкостенных конструкций, изготовленных из несжимаемых материалов ($\nu = 0,5$).

3.6. Четырехузловой элемент дискретизации с деформационными и кинематическими узловыми неизвестными

В ряде случаев, например, при расчете оболочек эллипсоидального типа, нагруженных сосредоточенной силой или линейно распределенной нагрузкой, использование в качестве узловых варьируемых параметров продольных сил и моментов не приводит к достижению приемлемых по точности результатов.

При исследовании НДС оболочек такого типа целесообразно в качестве силовых узловых варьируемых параметров применять деформации и искривления срединной поверхности рассчитываемой оболочки. В этом случае столбец

силовых узловых неизвестных четырехузлового элемента дискретизации будет иметь следующий вид

$$\{\varepsilon \kappa_{\alpha\beta}\}_{1 \times 24}^T = \left\{ \begin{matrix} \{\varepsilon_{\alpha\beta}\}_{1 \times 12}^T & \{\kappa_{\alpha\beta}\}_{1 \times 12}^T \end{matrix} \right\}, \quad (3.6.1)$$

$$\text{где } \{\varepsilon_{\alpha\beta}\}_{1 \times 12}^T = \{\varepsilon_{11}^i \varepsilon_{11}^j \varepsilon_{11}^k \varepsilon_{11}^l \varepsilon_{22}^i \varepsilon_{22}^j \varepsilon_{22}^k \varepsilon_{22}^l 2\varepsilon_{12}^i 2\varepsilon_{12}^j 2\varepsilon_{12}^k 2\varepsilon_{12}^l\};$$

$$\{\kappa_{\alpha\beta}\}_{1 \times 12}^T = \{\kappa_{11}^i \kappa_{11}^j \kappa_{11}^k \kappa_{11}^l \kappa_{22}^i \kappa_{22}^j \kappa_{22}^k \kappa_{22}^l 2\kappa_{12}^i 2\kappa_{12}^j 2\kappa_{12}^k 2\kappa_{12}^l\}.$$

Смешанный функционал для выбранного варианта силовых варьируемых параметров можно записать в следующем виде

$$\begin{aligned} \Phi_S &= \int_V \{\sigma^{\alpha\beta}\}_{1 \times 3}^T \{\varepsilon_{\alpha\beta}^{\zeta}\}_{3 \times 1}^K dV - \frac{1}{2} \int_V \{\sigma^{\alpha\beta}\}_{1 \times 3}^T \{\varepsilon_{\alpha\beta}^{\zeta}\}_{3 \times 1}^a dV - \frac{1}{2} \int_F \{U\}_{1 \times 3}^T \{P\}_{3 \times 1} dF = \\ &= \int_V \{\varepsilon_{\alpha\beta}\}_{1 \times 6}^T [\Gamma_{\varepsilon}]_{6 \times 3}^T [C_{\sigma}]_{3 \times 3}^T [\Gamma_{\varepsilon}]_{3 \times 6} [B]_{6 \times 36} dV [P_R]_{36 \times 36} \{U^G\}_{36 \times 1} - \\ &- \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon_{\alpha\beta}\}_{1 \times 6}^T [\Gamma_{\varepsilon}]_{6 \times 3}^T [C_{\sigma}]_{3 \times 3}^T [\Gamma_{\varepsilon}]_{3 \times 6} \{\varepsilon_{\alpha\beta}\}_{6 \times 1} dV - \frac{1}{2} \{U^G\}_{1 \times 36}^T [P_R]_{36 \times 36}^T \int_F [A]_{36 \times 3}^T \{P\}_{3 \times 1} dF, \quad (3.6.2) \end{aligned}$$

где $[C_{\sigma}]_{3 \times 3}$ – матрица упругости, выражающая столбец напряжений $\{\sigma^{\alpha\beta}\}_{3 \times 1}$ через столбец деформаций в произвольном слое оболочки согласно (2.46)

$$\{\sigma^{\alpha\beta}\}_{3 \times 1} = [C_{\sigma}]_{3 \times 3} \{\varepsilon_{\alpha\beta}^{\zeta}\}_{3 \times 1}. \quad (3.6.3)$$

Для интерполяции силовых параметров в виде деформаций и искривлений в точке срединной поверхности M^0 используются билинейные функции локальных координат, также, как и для силовых параметров в виде продольных сил и моментов (3.12)

$$\{\varepsilon_{\alpha\beta}\}_{6 \times 1} = [H]_{6 \times 24} \{\varepsilon \kappa_{\alpha\beta}\}_{24 \times 1}^T. \quad (3.6.4)$$

С учетом (3.6.4) функционал (3.6.2) примет следующий вид

$$\begin{aligned}
\Phi_S = & \left\{ \varepsilon \kappa_{\alpha\beta} \right\}_y^T \int_V \left[H \right]_{24 \times 6}^T \left[\Gamma_\varepsilon \right]_{6 \times 3}^T \left[C_\sigma \right]_{3 \times 3}^T \left[\Gamma_\varepsilon \right]_{3 \times 6} \left[B \right]_{6 \times 36} dV \left[P_R \right]_{36 \times 36} \left\{ U^G \right\}_{36 \times 1} - \\
& - \frac{1}{2} \left\{ \varepsilon \kappa_{\alpha\beta} \right\}_y^T \int_V \left[H \right]_{24 \times 6}^T \left[\Gamma_\varepsilon \right]_{6 \times 3}^T \left[C_\sigma \right]_{3 \times 3}^T \left[\Gamma_\varepsilon \right]_{3 \times 6} \left[H \right]_{6 \times 24} dV \left\{ \varepsilon \kappa_{\alpha\beta} \right\}_y - \\
& - \frac{1}{2} \left\{ U^G \right\}_{1 \times 36}^T \left[P_R \right]_{36 \times 36}^T \int_F \left[A \right]_{36 \times 3}^T \left\{ P \right\}_{3 \times 1} dF.
\end{aligned} \tag{3.6.5}$$

Осуществляя минимизацию (3.6.5) по $\left\{ \varepsilon \kappa_{\alpha\beta} \right\}_y^T$ можно записать следующее

матричное уравнение

$$\partial \Phi_S / \partial \left\{ \varepsilon \kappa_{\alpha\beta} \right\}_y^T \equiv \left[Q_\varepsilon \right]_{24 \times 36} \left\{ U^G \right\}_{36 \times 1} - \left[Y_\varepsilon \right]_{24 \times 24} \left\{ \varepsilon \kappa_{\alpha\beta} \right\}_y = 0, \tag{3.6.6}$$

где

$$\left[Q_\varepsilon \right]_{24 \times 36} = \int_V \left[H \right]_{24 \times 6}^T \left[\Gamma_\varepsilon \right]_{6 \times 3}^T \left[C_\sigma \right]_{3 \times 3}^T \left[\Gamma_\varepsilon \right]_{3 \times 6} \left[B \right]_{6 \times 36} dV \left[P_R \right]_{36 \times 36};$$

$$\left[Y_\varepsilon \right]_{24 \times 24} = \int_V \left[H \right]_{24 \times 6}^T \left[\Gamma_\varepsilon \right]_{6 \times 3}^T \left[C_\sigma \right]_{3 \times 3}^T \left[\Gamma_\varepsilon \right]_{3 \times 6} \left[H \right]_{6 \times 24} dV.$$

Для выполнения минимизации (3.6.5) по $\left\{ U^G \right\}_{1 \times 36}^T$ первое слагаемое в функционале необходимо представить в виде

$$\left\{ U^G \right\}_{1 \times 36}^T \left[P_R \right]_{36 \times 36}^T \int_V \left[B \right]_{36 \times 6}^T \left[\Gamma_\varepsilon \right]_{6 \times 3}^T \left[C_\sigma \right]_{3 \times 3}^T \left[\Gamma_\varepsilon \right]_{3 \times 6} \left[H \right]_{6 \times 24} dV \left\{ \varepsilon \kappa_{\alpha\beta} \right\}_y \tag{3.6.7}$$

Применяя процедуру минимизации функционала (3.6.5) по $\left\{ U^G \right\}_{1 \times 36}^T$ с учетом (3.6.7) можно получить следующее матричное соотношение

$$\partial \Phi_S / \partial \left\{ U^G \right\}_{1 \times 36}^T \equiv \left[Q_\varepsilon \right]_{36 \times 24}^T \left\{ \varepsilon \kappa_{\alpha\beta} \right\}_y - \left\{ f^G \right\}_{36 \times 1} = 0. \tag{3.6.8}$$

Из (3.6.6) можно выразить столбец силовых узловых неизвестных в виде деформаций и искривлений точки срединной поверхности

$$\left\{ \varepsilon \kappa_{\alpha\beta} \right\}_y = \left[Y_\varepsilon \right]_{24 \times 24}^{-1} \left[Q_\varepsilon \right]_{24 \times 36} \left\{ U^G \right\}_{36 \times 1}. \tag{3.6.9}$$

Выполняя подстановку (3.6.9) в (3.6.8) можно записать следующую систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{matrix} [Q_\varepsilon] &^T & [Y_\varepsilon] &^{-1} & [Q_\varepsilon] & \{U^G\} &= & \{f^G\} \\ 36 \times 24 & & 24 \times 24 & & 24 \times 36 & 36 \times 1 & & 36 \times 1 \end{matrix} \quad (3.6.10)$$

или в более компактном виде

$$\begin{matrix} [K_\varepsilon] & \{U^G\} &= & \{f^G\}, \\ 36 \times 36 & 36 \times 1 & & 36 \times 1 \end{matrix} \quad (3.6.11)$$

$$\text{где } [K_\varepsilon] = \begin{matrix} [Q_\varepsilon] &^T & [Y_\varepsilon] &^{-1} & [Q_\varepsilon] \\ 36 \times 36 & 36 \times 24 & 24 \times 24 & 24 \times 36 \end{matrix}.$$

Используя (3.6.11) с помощью матрицы индексов можно скомпоновать глобальную матрицу жесткости и глобальный столбец узловых усилий оболочечной конструкции в целом. После решения глобальной СЛАУ и получения кинематических узловых неизвестных с помощью (3.6.9) можно вычислить искомые силовые узловые параметры в виде деформаций и искривлений в узловой точке срединной поверхности рассчитываемой оболочечной конструкции. Далее с помощью (3.6.3) можно получить значения напряжений в интересующих проектировщика точках исследуемой оболочечной конструкции. Корректность и высокая точность вычисления искомых прочностных параметров рассчитываемой оболочечной конструкции была доказана решением ряда тестовых задач.

3.6.1. Пример расчёта двухшарнирной арки

при вариативном использовании силовых узловых неизвестных

В качестве примера была рассчитана двухшарнирная арка с внешней нагрузкой в виде силы $P=0,2$ Н, приложенной в точке C (Рис.3.6). Изначально была рассчитана круговая арка с исходными данными: $E=2 \cdot 10^5$ МПа; $\nu=0.3$; толщина стенки $h=0,002$ м; $R=0,8$ м (Рис. 3.6).

Расчеты были реализованы в двух вариантах: в первом варианте силовыми неизвестными были выбраны продольные силы N^{11}, N^{22}, N^{12} и изгибающие моменты M^{11}, M^{22}, M^{12} ; во втором – в качестве таковых были приняты деформации $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и искривления $\kappa_{\alpha\beta}$ срединной поверхности.

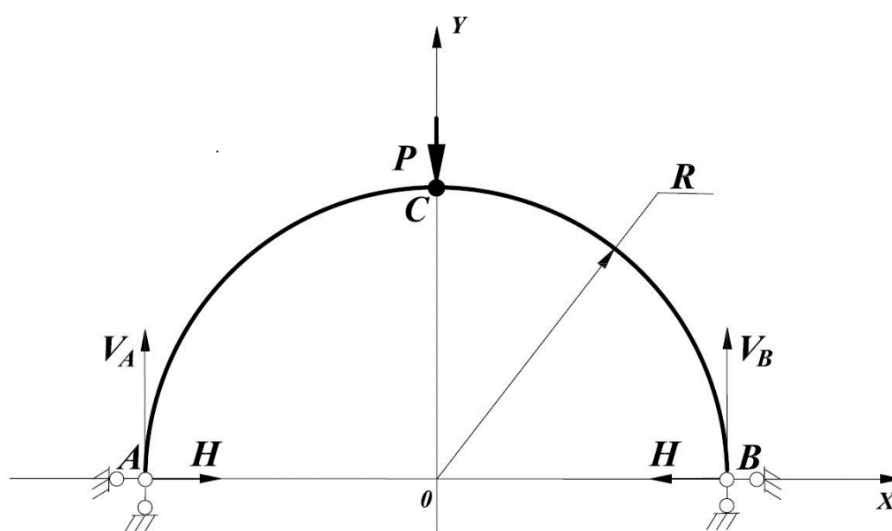


Рисунок 3.6 – Расчетная схема круговой двухшарнирной арки

Таблица 3.5 – Значения контролируемых параметров НДС круговой арки

Коор- дина- ты точек, x , м; t , рад.	Напря- жения σ_{tt} , Н/см ² ; M_{ϕ}^{22} , Н · см; N_{ϕ}^{22} , Н	Варианты узловых силовых неизвестных						Анали- тичес- кое реше- ние
		I $(N^{\alpha\beta}, M^{\alpha\beta})$			II $(\varepsilon_{\alpha\beta}, \kappa_{\alpha\beta})$			
		Сетка дискретизации						
		41×2	81×2	161×2	41×2	81×2	161×2	
$x = 0.0$ $t = 0.0$	σ_{tt}^{in}	434,73	434,80	434,82	436,18	436,26	436,28	-
	σ_{tt}^{out}	-437,18	-437,26	-437,28	-435,73	-435,80	-435,82	-
	σ_{tt}^{midl}	435,955	436,03	436,05	435,955	436,03	436,05	436,056
	M_{ϕ}^{22}	2,90636	2,90687	2,90699	2,90636	2,90687	2,90699	2,90704
$x = 0.8$ $t = \frac{\pi}{2}$	σ_{tt}^{in}	-0,654	-0,537	-0,508	-0,655	-0,538	-0,508	-
	σ_{tt}^{out}	-0,345	-0,462	-0,492	-0,346	-0,463	-0,492	-
	σ_{tt}^{midl}	-0,500	-0,500	-0,500	-0,500	-0,500	-0,500	-0,500
	N_{ϕ}^{22}	-0,10003	-0,10001	-0,10000	-0,09997	-0,09999	-0,10000	-0,10000

Результаты повариантных расчетов были сведены в таблицу 3.5, в которую в зависимости от степени измельчения сетки были внесены значения напряжений на внутренней σ_{tt}^{in} , наружной σ_{tt}^{out} и срединной σ_{tt}^{midl} поверхностях арки, среднее арифметическое их абсолютных значений $\sigma_{tt}^{midl} = (|\sigma_{tt}^{in}| + |\sigma_{tt}^{out}|) / 2$, а также значения изгибающего момента M_{ϕ}^{22} в точке приложения силы P и продольной силы N_{ϕ}^{22} в точке шарнирного опирания.

Из таблицы 3.5 следует, что результаты расчетов круговой арки в обоих вариантах практически одинаковы. Наблюдается быстрая сходимость численных значений нормальных напряжений σ_{tt} , изгибающего момента и продольной силы к их аналитическим значениям.

Если перейти к расчету двухшарнирной арки эллиптического профиля (Рис. 3.7), то результаты повариантных расчетов кардинально меняются. Это следует из анализа таблицы 3.6, в которой представлены результаты расчетов арки с параметрами эллипса $a=5,0$ м; $b=1,0$ м при прочих данных, равными: $P=2$ Н; $h=0,02$ м; $E=2 \cdot 10^5$ МПа; $\nu=0,3$.

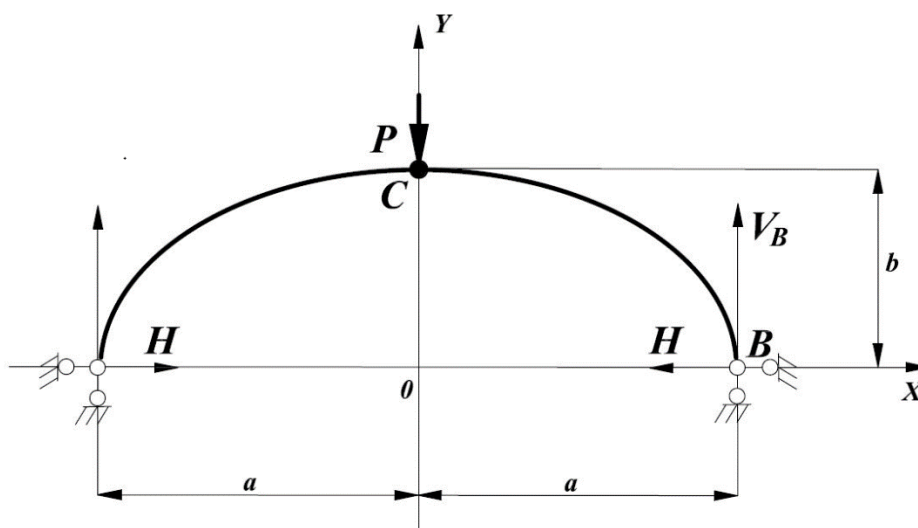


Рисунок 3.7 – Расчетная схема двухшарнирной арки эллиптического профиля

В первом варианте в точке приложения силы P не удалось достигнуть решения, совпадающего с аналитическим решением, полученным по методу сил, несмотря на относительную сходимость вычислительного процесса даже при

значительном сгущении сетки. В точке шарнирного опирания значения σ_{tt}^{midl} и N_{ϕ}^{22} совпадают с аналитическими значениями, начиная с сетки узлов 201×2 . Однако, следует отметить, что эти значения на порядки меньше значений контролируемых прочностных параметров в точке приложения силы P .

Таблица 3.6 – Значения контролируемых параметров НДС эллиптической арки

Коор- дина- ты точек, x , м; t , рад.	На- пря- жения σ_{tt} , H/cm^2 ; M_{ϕ}^{22} , $H \cdot м$; N_{ϕ}^{22} , Н	Варианты узловых силовых неизвестных							Анали- тичес- кое реше- ние
		$I \left(N^{\alpha\beta}, M^{\alpha\beta} \right)$				$II(\varepsilon_{\alpha\beta}, \aleph_{\alpha\beta})$			
		Сетка дискретизации							
		201×2	301×2	401×2	501×2	51×2	101×2	201×2	
$x=0,0$; $t = 0.0$	M_{ϕ}^{22}	-7,693	-7,675	-7,729	-7,837	-1,624	-1,624	-1,624	-1,619
	σ_{tt}^{in}	1154,5	1151,3	1159,9	1176,2	242,01	242,05	242,06	-
	σ_{tt}^{out}	-1153,4	-1150,6	-1158,8	-1174,9	-245,19	-245,23	-245,24	-
	σ_{tt}^{midl}	1154,0	1151,0	1159,4	1175,6	243,6	243,64	243,65	242,85
$x=5,0$; $t = \frac{\pi}{2}$	σ_{tt}^{midl}	-0,499	-0,500	-0,500	-0,500	-0,458	-0,481	-0,497	-0,500
	N_{ϕ}^{22}	-0,998	-1,001	-1,001	-1,001	-0,916	-0,962	-0,994	-1,000

Во втором варианте в точке приложения нагрузки можно констатировать абсолютную сходимость вычислений даже при редкой сетке узлов и практическое совпадение значений изгибающего момента и напряжений с их аналитическими значениями. Погрешность вычисления M_{ϕ}^{22} составила 0,3 %. Учитывая вышеизложенное можно сделать вывод о несомненных преимуществах второго варианта расчёта, в силу чего именно данный вариант следует рекомендовать к применению при расчете конструкций эллиптического профиля.

3.6.2. Пример расчёта эллиптического кольца

при вариативном использовании силовых узловых неизвестных

Была решена задача по расчету эллиптического кольца, подвергающегося растяжению (рис. 3.8) силами $P=0,1\text{Н}$. Параметры эллипса были приняты равными: $a=0,9\text{ м}$, величина b варьировалась от $0,9\text{ м}$ до $0,36\text{ м}$. Прочие исходные данные имели следующие значения: $E=2\cdot 10^5\text{ МПа}$; $\nu=0.3$; $h=0,002\text{ м}$. Соотношение параметров эллипса a/b варьировалось от 1 до 2,5.

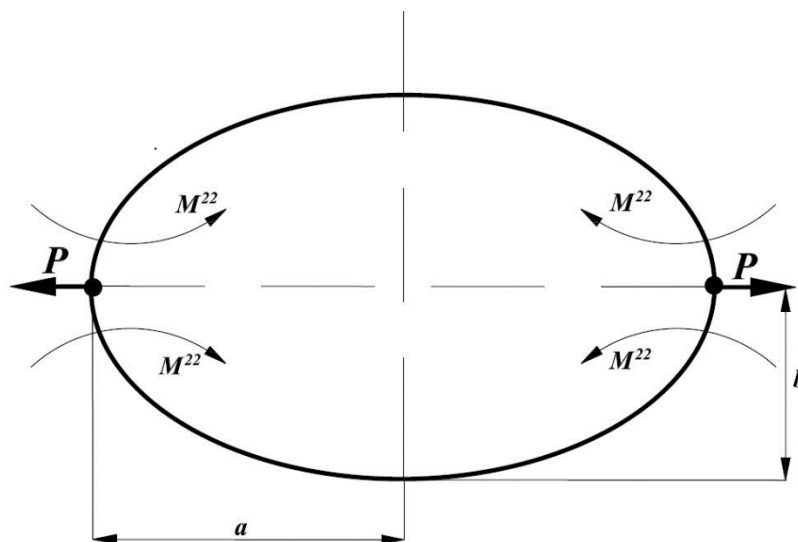


Рисунок 3.8 – Расчетная схема эллиптического кольца

Исходя из наличия осей симметрии рассчитывалась $\frac{1}{4}$ часть кольца. Результаты расчетов приведены в таблице 3.7, в которой представлены численные значения нормальных напряжений σ_{tt} , а также изгибающего момента в точках приложения силы P в зависимости от соотношения a/b . В нижней крайней строке приведены значения изгибающего момента, вычисленные по формулам сопротивления материалов [17], и величина нормального напряжения, полученные по формуле $\sigma_{tt} = M_{\phi}^{22} / W$, где $W = bh^2/6$ – момент сопротивления поперечного сечения.

Как следует из таблицы 3.7, при расчете кругового кольца ($a/b=1$) контролируемые параметры НДС в первом и втором вариантах имели примерно

одни и те же значения. Однако, в случае расчета растягиваемого эллиптического кольца ($a/b \neq 1$) результаты первого варианта оказались неудовлетворительными.

Таблица 3.7 – Значения контролируемых параметров НДС
эллиптического кольца

Напря- жения σ_{tt} , Н/см ² ; момент M_{ϕ}^{22} , Н·см	Варианты силовых узловых неизвестных									
	I $\left(N^{\alpha\beta}, M^{\alpha\beta}\right)$					II $\left(\varepsilon_{\alpha\beta}, \aleph_{\alpha\beta}\right)$				
	Соотношение параметров эллипса a/b									
	1,0	1,5	2,5		1,0	1,5	2,5			
	Сетка узлов дискретизации									
	101×2	101×2	201×2	301×2	401×2	101×2	101×2	201×2	301×2	401×2
σ_{tt}^{in}	-857,8	-41,92	-917,0	-17,78	-217,9	-860,4	-612,5	-612,5	-393,3	-393,4
σ_{tt}^{out}	861,0	42,27	924,7	18,19	223,1	858,5	609,4	609,4	387,9	387,9
M_{ϕ}^{22}	5,73	0,28	6,14	0,12	1,47	5,73	4,07	4,07	2,60	2,60
M_{ϕ}^{22} , [17]	5,724	4,086		2,610		5,724	4,086		2,610	
$\sigma_{tt} = \frac{M_{\phi}^{22}}{W}$	858,6	612,9		391,5		858,6	612,9		391,5	

И напротив, во втором варианте расчета удалось получить сходящиеся значения напряжений σ_{tt} и момента M_{ϕ}^{22} , которые совпадают с допустимой погрешностью с результатами, взятыми из справочника по сопротивлению материалов [17].

Основываясь на анализе результатов вышеприведенных численных экспериментов, можно сделать вывод, что при расчете оболочек эллипсоидального профиля необходимо в качестве силовых узловых неизвестных

использовать деформации и искривления срединной поверхности оболочки и применять ЧЭД, матрицы жесткости которого komponуются в соответствии с п. 3.6.5.

3.6.3. Пример расчёта кругового полукольца при использовании различных формулировок МКЭ

Была решена задача по исследованию полукольца, имеющего шарнирно-неподвижные опоры в верхних точках B и B' (Рис. 3.9), растягиваемого распределенной нагрузкой $q=100$ Н/м. Исходные данные были приняты равными: $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\nu=0,3$; $L=0,01$ м; толщина стенки $h=0,02$ м;

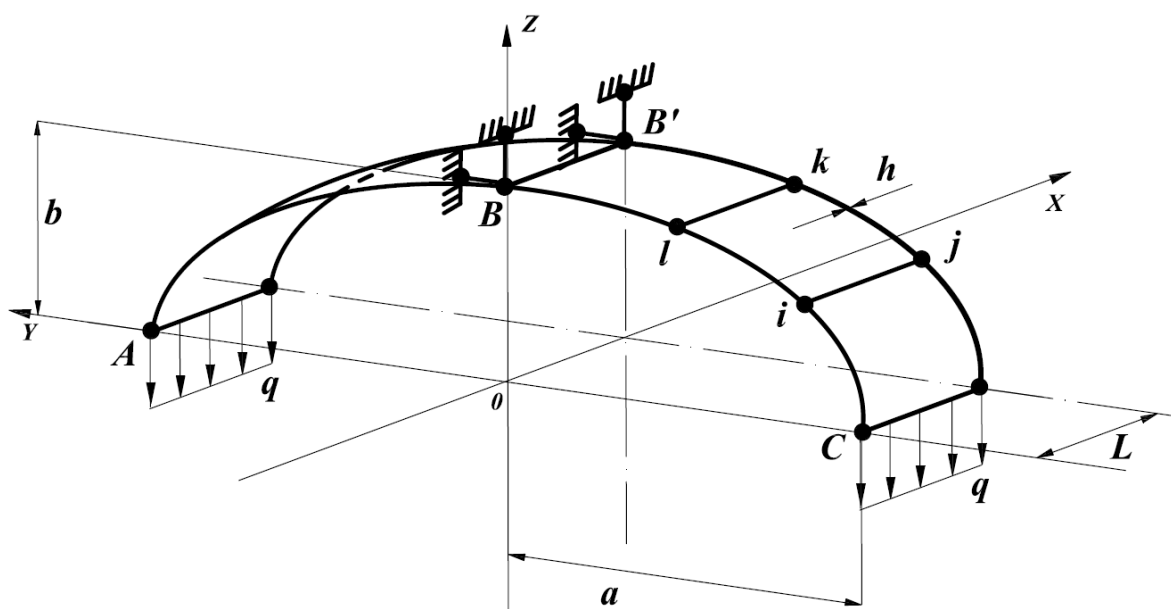


Рис. 3.9 – Расчетная схема оболочки в форме полукольца

На первом этапе полукольцо имело круговую форму с радиусом, равным 0,5 м. Расчеты полукольца осуществлялись вариативным образом по двум формулировкам МКЭ – в форме метода перемещений [66, 68] (первый вариант) и в смешанной формулировке (второй вариант), в которой был использован смешанный ЧЭД, разработанный в 3.6. Результаты повариантных расчетов показаны в таблице 3.8. В качестве контролируемых параметров НДС были выбраны значения напряжений на внутренней σ_{tt}^{in} , внешней σ_{tt}^{out} и срединной

σ_{tt}^{midl} поверхностях полукольца, и величина силы N_{22} в узлах А и С (Рис. 3.9) при различных параметрах сетки. С целью контроля в таблицу 3.8 включен столбец с аналитическим решением.

Таблица 3.8 – Значения напряжений и силы
в точках приложения нагрузки в круговом цилиндре

Координаты точек x , см; t , рад	σ , Н/см ² ; N_{22} , Н	Варианты формулировок МКЭ						Аналитическое решение
		Метод перемещений			Смешанная формулировка			
		Сетка узлов дискретизации						
		101×2	151×2	201×2	101×2	151×2	201×2	
Точка А: $x=0.00$ $t=-\frac{\pi}{2}$	σ_{tt}^{in}	6,190	5,470	5,250	5,600	5,250	5,130	-
	σ_{tt}^{out}	4,490	4,720	4,830	4,400	4,750	4,870	-
	σ_{tt}^{midl}	5,340	5,100	5,040	5,000	5,000	5,000	5,000
	N_{22}	1,0672	1,0191	1,0079	0,9998	0,9999	1,0000	1,0000
Точка С: $x=0.00$ $t=\frac{\pi}{2}$	σ_{tt}^{in}	6,290	5,500	5,250	5,600	5,250	5,130	-
	σ_{tt}^{out}	4,400	4,690	4,830	4,400	4,750	4,870	-
	σ_{tt}^{midl}	5,340	5,100	5,040	5,000	5,000	5,000	5,000
	N_{22}	1,0681	1,0192	1,0079	0,9998	0,9999	1,0000	1,0000

Сравнительный анализ табличных значений позволяет сделать вывод об удовлетворительной скорости сходимости численных значений контролируемых параметров НДС (к аналитическому решению) в обоих вариантах расчета при несколько более высокой точности вычислений второго варианта.

3.6.4. Пример расчёта эллиптического полукольца с соотношением параметров эллипса 1,25 при использовании различных формулировок МКЭ

В данном примере было рассчитано полукольцо эллиптического профиля при соотношении параметров $a/b=0,5м/0,4м=1,25$. Прочие исходные данные совпадают с данными предыдущего примера. Результаты расчетов были сведены в таблицу 3.9.

Таблица 3.9 – Значения нормальных напряжений и продольной силы
в точках приложения нагрузки в эллиптическом цилиндре при $a/b = 1.25$

Координаты точек x , см; t , рад	σ , Н/см ² ; N_{22} , Н	Метод перемещений					Анали- тическое решение
		Сетка узлов дискретизации					
		101×2	201×2	301×2	351×2	401×2	
Точка А: $x=0.00$ $t=-\frac{\pi}{2}$	σ_{tt}^{in}	6,013	5,578	5,333	5,246	5,133	-
	σ_{tt}^{out}	-2,489	3,837	3,854	4,345	4,869	-
	σ_{tt}^{midl}	1,735	4,702	4,453	4,793	5,000	5,000
	N_{22}	0,347	0,940	0,8905	0,9586	1,000	1,000
Точка С: $x=0.00$ $t=\frac{\pi}{2}$	σ_{tt}^{in}	6,015	5,492	5,233	5,181	5,196	-
	σ_{tt}^{out}	-2,484	3,152	5,246	4,841	4,540	-
	σ_{tt}^{midl}	1,739	4,315	5,239	5,010	4,866	5,000
	N_{22}	0,349	0,863	1,049	1,002	0,9733	1,000
Координаты точек x , см; t , рад	σ , Н/см ² ; N_{22} , Н	Смешанная формулировка				Анали- тическое решение	
		Сетка узлов дискретизации					
		101×2	201×2	251×2	301×2		
Точка А: $x=0.00$ $t=-\frac{\pi}{2}$	σ_{tt}^{in}	5,588	5,123	5,068	5,037	-	
	σ_{tt}^{out}	4,416	4,877	4,933	4,963	-	
	σ_{tt}^{midl}	4,999	5,000	5,000	5,000	5,000	
	N_{22}	0,9997	1,000	1,000	1,000	1,000	
Точка С: $x=0.00$ $t=\frac{\pi}{2}$	σ_{tt}^{in}	5,588	5,123	5,068	5,037	-	
	σ_{tt}^{out}	4,416	4,877	4,933	4,963	-	
	σ_{tt}^{midl}	4,999	5,000	5,000	5,000	5,000	
	N_{22}	0,9997	1,000	1,000	1,000	1,000	

Анализ данных приведенных в таблице 3.9 показывает, что использование метода перемещений приводит к существенно меньшей скорости сходимости вычислений, чем смешанная формулировка даже при значительном измельчении сетки дискретизации.

3.6.5. Пример расчёта эллиптического полукольца с соотношением параметров эллипса 2,5 при использовании различных формулировок МКЭ

Если соотношение параметров эллипса полукольца принять равным $a/b = 2,5\text{м}/1,0\text{м} = 2,5$, то кривизна поверхности полукольца пропорционально увеличится по сравнению с кривизной полукольца, рассчитанного в предыдущем примере.

Таблица 3.10 – Значения нормальных напряжений и продольной силы в точках приложения нагрузки в эллиптическом полукольца при $a/b = 2,5$

Координаты точек x , см; t , рад	σ , Н/см^2 ; N_{22} , Н	Метод перемещений					Анали- тическое решение
		Сетка узлов дискретизации					
		101×2	201×2	301×2	401×2	501×2	
Точка А: $x=0.00$ $t=-\frac{\pi}{2}$	σ_{tt}^{in}	-684,21	-43,57	3,55	16,13	14,16	-
	σ_{tt}^{out}	-1761,9	-281,33	-117,14	-30,65	35,95	-
	σ_{tt}^{midl}	-1236,7	-165,45	-58,31	-7,85	25,33	10,000
	N_{22}	-1236,7	-165,45	-58,31	-7,85	25,33	10,000
Точка С : $x=0.00$ $t = \frac{\pi}{2}$	σ_{tt}^{in}	-683,95	-45,47	12,30	14,73	17,93	-
	σ_{tt}^{out}	-1761,4	-286,83	-71,72	-51,12	-74,80	-
	σ_{tt}^{midl}	-1236,3	-169,19	-30,76	-19,02	-29,60	10,000
	N_{22}	-1236,3	-169,19	-30,76	-19,02	-29,60	10,000
Координаты точек x , см; t , рад	σ , Н/см^2 ; N_{22} , Н	Смешанная формулировка				Анали- тическое решение	
		Сетка узлов дискретизации					
		101×2	151×2	201×2	251×2		
Точка А: $x=0.00$ $t=-\frac{\pi}{2}$	σ_{tt}^{in}	11,00	10,30	10,06	9,95	-	
	σ_{tt}^{out}	9,02	9,70	9,94	10,05	-	
	σ_{tt}^{midl}	9,99	9,996	10,00	10,001	10,000	
	N_{22}	9,99	9,996	10,00	10,001	10,000	
Точка С : $x=0.00$ $t = \frac{\pi}{2}$	σ_{tt}^{in}	11,00	10,30	10,06	9,95	-	
	σ_{tt}^{out}	9,02	9,70	9,94	10,05	-	
	σ_{tt}^{midl}	9,99	9,996	10,00	10,001	10,000	
	N_{22}	9,99	9,996	10,00	10,001	10,000	

Результаты повариантных расчетов полукольца при $a/b = 2,5$ и $q=10$ Н/см сведены в таблицу 3.10.

Анализируя верхнюю часть таблицы 3.10, в которой приведены значения контролируемых параметров НДС при использовании алгоритма МКЭ, скомпонованного на основе метода перемещений, можно сделать вывод о том, что данные результаты являются абсолютно неприемлемыми вследствие недопустимо высокой погрешности вычислений, несмотря на весьма существенное измельчение сетки узлов (значения напряжений в точке А имеют даже противоположный знак). И, напротив, из анализа нижней части таблицы 3.10, в которой приведены значения напряжений и продольной силы, полученные во втором варианте расчета, следует, что использование разработанного смешанного ЧЭД позволяет обеспечить высокую скорость сходимости вычислений значений напряжений и сил к их точным аналитическим значениям даже при относительно крупной сетке узлов.

Основываясь на результатах представленных выше численных экспериментов можно сформулировать следующие выводы.

1. При решении задач, связанных с определением НДС оболочек с эллиптическим поперечным сечением, в качестве наиболее эффективного инструмента исследования следует признать разработанный в п. 3.6 смешанный вариант МКЭ. Основой данного варианта является ЧЭД, матрица жесткости которого скомпонована путем минимизации предложенного функционала по кинематическим (перемещения и их производные) и силовым (деформации и искривления срединной поверхности) искомым параметрам.
2. Эффективное применение к решению задач расчета оболочек эллиптического поперечного сечения МКЭ в форме метода перемещений возможно лишь в тех случаях, когда кривизна поверхности незначительна (пологая оболочка). В случае если кривизна поверхности оболочки существенна, использование формулировки МКЭ, реализующего метод перемещений, приводит к неприемлемо высокой погрешности вычислений, и результаты расчетов в этом случае не могут быть признаны удовлетворительными.

3.7. Трехпольный вариант МКЭ в смешанной формулировке

Оптимальным вариантом МКЭ при анализе НДС оболочечных конструкций представляется алгоритм, в котором имелась бы возможность после решения глобальной СЛАУ одновременно получать полный спектр прочностных параметров оболочки, включающий в себя кинематические (перемещения и их производные), силовые (продольные силы и изгибающие моменты) и деформационные (деформации и искривления срединной поверхности) узловые неизвестные.

Для достижения обозначенной цели предлагается использовать функционал, который можно интерпретировать как функционал Лагранжа для тонкой оболочки с дополнительным условием

$$\begin{aligned} \Phi_{LU} = & \frac{1}{2} \int_F \{S^{\alpha\beta}\}_{1 \times 6}^T \{\varepsilon_{\alpha\beta}\}_{6 \times 1} dF - \frac{1}{2} \int_F \{U\}_{1 \times 3}^T \{P\}_{3 \times 1} dF - \\ & - \frac{1}{2} \int_F \{\varepsilon_{\alpha\beta}\}_{1 \times 6}^T \left(\{S^{\alpha\beta}\}_{6 \times 1} - [h]_{6 \times 6} \{\varepsilon_{\alpha\beta}\}_{6 \times 1} \right) dF, \end{aligned} \quad (3.7.1)$$

где $\{S^{\alpha\beta}\}_{1 \times 6}^T = \{N^{11} N^{22} N^{12} M^{11} M^{22} M^{12}\}$ – матрица-строка продольных сил и изгибающих моментов; $\{\varepsilon_{\alpha\beta}\}_{1 \times 6}^T = \{\varepsilon_{11} \varepsilon_{22} 2\varepsilon_{12} \kappa_{11} \kappa_{22} 2\kappa_{12}\}$ – матрица-строка деформаций и искривлений срединной поверхности.

Входящая в (3.7.1) матрица $[h]_{6 \times 6}$ представляет собой матрицу перехода от $\{S^{\alpha\beta}\}_{6 \times 1}$ к $\{\varepsilon_{\alpha\beta}\}_{6 \times 1}$

$$\{S^{\alpha\beta}\}_{6 \times 1} = [h]_{6 \times 6} \{\varepsilon_{\alpha\beta}\}_{6 \times 1}. \quad (3.7.2)$$

Компонуется матрица $[h]_{6 \times 6}$ на основе следующих зависимостей

$$\{N^{\alpha\beta}\}_{3 \times 1} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{\sigma^{\alpha\beta}\}_{3 \times 1} d\zeta = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [C_\sigma]_{3 \times 3}^T [\Gamma_\varepsilon]_{3 \times 6} d\zeta \{\varepsilon_{\alpha\beta}\}_{6 \times 1} = [\alpha]_{3 \times 6} \{\varepsilon_{\alpha\beta}\}_{6 \times 1};$$

$$\{M^{\alpha\beta}\}_{3 \times 1} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{\sigma^{\alpha\beta}\}_{3 \times 1} \zeta d\zeta = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [C_\sigma]_{3 \times 3}^T [\Gamma_\varepsilon]_{3 \times 6} \zeta d\zeta \{\varepsilon_{\alpha\beta}\}_{6 \times 1} = [\beta]_{3 \times 6} \{\varepsilon_{\alpha\beta}\}_{6 \times 1}. \quad (3.7.3)$$

Таким образом матрица $[h]_{6 \times 6}$ может быть представлена в виде

$$[h]_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} [\alpha]_{3 \times 6} \\ [\beta]_{3 \times 6} \end{bmatrix}. \quad (3.7.4)$$

Функционал (3.7.1) с учетом аппроксимирующих выражений (3.6.4) для силовых $\{S^{\alpha\beta}\}_{6 \times 1}$ и деформационных $\{\varepsilon_{\alpha\beta}\}_{6 \times 1}$ искомым параметром, а также соотношений Коши (2.25), (2.26) и зависимости (3.7.2) может быть преобразован к виду

$$\begin{aligned} \Phi_{LU} &= \frac{1}{2} \int_F \{S^{\alpha\beta}\}_{1 \times 6}^T \{\varepsilon_{\alpha\beta}\}_{6 \times 1} dF - \frac{1}{2} \int_F \{U\}_{1 \times 3}^T \{P\}_{3 \times 1} dF - \\ &- \frac{1}{2} \int_F \{\varepsilon_{\alpha\beta}\}_{1 \times 6}^T \{S^{\alpha\beta}\}_{6 \times 1} dF + \frac{1}{2} \int_F \{\varepsilon_{\alpha\beta}\}_{1 \times 6}^T [h]_{6 \times 6} \{\varepsilon_{\alpha\beta}\}_{6 \times 1} dF = \\ &= \frac{1}{2} \{S^{\alpha\beta}\}_{1 \times 24}^T \int_F [H]_{24 \times 6}^T [h]_{6 \times 6}^{-1} [H]_{6 \times 24} dF \{S^{\alpha\beta}\}_{24 \times 1} - \\ &- \frac{1}{2} \{U^G\}_{1 \times 36}^T [P_R]_{36 \times 36}^T \int_F [A]_{36 \times 3}^T \{P\}_{3 \times 1} dF - \frac{1}{2} \{S^{\alpha\beta}\}_{1 \times 24}^T \int_F [H]_{24 \times 6}^T [H]_{6 \times 24} dF \{\varepsilon_{\alpha\beta}\}_{24 \times 1} + \\ &+ \frac{1}{2} \{\varepsilon_{\alpha\beta}\}_{1 \times 24}^T \int_F [H]_{24 \times 6}^T [h]_{6 \times 6} [B]_{6 \times 36} dF [P_R]_{36 \times 36} \{U^G\}_{36 \times 1} \end{aligned} \quad (3.7.5)$$

или в более компактном виде

$$\begin{aligned} \Phi_{LU} &= \frac{1}{2} \{S^{\alpha\beta}\}_{1 \times 24}^T [a]_{24 \times 24} \{S^{\alpha\beta}\}_{24 \times 1} - \frac{1}{2} \{U^G\}_{1 \times 36}^T \{f_y^G\}_{36 \times 1} - \frac{1}{2} \{S^{\alpha\beta}\}_{1 \times 24}^T [b]_{24 \times 24}^T \{\varepsilon_{\alpha\beta}\}_{24 \times 1} + \\ &+ \frac{1}{2} \{\varepsilon_{\alpha\beta}\}_{1 \times 24}^T [d]_{24 \times 36} \{U^G\}_{36 \times 1}, \end{aligned} \quad (3.7.6)$$

где

$$[a]_{24 \times 24} = \int_F [H]_{24 \times 6}^T [h]_{6 \times 6}^{-1} [H]_{6 \times 24} dF; [b]_{24 \times 24}^T = \int_F [H]_{24 \times 6}^T [H]_{6 \times 24} dF;$$

$$[d]_{24 \times 36} = \int_F [H]_{24 \times 6}^T [h]_{6 \times 6} [B]_{6 \times 36} dF [P_R]_{36 \times 36}.$$

Применяя к (3.7.6) операцию минимизации по $\{S^{\alpha\beta}\}_y^T$ можно получить

следующее выражение

$$\partial\Phi_{LU}/\partial\{S^{\alpha\beta}\}_y^T \equiv [a]_{24 \times 24} \{S^{\alpha\beta}\}_y - [b]_{24 \times 24}^T \{\varepsilon\kappa_{\alpha\beta}\}_y = 0. \quad (3.7.7)$$

Для того, чтобы выполнить минимизацию функционала (3.7.6) по $\{\varepsilon\kappa_{\alpha\beta}\}_y^T$

последний представим в следующем виде

$$\begin{aligned} \Phi_{LU} = & \frac{1}{2} \{S^{\alpha\beta}\}_y^T [a]_{24 \times 24} \{S^{\alpha\beta}\}_y - \frac{1}{2} \{U^G\}_{1 \times 36}^T \{f_y^G\}_{36 \times 1} - \frac{1}{2} \{\varepsilon\kappa_{\alpha\beta}\}_y^T [b]_{24 \times 24} \{S^{\alpha\beta}\}_y + \\ & + \frac{1}{2} \{\varepsilon\kappa_{\alpha\beta}\}_y^T [d]_{24 \times 36} \{U^G\}_{36 \times 1}, \end{aligned} \quad (3.7.8)$$

В результате минимизации (3.7.8) по $\{\varepsilon\kappa_{\alpha\beta}\}_y^T$ можно получить следующее

матричное уравнение

$$\partial\Phi_{LU}/\partial\{\varepsilon\kappa_{\alpha\beta}\}_y^T \equiv - [b]_{24 \times 24} \{S^{\alpha\beta}\}_y + [d]_{24 \times 36} \{U^G\}_{36 \times 1} = 0. \quad (3.7.9)$$

Для осуществления минимизации функционала по кинематическим узловым неизвестным $\{U^G\}_{1 \times 36}^T$ запишем функционал (3.7.6) в виде

$$\begin{aligned} \Phi_{LU} = & \frac{1}{2} \{S^{\alpha\beta}\}_y^T [a]_{24 \times 24} \{S^{\alpha\beta}\}_y - \frac{1}{2} \{U^G\}_{1 \times 36}^T \{f_y^G\}_{36 \times 1} - \frac{1}{2} \{S^{\alpha\beta}\}_y^T [b]_{24 \times 24} \{\varepsilon\kappa_{\alpha\beta}\}_y + \\ & + \frac{1}{2} \{U^G\}_{1 \times 36}^T [d]_{24 \times 36} \{\varepsilon\kappa_{\alpha\beta}\}_y. \end{aligned} \quad (3.7.10)$$

Выполняя минимизацию (3.7.10) по $\{U^G\}_{1 \times 36}^T$ можно получить матричное

уравнение вида

$$\partial\Phi_{LU}/\partial\{U^G\}_{1\times 36}^T \equiv -\{f_y^G\}_{36\times 1} + [d]_{36\times 24}^T \{\varepsilon\kappa_{\alpha\beta}\}_{24\times 1}_y = 0. \quad (3.7.11)$$

Таким образом после выполнения минимизации функционала (3.7.5) по силовым $\{S^{\alpha\beta}\}_{1\times 24}_y^T$, деформационным $\{\varepsilon\kappa_{\alpha\beta}\}_{1\times 24}_y^T$ и кинематическим $\{U^G\}_{1\times 36}^T$ искомым узловым неизвестным можно записать следующую систему матричных уравнений

$$\begin{cases} [a]_{24\times 24} \{S^{\alpha\beta}\}_{24\times 1}_y - [b]_{24\times 24}^T \{\varepsilon\kappa_{\alpha\beta}\}_{24\times 1}_y = 0; \\ -[b]_{24\times 24} \{S^{\alpha\beta}\}_{24\times 1}_y + [d]_{24\times 36} \{U^G\}_{36\times 1} = 0; \\ -\{f_y^G\}_{36\times 1} + [d]_{36\times 24}^T \{\varepsilon\kappa_{\alpha\beta}\}_{24\times 1}_y = 0. \end{cases} \quad (3.7.12)$$

Для решения системы (3.7.12) воспользуемся методом подстановки.

Из второго уравнения (3.7.12) выразим столбец силовых узловых неизвестных

$$\{S^{\alpha\beta}\}_{24\times 1}_y = [b]_{24\times 24}^{-1} [d]_{24\times 36} \{U^G\}_{36\times 1}. \quad (3.7.13)$$

Первое уравнение системы (3.7.12) с учетом (3.7.13) запишется в виде

$$[a]_{24\times 24} [b]_{24\times 24}^{-1} [d]_{24\times 36} \{U^G\}_{36\times 1} - [b]_{24\times 24}^T \{\varepsilon\kappa_{\alpha\beta}\}_{24\times 1}_y = 0. \quad (3.7.14)$$

Из (3.7.14) можно выразить столбец деформационных узловых неизвестных

$$\{\varepsilon\kappa_{\alpha\beta}\}_{24\times 1}_y = \left[[b]_{24\times 24}^T \right]^{-1} [a]_{24\times 24} [b]_{24\times 24}^{-1} [d]_{24\times 36} \{U^G\}_{36\times 1}. \quad (3.7.15)$$

Выполняя подстановку (3.7.15) в третье уравнение системы (3.7.12) можно получить следующее матричное уравнение

$$[d]_{36\times 24}^T \left[[b]_{24\times 24}^T \right]^{-1} [a]_{24\times 24} [b]_{24\times 24}^{-1} [d]_{24\times 36} \{U^G\}_{36\times 1} = \{f_y^G\}_{36\times 1} \quad (3.7.16)$$

или в более компактном виде

$$[K]_{36\times 36} \{U^G\}_{36\times 1} = \{f_y^G\}_{36\times 1}, \quad (3.7.17)$$

где $[K]_{36 \times 36} = [d]_{36 \times 24}^T [b]_{24 \times 24}^{-1} [a]_{24 \times 24} [b]_{24 \times 24}^{-1} [d]_{24 \times 36}$ – матрица жесткости четырехузлового элемента дискретизации в варианте трёхпольного смешанного МКЭ, $\{f_y^G\}_{36 \times 1}$ – столбец узловых усилий элемента дискретизации.

Матрица жесткости и столбец узловых усилий оболочечной конструкции в целом komponуются из $[K]_{36 \times 36}$ и $\{f_y^G\}_{36 \times 1}$ каждого из элементов дискретизации, которыми моделируется исследуемая конструкция посредством глобальной матрицы индексов согласно общепринятым в МКЭ [98, 99] способом.

В результате решения матричного уравнения (3.7.17) находятся кинематические узловые неизвестные $\{U^G\}_{36 \times 1}$.

Далее путем подстановки найденного столбца $\{U^G\}_{36 \times 1}$ в (3.7.13) можно вычислить искомые силовые неизвестные в виде продольных сил $N^{\alpha\beta}$ и изгибающих моментов $M^{\alpha\beta}$.

Деформации и искривления срединной поверхности в узловых точках сетки дискретизации $\{\varepsilon_{\alpha\beta}\}_y$ могут быть получены из соотношения $_{24 \times 1}$

$$\{\varepsilon_{\alpha\beta}\}_y = [b]_{24 \times 24}^{-1} [a]_{24 \times 24} \{S^{\alpha\beta}\}_y. \quad (3.7.18)$$

Контравариантные компоненты тензора напряжений в предлагаемом трехпольном варианте смешанного МКЭ могут быть вычислены двумя способами, первый из которых предусматривает использование следующей формулы

$$\sigma^{\alpha\beta} = \frac{N^{\alpha\beta}}{F} + \frac{\zeta M^{\alpha\beta}}{I}, \quad (3.7.19)$$

где $F = b \cdot h$; $I = bh^3/12$ – площадь и момент инерции поперечного сечения оболочечной конструкции ($b = 1$).

Второй способ подразумевает использование найденного столбца деформаций и искривлений срединной поверхности $\{\varepsilon_{\alpha\beta}\}_y$. Для этого $_{24 \times 1}$

осуществляется переход к деформациям произвольного слоя оболочечной конструкции по формуле

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{\zeta} = \varepsilon_{\alpha\beta} + \zeta \kappa_{\alpha\beta} \quad (3.7.20)$$

и последующее использование закона Гука в матричной формулировке (2.46)

$$\left\{ \sigma^{\alpha\beta} \right\}_{3 \times 1} = [C_{\sigma}]_{3 \times 3} \left\{ \varepsilon_{\alpha\beta}^{\zeta} \right\}_{3 \times 1}. \quad (3.7.21)$$

Таким образом в предложенном трехпольном варианте смешанного МКЭ открывается возможность дополнительного корректного контроля правильности вычислений значений напряжений в интересующих точках исследуемой оболочечной конструкции.

Для верификации разработанного трёхпольного варианта смешанного МКЭ был выполнен ряд численных экспериментов по определению НДС оболочечных конструкций, позволяющих выполнить сравнительный анализ конечно-элементных решений с решениями, полученными аналитическим путем исходя из условия статического равновесия и по формулам сопротивления материалов [17], решениями других авторов [106].

3.7.1. Пример расчёта эллиптического цилиндра

под внутренним давлением

Был рассчитан консольный фрагмент эллиптического цилиндра с жестко заземленной левой образующей (рис. 3.10). Исходные данные были приняты следующими: $b = 0.5$ м; $c = 0.4$ м; $h = 0.01$ м; $L = 0.01$ м; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; коэффициент поперечной деформации $\nu = 0.3$; $q = 0.2$ Н/см².

Выбранная расчетная схема позволяет аналитическим способом вычислить момент M_{ϕ}^{22} в произвольной точке рассчитываемого фрагмента. С этой целью разложим давление q на его составляющие q_v и q_z (Рис.3.11). Например, в точке K величину M_{ϕ}^{22} можно вычислить применяя следующую формулу

$$M_{\phi}^{22} = q_v z^2 / 2 + q_z (b - y)^2 / 2. \quad (3.7.22)$$

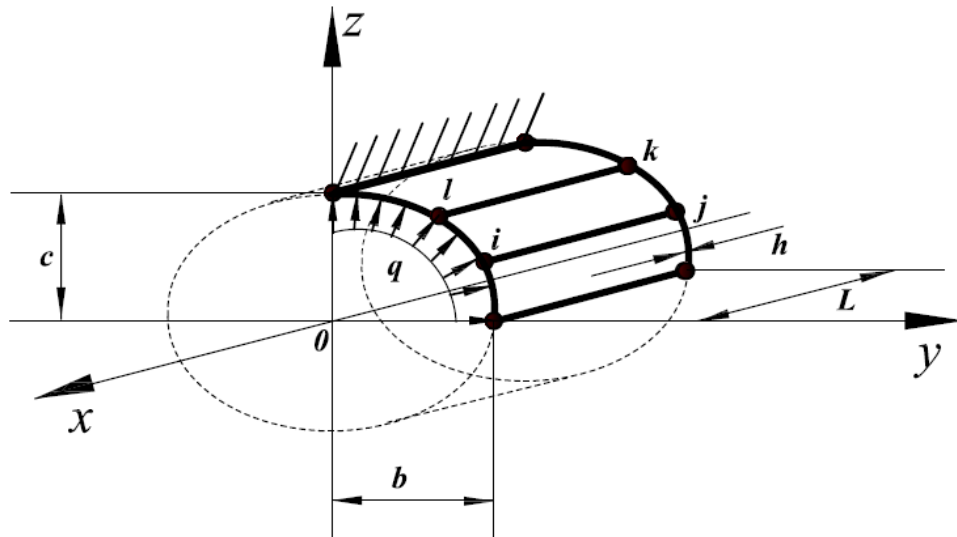


Рисунок 3.10 – Расчетная схема эллиптического цилиндра, нагруженного внутренним давлением

В опорном сечении значение момента M_{ϕ}^{22} будет равно

$$M_{\phi}^{22} = 0,2 \cdot 40^2 / 2 + 0,2 \cdot 50^2 / 2 = 160 + 250 = 410 \text{ Н} \cdot \text{см} = 4,1 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

В точке K с координатами $y = b/\sqrt{2}$, $z = c/\sqrt{2}$ значение момента M_{ϕ}^{22} равно

$$M_{\phi}^{22} = 0,2 \cdot (40/\sqrt{2})^2 / 2 + 0,2 \cdot (50 - 50/\sqrt{2})^2 / 2 = 1,01447 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

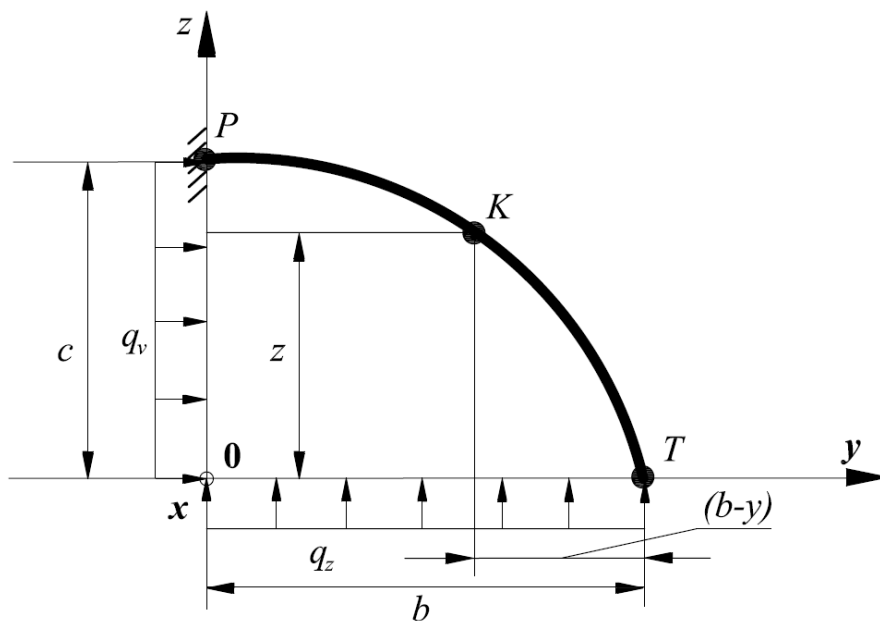


Рисунок 3.11 – Расчетная схема сечения эллиптического цилиндра

В таблице 3.11 даются значения «физических» моментов M_{ϕ}^{22} и нормальных напряжений в точках P , K , T расчетной схемы эллиптического цилиндра (Рис. 3.11).

Значения нормальных напряжений были вычислены по формуле (3.7.21), т.е. с использованием ранее полученных значений деформаций и искривлений $\{\varepsilon N_{\alpha\beta}\}_y$. С целью контроля корректности получаемых в процессе решения параметров НДС в правой крайний столбец таблицы 3.11 помещены значения M_{ϕ}^{22} , вычисленные выше в соответствии с (3.7.22). Нормальные напряжения при этом были получены по формуле сопротивления материалов $\sigma = M_{\phi}^{22}/W$ [17].

Таблица 3.11 – Значения контролируемых параметров НДС
в консольном фрагменте

Координаты точек, y ; t	Моменты M_{ϕ}^{22} , Н·м, напряжения σ , МПа	Сетка дискретизации				Аналитическое решение M_{ϕ}^{22} , Н·м, $\sigma = M_{\phi}^{22}/W$
		31×2	61×2	91×2	121×2	
Жесткая заделка, $y = 0$, $t = 0$	M_{ϕ}^{22}	4,099	4,0998	4,0998	4,09994	4,10
	σ_{tt}^{in}	24,88	24,88	24,88	24,88	24,6
	σ_{tt}^{out}	-24,32	-24,32	-24,32	-24,32	
Точка K , $y = b/\sqrt{2}$, $t = \pi/4$	M_{ϕ}^{22}	1,0141	1,0144	1,01442	1,01444	1,01447
	σ_{tt}^{in}	6,168	6,18	6,18	6,18	6,086
	σ_{tt}^{out}	-5,986	-6,00	-6,00	-6,00	
Точка T , $y = b$, $t = \pi/2$	M_{ϕ}^{22}	0,00072	0,00018	0,00008	0,00004	0,000
	σ_{tt}^{in}	0,0043	-0,0012	-0,0005	-0,00028	0,000
	σ_{tt}^{out}	0,001	0,001	0,00048	0,00026	

Анализ параметров прочности, приведенных в таблице 3.11, позволяет констатировать наличие высокой скорости сходимости вычислений и зафиксировать абсолютное совпадение численных величин моментов с их

аналитическими значениями. Погрешность вычислений по M_{ϕ}^{22} составила 0.005%.

На рисунке 3.12 представлена графическая зависимость изменения изгибающего момента M_{ϕ}^{22} в зависимости от параметра t . Значение $t=0$ соответствует жесткой заделке (точка P на рисунке 3.11), а значение $t=\pi/2$ соответствует свободному концу (точка T на рисунке 3.11). Звездочки на графике обозначают величины M_{ϕ}^{22} , найденные по (3.7.22). Из анализа рисунка 3.12 следует, что значения M_{ϕ}^{22} , полученные путем применения разработанного выше в п. 3.7 трехпольного ЧЭД и вычисленные аналитически - совпадают.

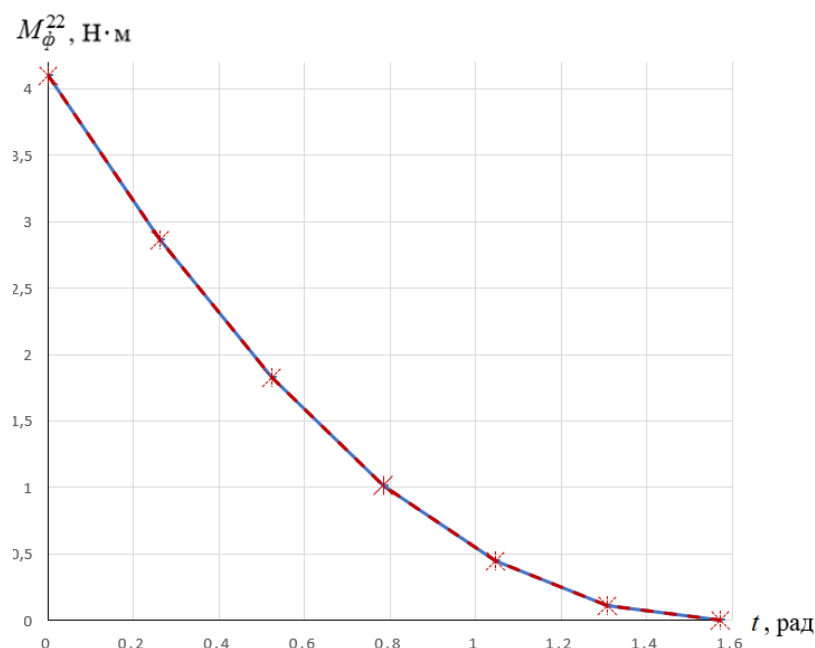


Рисунок 3.12 – Графическая зависимость изгибающего момента M_{ϕ}^{22} в зависимости от параметра t

3.7.2. Расчет оболочки в форме эллиптического кольца под действием растягивающей нагрузки

Была решена задача по исследованию НДС кольца эллиптической формы, подвергающегося растяжению вдоль оси Oy (рис. 3.13). Из-за наличия плоскостей симметрии кольца рассчитывалась его четвертая часть. Численные значения

геометрических и физических величин оболочки приняты следующими: $q = 20$ Н/м; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\nu = 0.3$; $b = 0.5$ м; $c = 0.2$ м; $h = 0.001$ м; $L = 0.01$ м.

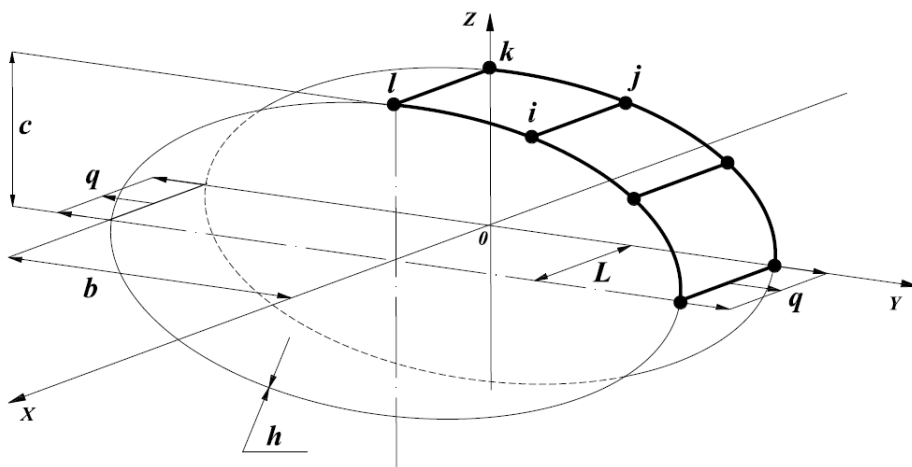


Рисунок 3.13 – Расчетная схема эллиптического кольца

В таблице 3.12 даются значения изгибающих моментов M_{ϕ}^{22} , усилий N_{ϕ}^{22} и нормальных напряжений в точках расчетной схемы (Рис. 3.13), отмеченных координатами y , t .

В крайней правой колонке таблицы 3.12 даются значения момента и напряжений, в узлах, в которых приложена растягивающая нагрузка q , вычисленные в соответствии с методами сопротивления материалов [17].

Анализ данных таблицы 3.12 показывает устойчивую сходимость вычислительного процесса по численным значениям силовых параметров и совпадение в значениях сравниваемых величин изгибающих моментов. Погрешность вычислений по изгибающему моменту составила 0.14%. Продольная сила N_{ϕ}^{22} в точках l и k оболочки может быть найдена из уравнения статики ($\sum N_x = 0$) $N_{\phi}^{22} = q_v \cdot L = 0.2$ Н. Полученное численное значение продольной силы отличается от точного значения на 4%. Однако, здесь необходимо отметить, что продольная сила является весьма незначительным фактором при вычислении нормального напряжения. Основным фактором, учитывая известную формулу сопротивления материалов $\sigma = M_{\phi}^{22} / W$ [17], здесь является изгибающий момент, вклад которого в величину нормального напряжения является определяющим.

Таблица 3.12 – Значения контролируемых параметров НДС
эллиптического кольца

Координаты точек, $y; t$	Моменты M_{ϕ}^{22} , 10^{-2} Н·м, продольная сила N , Н, напряжения σ_{xx} , σ_{tt} , 10^{-2} МПа	Сетка дискретизации				Значения M_{ϕ}^{22} и σ_{tt} , вычислен- ные по формулам сопротив- ления материалов [17]
		31×2	61×2	91×2	121×2	
$y = 0.0$, $t = 0.0$	M_{ϕ}^{22}	-1,10668	-1,10632	-1,10624	-1,10622	-
	N_{ϕ}^{22}	0,20874	0,20882	0,20884	0,20884	0,200
	σ_{tt}^{in}	666,78	666,18	666,08	666,04	-
	σ_{tt}^{out}	-662,26	-661,66	-661,54	-661,50	-
	σ_{xx}^{in}	200,02	199,86	199,82	199,82	-
	σ_{xx}^{out}	-198,68	-198,50	-198,46	-198,46	-
$y = b$, $t = \pi/2$	M_{ϕ}^{22}	2,900	2,896	2,894	2,894	2,900
	σ_{tt}^{in}	-1743,22	-1746,06	-1746,60	-1746,80	1740,0
	σ_{tt}^{out}	1721,62	1724,38	1724,92	1725,12	
	σ_{xx}^{in}	-522,32	-523,78	-523,98	-524,04	-
	σ_{xx}^{out}	517,08	517,36	517,48	517,54	-

3.7.3. Пример расчёта эллиптического цилиндра под комбинированной нагрузкой

Была решена задача по определению НДС фрагмента эллиптического цилиндра с условиями опирания, как в примере 3.7.1, нагруженного комбинированной внешней нагрузкой в виде внутреннего давления

интенсивностью $q = 0.1 \text{ Н/см}^2$ и линейно распределенной нагрузкой, приложенной в нормальном и касательном направлениях на правом свободном от закреплений краю оболочки интенсивностью $q_w = q_v = 1 \text{ Н/см}$ (рис. 3.14).

Значения параметров эллипса поперечного сечения были приняты равными $b = 2.5 \text{ м}$; $c = 0.5 \text{ м}$; толщина стенки $h = 0.02 \text{ м}$; $L = 0.01 \text{ м}$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $\nu = 0.3$.

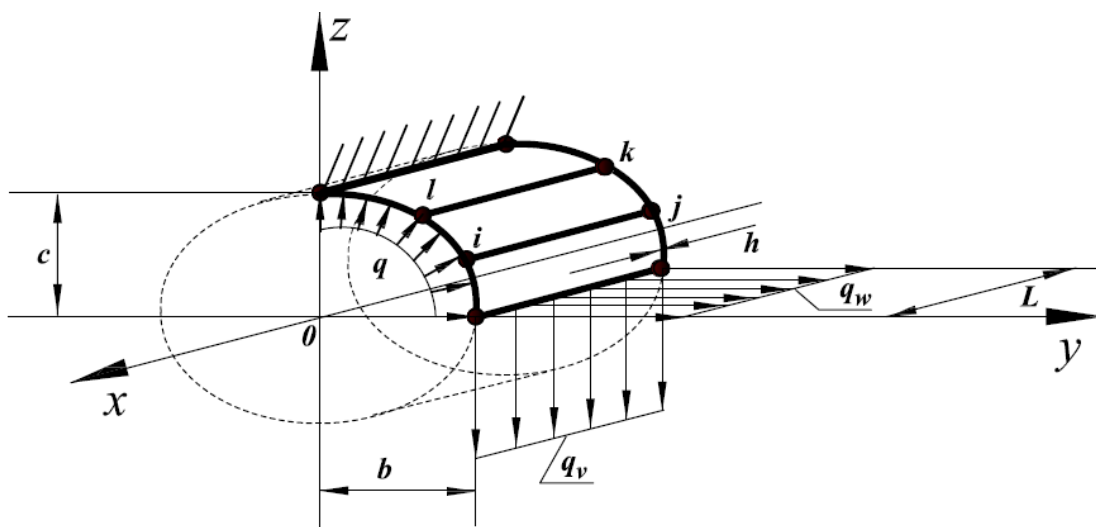


Рисунок 3.14 – Расчетная схема эллиптического цилиндра, нагруженного комбинированной внешней нагрузкой

Расчет оболочки выполнялся на основе МКЭ в двух формулировках:

- метода перемещений [66];
- на основе изложенной в параграфе 3.7 трехпольной формулировки.

Результаты, полученные при использовании для решения данной задачи двух формулировок МКЭ представлены в таблице 3.13, в которой приводятся значения моментов и сил, а также напряжений в жесткой заделке и на консольном краю оболочки в зависимости от степени измельчения сетки узлов. В правый крайний столбец таблицы 3.13 внесены значения сил, моментов и напряжений, вычисленные аналитическим путем из условия статического равновесия, например, изгибающий момент в жесткой заделке определяется по формуле

$$M_{\phi}^{22} = q \left(\frac{c^2}{2} + \frac{b^2}{2} \right) - q_v \cdot L \cdot b + q_w \cdot L \cdot c =$$

$$=0.1 (50^2/2 + 250^2/2) - 1.0 \cdot 1.0 \cdot 250 + 1.0 \cdot 1.0 \cdot 50 = 3050 \text{ Н} \cdot \text{см}.$$

На свободном краю оболочки величины продольной силы и нормального напряжения равны

$$N_{\phi}^{22} = q_v \cdot L = 1.0 \cdot 1.0 = 1 \text{ Н};$$

$$\sigma_{\phi}^{midl} = N_{\phi}^{22} / F = 1 \text{ Н} / 1.0 \cdot 2 \text{ см}^2 = 0.5 \text{ Н/см}^2,$$

а величина M_{ϕ}^{22} , очевидно, имеет нулевое значение ($M_{\phi}^{22} = 0$).

Таблица 3.13 – Значения параметров НДС консольного фрагмента

Коор- дина- ты точек, $y; t$	Момен- ты M_{ϕ}^{22} , 10^{-2} Н·м, усилие N_{ϕ}^{22} , Н, напря- жения σ^{22} , 10^{-2} МПа	Метод перемещений			Трехпольный МКЭ			Аналити- ческое решение M_{ϕ}^{22} , 10^{-2} Н·м, N_{ϕ}^{22} , Н, $\sigma_{22} =$ $= M_f^{22} / w$, 10^{-2} МПа
		Сетка узлов						
		101×2	201×2	301×2	51×2	101×2	201×2	
Точка P , $y = 0$, $t = 0$	M_{ϕ}^{22}	3031,6	3048,1	3049,2	3045,0	3047,8	3049,0	3050,0
	σ_{22}^{in}	4554,1	4578,8	4580,4	4565,4	4568,6	4570,3	4575,0
	σ_{22}^{out}	-4540,8	-4565,5	-4567,1	-4570,7	-4574,8	-4576,5	
Точка T , $y = b$, $t = \pi/2$	M_{ϕ}^{22}	957,9	191,6	77,55	0,0075	0,0009	0,0001	0,000
	N_{ϕ}^{22}	1812,6	260,4	83,39	1,044	1,0023	1,0004	1,000
	σ_{22}^{in}	-654,9	-194,0	-92,13	0,432	0,407	0,405	-
	σ_{22}^{out}	1936,4	345,1	130,6	0,618	0,605	0,605	-
	σ_{22}^{midl}	906,3	130,2	41,70	0,522	0,501	0,500	0,500

Как следует из анализа данных таблицы 3.13, при использовании МКЭ в трехпольной формулировке наблюдается быстрая сходимость вычислительного процесса определения искомых величин и практическое совпадение контролируемых параметров НДС с представленным выше таблицы 3.13 аналитическим решением даже при крупной сетке узлов. Привлечение к решению данной задачи метода перемещений не привело к достижению приемлемого результата даже при сетке узлов 301×2 . В жесткой заделке, где кривизна фрагмента минимальна, значения параметров НДС могут быть признаны удовлетворительными. Но на правом конце консоли, где кривизна фрагмента достигает максимума M_{ϕ}^{22} , N_{ϕ}^{22} , а также напряжения имеют неприемлемо большие, на порядок выше значения по сравнению с аналитическими.

Учитывая приведенные в таблице 3.13 результаты расчета фрагмента оболочки, имеющего существенную кривизну на консольном краю, нагруженного комбинированной нагрузкой, можно сделать вывод о предпочтительности использования разработанного трехпольного варианта МКЭ по сравнению с наиболее распространенным вариантом МКЭ в формулировке метода перемещений.

3.7.4. Пример расчёта цилиндрической оболочки под действием сосредоточенной силы

Разработанный в параграфе 3.7 трехпольный вариант МКЭ обладает существенно большей вычислительной эффективностью по сравнению с вариантом МКЭ в форме метода перемещений [66] и при решении задач с сосредоточенным видом нагрузки. В качестве подтверждения данного факта можно рассмотреть задачу по определению НДС цилиндрической оболочки, имеющей в качестве внешней нагрузки силу $P = 226.8$ Н, приложенную в точке С (рис. 3.15). Оболочка имеет шарнирную опору в точке D.

Был рассчитан фрагмент цилиндра $ACDB$, составляющий его $\frac{1}{4}$ часть. Исходные данные имели следующие значения: $L = 26.3$ см; $h = 0.24$ см; $E = 7.38 \cdot 10^4$ МПа; $\nu = 0.3125$. Первоначально был рассчитан круговой цилиндр

радиусом $R=12.6$ см с целью сравнения величины прогиба под силой P с известным решением, представленным в [106].

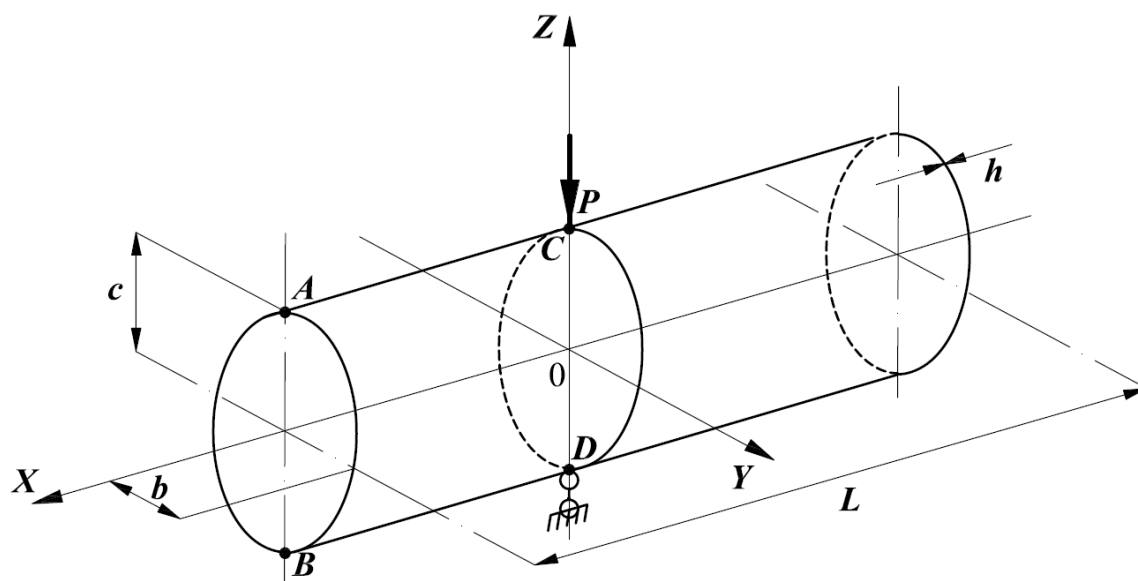


Рисунок 3.15 – Расчетная схема цилиндра, с силой P

Расчеты были выполнены в двух вариантах: в первом варианте применялся разработанный в п.3.7 трехпольный ЧЭД; во втором варианте был использован МКЭ в форме метода перемещений [66]. Результаты расчетов представлены в таблице 3.14, в которую внесены величина нормального перемещения под силой P и нормальные напряжения σ_{tt} в точке A (рис. 3.15) на торце цилиндра при последовательном сгущении сетки КЭ. Как следует из анализа табличных данных (табл. 3.14), величины прогиба и напряжений оказались достаточно близкими в обоих вариантах расчета. Кроме того, величины прогиба совпадают с известными решениями [106].

Если вместо кругового цилиндра выполнить анализ эллиптического цилиндра с соотношением параметров эллипса поперечного сечения $b/c = 4$, нагруженного также сосредоточенной силой $P = 453,6$ Н (при сохранении прочих исходных данных), то результаты повариантных расчетов будут резко контрастировать между собой (табл. 3.15). Существенные повариантные различия можно зафиксировать, анализируя величину нормального перемещения под силой

P (точка C) и напряжения в точках A и B (Рис. 3.15), значения которых должны совпадать по причине симметрии оболочки.

Таблица 3.14 – Значения прогиба и нормальных напряжений
для кругового цилиндра

Прогиб v , см; напря- же- ния σ_{tt} , МПа	Варианты расчета						Известное решение [106]
	Первый			Второй			
	Сетка дискретизации						
	21×21	31×31	41×41	21×21	31×31	41×41	
v	-0,28781	-0,28792	-0,28798	-0,28748	-0,28766	-0,28773	0.2889 (Богнер, Фокс, Шмидт)
σ_{tt}^{in}	21,3224	21,0245	20,9017	22,0884	21,7066	21,5818	0.2865 (Кантин, Клауф)
σ_{tt}^{out}	-30,5207	-30,4651	-30,4669	-30,5221	-30,4683	-30,4869	0.2888 (Ашвел, Сабир)

В первом варианте расчета можно констатировать весьма быструю сходимость вычислительного процесса как по величине прогиба под силой P , так и по значениям нормальных напряжений σ_{tt} (табл. 3.15). Кроме того, значения σ_{tt} в точках A и B в первом варианте оказались практически равными между собой даже при редкой (21×21) сетке элементов дискретизации. Величины прогиба под силой P в первом варианте различаются между собой при сетке узлов 21×21 и 41×41 всего на 0.6%. И напротив, во втором варианте расчета можно наблюдать

весьма медленную сходимость вычислительного процесса и по прогибу, и по напряжениям по сравнению с первым вариантом расчета. Так, значения прогиба при сетке узлов 21×21 и 51×51 различаются между собой в 2,6 раза. Значения σ_{tt} в точках A и B также существенно различаются между собой, хотя должны полностью совпадать исходя из симметрии расчетной схемы.

Таблица 3.15 – Значения прогиба и нормальных напряжений
для эллиптического цилиндра

Коор- динаты точек x , см; t , рад.	Прогиб v , см; напря- жения σ_{tt} , МПа	Варианты расчета						
		Первый			Второй			
		Сетка дискретизации						
		21×21	31×31	41×41	21×21	31×31	41×41	51×51
Точка $C(0;0)$	v	-0.40471	-0.40677	-0.40714	-0.14331	-0.23414	-0.32644	-0.37226
Точка $A(26.3;0)$	σ_{tt}^{in}	35.156	34.7182	34.5166	22.1132	26.8618	31.1798	33.2848
	σ_{tt}^{out}	-41.0826	-40.9578	-40.876	-25.19	-31.1004	-36.3848	-38.9654
Точка $B(26.3;\pi)$	σ_{tt}^{in}	35.1082	34.7324	34.5238	3.5628	13.9922	25.2488	30.7756
	σ_{tt}^{out}	-41.1422	-40.9754	-40.8854	-4.4992	-16.6072	-29.6808	-36.1238

Напряжения в точке C приложения силы P и в точке шарнирного опирания D (рис. 3.16) также должны быть одинаковыми. На рисунках 3.17 и 3.18 приведены повариантные изменения коэффициентов k^{in} , k^{out} , представляющих собой отношения значений напряжений в точках C и D оболочки

$$k^{in} = \left(\sigma_{tt}^{in} \right)_C / \left(\sigma_{tt}^{in} \right)_D \quad \text{и} \quad k^{out} = \left(\sigma_{tt}^{out} \right)_C / \left(\sigma_{tt}^{out} \right)_D$$

в зависимости от степени измельчения сетки дискретизации.

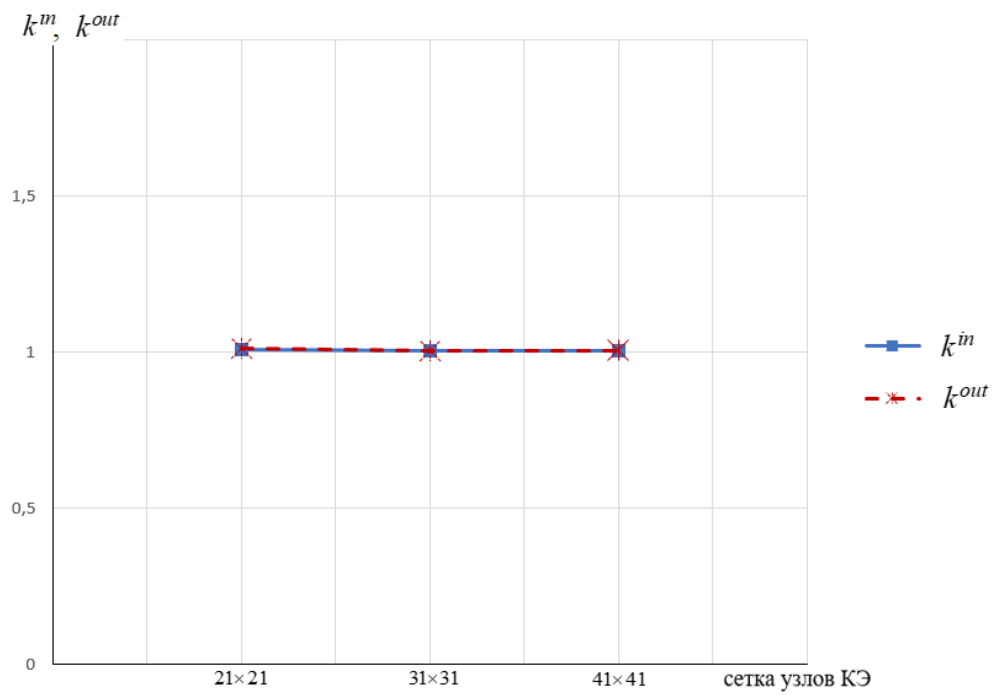


Рисунок 3.17 – Графики изменения коэффициентов k^{in} и k^{out} в первом варианте расчета

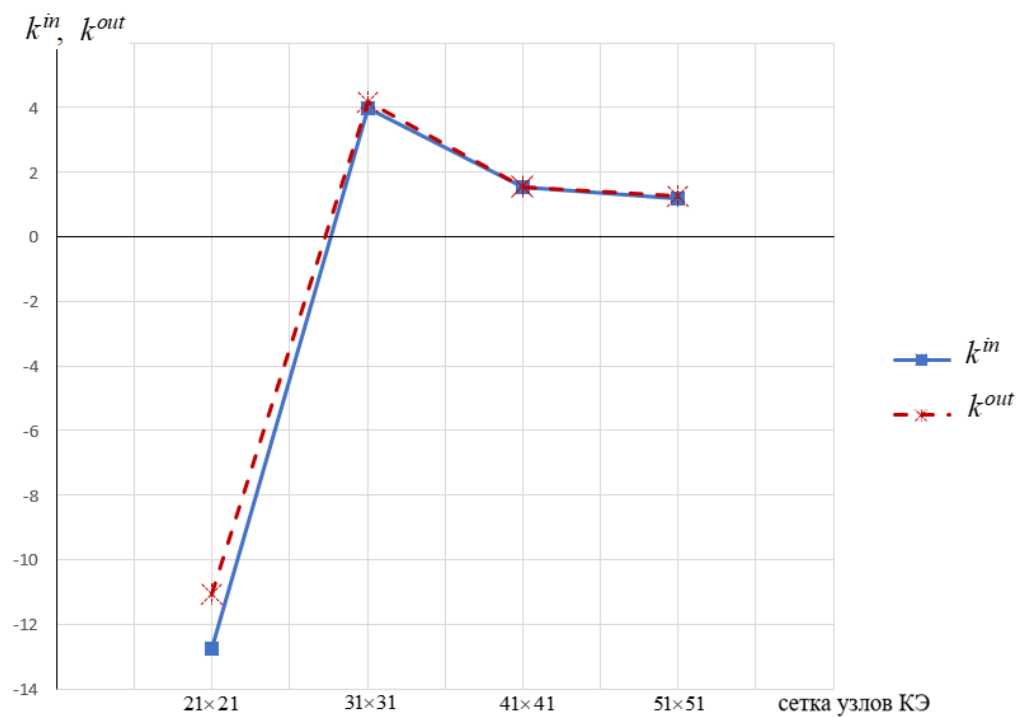


Рисунок 3.18 – Графики изменения коэффициентов k^{in} и k^{out} во втором варианте расчета

Как следует из рисунка 3.17, при реализации разработанного трехпольного МКЭ значения коэффициентов k^{in} и k^{out} равны единице как при крупной сетке

КЭ, так и при ее сгущении, что и должно быть вследствие симметрии расчетной схемы (рис. 3.15). Применение к решению данной задачи МКЭ, реализованного методом перемещений, привело к тому, что величины вышеупомянутых коэффициентов k^{in} и k^{out} при редкой сетке КЭ достигают неприемлемо больших значений (рис. 3.18).

Чтобы приблизиться к единичным значениям коэффициентов, требуется значительное сгущение сетки КЭ, что увеличивает затраты машинного времени и погрешность вычислений, которая пропорциональна общему числу искомых неизвестных.

Таким образом, можно сделать вывод о корректности и высокой точности вычислений искомых прочностных параметров оболочек при реализации разработанного трехпольного варианта МКЭ.

Вышеизложенные результаты численных экспериментов по расчету оболочек позволили выявить следующие положительные стороны разработанного в 3.7 трехпольного варианта смешанного МКЭ:

1. Разработанный трехпольный вариант МКЭ, реализованный на примере расчета тонкостенной оболочечной конструкции, позволяет одновременно получать поля перемещений, внутренних силовых факторов (продольных сил и изгибающих моментов) и деформаций срединной поверхности оболочки, что существенно расширяет возможности детального численного анализа НДС подобного типа конструкций.
2. Погрешность вычислений значений изгибающих моментов составила 0.14%, а продольных сил – 4%. Однако, здесь следует отметить, что значение нормального напряжения в основном определяется величиной изгибающего момента, а вклад в величину напряжения продольной силы – минимален.
3. Сопоставительный анализ повариантных расчетов эллиптического цилиндра со значительной кривизной срединной поверхности показал существенные преимущества разработанного трехпольного варианта МКЭ по сравнению с МКЭ метода перемещений в плане существенного повышения

точности вычислений прочностных параметров при относительно редких сетках узлов исследуемой оболочки.

4. Разработанный трехпольный вариант МКЭ обладает принципиальными преимуществами по сравнению с МКЭ метода перемещений, к которым можно отнести гарантированные корректность и высокую точность результатов вычислений независимо от геометрической формы и характера внешней нагрузки оболочки.

3.8. Выводы по третьей главе

1. Разработан двупольный вариант смешанного МКЭ с кинематическими (перемещения и их производные) и силовыми (продольные силы и изгибающие моменты) искомыми узловыми параметрами.

2. На тестовых задачах по расчету цилиндрической оболочки с распределенной внешней нагрузкой доказана корректность и приемлемая для инженерной практики точность определения НДС оболочек данного вида, в том числе из несжимаемого материала при использовании разработанного двупольного варианта смешанного МКЭ.

3. Разработан двупольный вариант смешанного МКЭ при использовании в качестве искоемых силовых узловых параметров деформаций и искривлений срединной поверхности оболочечной конструкции.

4. На тестовых задачах по расчету оболочек кругового и эллиптического профилей доказано, что двупольный вариант смешанного МКЭ с искомыми силовыми параметрами в виде деформаций и искривлений срединной поверхности по точности конечно-элементных решений значительно превосходит вариант смешанного МКЭ с силовыми искомыми параметрами в виде продольных сил и изгибающих моментов при определении НДС оболочек эллиптического профиля.

5. Разработан трехпольный вариант смешанного МКЭ: кинематическими (перемещения и их первые производные), силовыми

(продольные силы и изгибающие моменты) и деформационными (деформации и искривления срединной поверхности) неизвестными.

6. Численными экспериментами по анализу НДС оболочек, в том числе эллиптического профиля, доказана гораздо более высокая точность конечно-элементных решений при использовании трехпольного варианта смешанного МКЭ по сравнению с формулировкой МКЭ метода перемещений, особенно при определении НДС оболочек со значительной кривизной срединной поверхности.

7. В процессе исследования эффективности разработанных дву- и трехпольных вариантов смешанного МКЭ были установлены следующие преимущества разработанных алгоритмов, а именно: возможность одновременного получения кинематических, силовых и деформационных искомых параметров рассчитываемых оболочек, исключение дополнительных вычислительных процедур по определению с помощью аппроксимирующих зависимостей производных от прогиба второго порядка, возможность получать высокую точность вычислений контролируемых параметров НДС при относительно редких сетках дискретизации оболочечной конструкции.

ГЛАВА 4. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕНЗОРНО-ВЕКТОРНОЙ ФОРМЫ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ПРОЦЕДУРЫ СИЛОВЫХ И КИНЕМАТИЧЕСКИХ НЕИЗВЕСТНЫХ В КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫХ АЛГОРИТМАХ РАСЧЕТА ОБОЛОЧЕЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ СМЕШАННОЙ ФОРМУЛИРОВКИ МКЭ

В настоящее время общепринятой в МКЭ считается интерполяционная процедура, базирующаяся на использовании интерполяции скалярных величин, таких как отдельные компонента вектора перемещения, отдельные компонента тензора напряжений, тензора деформаций и так далее. Суть данного способа интерполяционной процедуры состоит в использовании формул вида

$$q = \{\varphi\}_{1 \times 12}^T \{q_y^L\}_{12 \times 1}; \quad \sigma^{\alpha\beta} = \{\chi\}_{1 \times 4}^T \{\sigma_y^{\alpha\beta}\}_{4 \times 1}; \quad \varepsilon_{\alpha\beta} = \{\psi\}_{1 \times 4}^T \{\varepsilon_{\alpha\beta y}\}_{4 \times 1};$$

$$N^{\alpha\beta} = \{\psi\}_{1 \times 4}^T \{N_y^{\alpha\beta}\}_{4 \times 1}, \quad (4.1)$$

где $\{\varphi\}_{1 \times 12}^T, \{\psi\}_{1 \times 4}^T, \{\chi\}_{1 \times 4}^T$ – матрицы-строки функций формы; q – компонента вектора перемещения; $\sigma^{\alpha\beta}, \varepsilon_{\alpha\beta}$ – компонента тензора напряжений или тензора деформаций; $\{q_y^L\}_{12 \times 1}, \{\sigma_y^{\alpha\beta}\}_{4 \times 1}, \{\varepsilon_{\alpha\beta y}\}_{4 \times 1}$ – столбцы узловых значений соответствующих компонент.

Преимуществами скалярной формы интерполяционной процедуры (4.1) является её простота и целесообразность при использовании декартовой системы координат.

В задачах анализа НДС конструкций с искривлёнными поверхностями предпочтение следует отдавать криволинейным системам координат. При применении вышеупомянутых систем координат (цилиндрической, сферической, тороидальной и т.д.) в конечноэлементных расчетах оболочечных конструкций неизбежно возникает проблема учета смещений элемента дискретизации как абсолютно твердого тела [8, 9, 27, 28]. Данную проблему неоднократно пытались решить путём включения дополнительных слагаемых в интерполяционные

полиномы [57, 58], попыток учета жестких смещений в явном виде для наиболее простых конструкций, таких, как цилиндрические панели, путем попыток использования изопараметрических элементов дискретизации. Однако, все эти попытки имеют ограниченную область применения и не позволяют считать указанную проблему окончательно разрешенной. Наиболее оптимальным способом решения вышеупомянутой проблемы учета смещений элемента дискретизации как твердого тела при использовании криволинейных систем координат является использование тензорно-векторной формы интерполяционной процедуры. Так как отдельные компоненты вектора перемещения в совокупности образуют вектор-тензор первого ранга, то и интерполяционную формулу (4.1) логичнее применять непосредственно к самому вектору перемещения, а не его отдельным компонентам-тензорам нулевого ранга

$$\vec{v} = \{\varphi\}_{1 \times 12}^T \{\vec{v}_y^L\}_{12 \times 1}. \quad (4.2)$$

Точно также следует применять формулы (4.1) к интерполированию деформаций $\varepsilon_{\alpha\beta}$, искривлений $\kappa_{\alpha\beta}$, продольных сил $N^{\alpha\beta}$ и изгибающих моментов $M^{\alpha\beta}$ как составляющих тензорных полей

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta} &= \{\psi\}_{1 \times 4}^T \{\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta}\}_{4 \times 1}_y; \quad \tilde{\kappa}_{\alpha\beta} = \{\psi\}_{1 \times 4}^T \{\tilde{\kappa}_{\alpha\beta}\}_{4 \times 1}_y; \quad \tilde{N}^{\alpha\beta} = \{\psi\}_{1 \times 4}^T \{\tilde{N}_y^{\alpha\beta}\}_{4 \times 1}; \\ \tilde{M}^{\alpha\beta} &= \{\psi\}_{1 \times 4}^T \{\tilde{M}_y^{\alpha\beta}\}_{4 \times 1}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где $\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta}, \tilde{\kappa}_{\alpha\beta}, \tilde{N}^{\alpha\beta}, \tilde{M}^{\alpha\beta}$ тензоры деформаций, искривлений, продольных сил, изгибающих моментов срединной поверхности оболочечной конструкции.

Как будет показано ниже тензорно-векторная форма интерполяционной процедуры позволяет корректно решить проблему смещений элемента дискретизации как твердого тела неявным способом в самом общем виде. Кроме того, тензорно-векторная форма интерполяции искомых величин позволяет с высокой степенью точности исследовать НДС оболочечных конструкций со значительной величиной кривизны срединной поверхности, в то время как использование традиционной скалярной формы интерполяционной процедуры не позволяет получать приемлемые по точности прочностные параметры НДС,

особенно при разреженных сетках дискретизации рассчитываемых оболочечных конструкций.

4.1. Интерполяция полей векторов перемещений

При реализации МКЭ в смешанной формулировке с использованием тензорно-векторной интерполяционной процедуры возникает необходимость применять векторную форму интерполяции, основывающуюся на формуле (4.2)

$$\vec{v} = \{\varphi\}_{1 \times 12}^T \{\vec{v}_y^L\}_{12 \times 1} = \{\varphi\}_{1 \times 12}^T [G]_{12 \times 12} \{\vec{v}_y^G\}_{12 \times 1}, \quad (4.4)$$

$$\{\vec{v}_y^L\}_{1 \times 12}^T = \left\{ \vec{v}^i \vec{v}^j \vec{v}^k \vec{v}^l \vec{v}_{,\xi}^i \vec{v}_{,\xi}^j \vec{v}_{,\xi}^k \vec{v}_{,\xi}^l \vec{v}_{,\eta}^i \vec{v}_{,\eta}^j \vec{v}_{,\eta}^k \vec{v}_{,\eta}^l \right\};$$

$$\{\vec{v}_y^G\}_{1 \times 12}^T = \left\{ \vec{v}^i \vec{v}^j \vec{v}^k \vec{v}^l \vec{v}_{,x}^i \vec{v}_{,x}^j \vec{v}_{,x}^k \vec{v}_{,x}^l \vec{v}_{,t}^i \vec{v}_{,t}^j \vec{v}_{,t}^k \vec{v}_{,t}^l \right\} \quad - \quad \text{матрицы-строки векторных}$$

узловых неизвестных в локальной и глобальной системах координат соответственно; матрица $[G]_{12 \times 12}$ компонуется на основе соотношений

$$\vec{v}_{,\xi}^\rho = \vec{v}_{,x}^\rho \cdot x_{,\xi} + \vec{v}_{,t}^\rho \cdot t_{,\xi}; \quad \vec{v}_{,\eta}^\rho = \vec{v}_{,x}^\rho \cdot x_{,\eta} + \vec{v}_{,t}^\rho \cdot t_{,\eta}, \quad (4.5)$$

где $\rho = i, j, k, l$.

Векторы перемещения узлов и частные производные этих векторов по глобальным координатам x, t могут быть представлены посредством произведения матриц

$$\{\vec{v}_y^G\}_{12 \times 1} = [\vec{T}]_{12 \times 36} \{U_V\}_{36 \times 1}, \quad (4.6)$$

где $\{U_V\}_{36 \times 1}$ содержит компоненты векторов перемещений узлов элемента дискретизации и компоненты производных векторов перемещений узлов конечного элемента

$$\begin{aligned} \vec{v}^\rho &= v^{1\rho} \vec{a}_1^{0\rho} + v^{2\rho} \vec{a}_2^{0\rho} + v^\rho \vec{a}^{0\rho}; \quad \vec{v}_{,x}^\rho = m_x^{1\rho} \vec{a}_1^{0\rho} + m_x^{2\rho} \vec{a}_2^{0\rho} + m^\rho \vec{a}^{0\rho}; \\ \vec{v}_{,t}^\rho &= m_t^{1\rho} \vec{a}_1^{0\rho} + m_t^{2\rho} \vec{a}_2^{0\rho} + m_t^\rho \vec{a}^{0\rho}; \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \{U_V\}_{1 \times 36}^T &= \{v^{1i} v^{2i} v^i v^{1j} v^{2j} v^j v^{1k} v^{2k} v^k v^{1l} v^{2l} v^l m_x^{1i} m_x^{2i} m_x^i m_x^{1j} m_x^{2j} m_x^j \\ &\quad m_x^{1k} m_x^{2k} m_x^k m_x^{1l} m_x^{2l} m_x^l m_t^{1i} m_t^{2i} m_t^i m_t^{1j} m_t^{2j} m_t^j m_t^{1k} m_t^{2k} m_t^k m_t^{1l} m_t^{2l} m_t^l\}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Входящая в (4.6) квазидиагональная матрица $[\vec{T}]_{12 \times 36}$ содержит матрицы-строки базисных векторов узлов четырёхугольного элемента дискретизации

$$[\vec{T}]_{12 \times 36} = \begin{array}{c} \begin{array}{c} \{\vec{a}^{0i}\}^T \\ 1 \times 3 \end{array} \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & & & & & & & & & \\ \hline & \begin{array}{c} \{\vec{a}^{0j}\}^T \\ 1 \times 3 \end{array} & & & & & & & & & & \\ \hline & & \begin{array}{c} \{\vec{a}^{0k}\}^T \\ 1 \times 3 \end{array} & & & & & & & & & \\ \hline & & & \begin{array}{c} \{\vec{a}^{0l}\}^T \\ 1 \times 3 \end{array} & & & & & & & & \\ \hline & & & & \begin{array}{c} \{\vec{a}^{0i}\}^T \\ 1 \times 3 \end{array} & & & & & & & \\ \hline & & & & & \begin{array}{c} \{\vec{a}^{0j}\}^T \\ 1 \times 3 \end{array} & & & & & & \\ \hline & & & & & & \begin{array}{c} \{\vec{a}^{0k}\}^T \\ 1 \times 3 \end{array} & & & & & \\ \hline & & & & & & & \begin{array}{c} \{\vec{a}^{0l}\}^T \\ 1 \times 3 \end{array} & & & & \\ \hline & & & & & & & & \begin{array}{c} \{\vec{a}^{0i}\}^T \\ 1 \times 3 \end{array} & & & \\ \hline & & & & & & & & & \begin{array}{c} \{\vec{a}^{0j}\}^T \\ 1 \times 3 \end{array} & & \\ \hline & & & & & & & & & & \begin{array}{c} \{\vec{a}^{0k}\}^T \\ 1 \times 3 \end{array} & \\ \hline & & & & & & & & & & & \begin{array}{c} \{\vec{a}^{0l}\}^T \\ 1 \times 3 \end{array} \\ \hline \end{array}$$

где $\{\vec{a}^{0\rho}\}^T = \{\vec{a}_1^{0\rho} \vec{a}_2^{0\rho} \vec{a}^{0\rho}\}_{1 \times 3}$.

Ковариантные векторы базиса точки внутренней области элемента дискретизации и векторы базиса узлов на основании (2) могут быть выражены через орты декартовой системы координат матричными соотношениями

$$\{\vec{a}^0\}_{3 \times 1} = [e^0]_{3 \times 3} \{\vec{l}\}_{3 \times 1}; \quad \{\vec{a}^{0\rho}\}_{3 \times 1} = [e^{0\rho}]_{3 \times 3} \{\vec{l}\}_{3 \times 1}, \quad (4.9)$$

где $\{\vec{a}^0\}^T = \{\vec{a}_1^0 \vec{a}_2^0 \vec{a}^0\}_{1 \times 3}$; $\{\vec{l}\}^T = \{\vec{l}, \vec{j}, \vec{k}\}_{1 \times 3}$.

Из первого соотношения (4.9) можно получить обратную матричную зависимость

$$\{\vec{l}\}_{3 \times 1} = [e^0]_{3 \times 3}^{-1} \{\vec{a}^0\}_{3 \times 1}. \quad (4.10)$$

В результате подстановки (4.10) во второе соотношение (4.9) можно выразить векторы базиса узлов через векторы базиса точки внутренней области элемента дискретизации

$$\{\vec{a}^{0\rho}\}_{3 \times 1} = [e^{0\rho}]_{3 \times 3} [e^0]_{3 \times 3}^{-1} \{\vec{a}^0\}_{3 \times 1} = [n^{0\rho}]_{3 \times 3} \{\vec{a}^0\}_{3 \times 1}. \quad (4.11)$$

Интерполяционную зависимость (4.4) с учетом (4.6) и (4.11) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \{\varphi\}_{1 \times 12}^T [G]_{12 \times 12} [\vec{T}]_{12 \times 36} \{U_V\}_{36 \times 1} = \{\omega\}_{1 \times 12}^T [\vec{T}]_{12 \times 36} \{U_V\}_{36 \times 1} = \left\{ \omega_1 \{\vec{a}^{0i}\}_{1 \times 3}^T | \omega_2 \{\vec{a}^{0j}\}_{1 \times 3}^T | \right. \\ &\omega_3 \{\vec{a}^{0k}\}_{1 \times 3}^T | \omega_4 \{\vec{a}^{0l}\}_{1 \times 3}^T | \omega_5 \{\vec{a}^{0i}\}_{1 \times 3}^T | \dots | \omega_8 \{\vec{a}^{0l}\}_{1 \times 3}^T | \omega_9 \{\vec{a}^{0i}\}_{1 \times 3}^T | \dots | \omega_{12} \{\vec{a}^{0l}\}_{1 \times 3}^T \left. \right\} \{U_V\}_{36 \times 1} = \\ &= \left\{ \omega_1 \{\vec{a}^0\}_{1 \times 3}^T [n^{0i}]_{3 \times 3}^T | \omega_2 \{\vec{a}^0\}_{1 \times 3}^T [n^{0j}]_{3 \times 3}^T | \omega_3 \{\vec{a}^0\}_{1 \times 3}^T [n^{0k}]_{3 \times 3}^T | \omega_4 \{\vec{a}^0\}_{1 \times 3}^T [n^{0l}]_{3 \times 3}^T | \omega_5 \{\vec{a}^0\}_{1 \times 3}^T \right. \\ &\left. [n^{0i}]_{3 \times 3}^T | \dots | \omega_8 \{\vec{a}^0\}_{1 \times 3}^T [n^{0l}]_{3 \times 3}^T | \omega_9 \{\vec{a}^0\}_{1 \times 3}^T [n^{0i}]_{3 \times 3}^T | \dots | \omega_{12} \{\vec{a}^0\}_{1 \times 3}^T [n^{0l}]_{3 \times 3}^T \right\} \{U_V\}_{36 \times 1}. \quad (4.12) \end{aligned}$$

Вектор перемещения точки внутренней области элемента дискретизации $\vec{v}$, располагающийся в левой части (4.12) может быть представлен компонентами векторов базиса этой точки

$$\begin{aligned} \{\vec{a}^0\}_{1 \times 3}^T \begin{Bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v \end{Bmatrix}_{3 \times 1} &= \{\vec{a}^0\}_{1 \times 3}^T \left[\omega_1 [n^{0i}]_{3 \times 3}^T | \omega_2 [n^{0j}]_{3 \times 3}^T | \omega_3 [n^{0k}]_{3 \times 3}^T | \omega_4 [n^{0l}]_{3 \times 3}^T | \omega_5 [n^{0i}]_{3 \times 3}^T | \dots \right. \\ &\left. \omega_8 [n^{0l}]_{3 \times 3}^T | \omega_9 [n^{0i}]_{3 \times 3}^T | \dots | \omega_{12} [n^{0l}]_{3 \times 3}^T \right] \{U_V\}_{36 \times 1}. \quad (4.13) \end{aligned}$$

Из (4.13) можно скомпоновать интерполяционные выражения для компонент вектора перемещения

$$\begin{aligned} v^1 &= \left\{ \omega_1 \{n_{11}^{0i} n_{21}^{0i} n_{31}^{0i}\}_{1 \times 3} | \omega_2 \{n_{11}^{0j} n_{21}^{0j} n_{31}^{0j}\}_{1 \times 3} | \omega_3 \{n_{11}^{0k} n_{21}^{0k} n_{31}^{0k}\}_{1 \times 3} | \right. \\ &\omega_4 \{n_{11}^{0l} n_{21}^{0l} n_{31}^{0l}\}_{1 \times 3} | \omega_5 \{n_{11}^{0i} n_{21}^{0i} n_{31}^{0i}\}_{1 \times 3} | \dots | \omega_8 \{n_{11}^{0l} n_{21}^{0l} n_{31}^{0l}\}_{1 \times 3} | \\ &\left. \omega_9 \{n_{11}^{0i} n_{21}^{0i} n_{31}^{0i}\}_{1 \times 3} | \dots | \omega_{12} \{n_{11}^{0l} n_{21}^{0l} n_{31}^{0l}\}_{1 \times 3} \right\} \{U_V\}_{36 \times 1}; \\ v^2 &= \left\{ \omega_1 \{n_{12}^{0i} n_{22}^{0i} n_{32}^{0i}\}_{1 \times 3} | \omega_2 \{n_{12}^{0j} n_{22}^{0j} n_{32}^{0j}\}_{1 \times 3} | \omega_3 \{n_{12}^{0k} n_{22}^{0k} n_{32}^{0k}\}_{1 \times 3} | \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \omega_4 \left\{ n_{12}^{0l} n_{22}^{0l} n_{32}^{0l} \right\} \Big|_{1 \times 3} \omega_5 \left\{ n_{12}^{0i} n_{22}^{0i} n_{32}^{0i} \right\} \Big|_{1 \times 3} \dots \omega_8 \left\{ n_{12}^{0l} n_{22}^{0l} n_{32}^{0l} \right\} \Big|_{1 \times 3} \\
& \omega_9 \left\{ n_{12}^{0i} n_{22}^{0i} n_{32}^{0i} \right\} \Big|_{1 \times 3} \dots \omega_{12} \left\{ n_{12}^{0l} n_{22}^{0l} n_{32}^{0l} \right\} \Big|_{1 \times 3} \left\{ U_V \right\}_{36 \times 1}; \\
v = & \left\{ \omega_1 \left\{ n_{13}^{0i} n_{23}^{0i} n_{33}^{0i} \right\} \Big|_{1 \times 3} \omega_2 \left\{ n_{13}^{0j} n_{23}^{0j} n_{33}^{0j} \right\} \Big|_{1 \times 3} \omega_3 \left\{ n_{13}^{0k} n_{23}^{0k} n_{33}^{0k} \right\} \Big|_{1 \times 3} \right. \\
& \omega_4 \left\{ n_{13}^{0l} n_{23}^{0l} n_{33}^{0l} \right\} \Big|_{1 \times 3} \omega_5 \left\{ n_{13}^{0i} n_{23}^{0i} n_{33}^{0i} \right\} \Big|_{1 \times 3} \dots \omega_8 \left\{ n_{13}^{0l} n_{23}^{0l} n_{33}^{0l} \right\} \Big|_{1 \times 3} \\
& \left. \omega_9 \left\{ n_{13}^{0i} n_{23}^{0i} n_{33}^{0i} \right\} \Big|_{1 \times 3} \dots \omega_{12} \left\{ n_{13}^{0l} n_{23}^{0l} n_{33}^{0l} \right\} \Big|_{1 \times 3} \right\} \left\{ U_V \right\}_{36 \times 1}. \quad (4.14)
\end{aligned}$$

Для получения интерполяционных зависимостей для компонент производных вектора перемещения точки внутренней области элемента дискретизации необходимо продифференцировать (4.4) по используемым криволинейным координатам, например x и t

$$\begin{aligned}
\vec{v}_{,x} = m_x^1 \vec{a}_1^0 + m_x^2 \vec{a}_2^0 + m_x \vec{a}^0 &= \left(\left\{ \varphi_{,\xi} \right\}_{1 \times 12}^T \cdot \xi_{,x} + \left\{ \varphi_{,\eta} \right\}_{1 \times 12}^T \cdot \xi_{,\eta} \right) \cdot \left[G \right]_{12 \times 12} \left\{ \vec{v}_y^G \right\}_{12 \times 1} = \\
&= \left(\left\{ \varphi_{,\xi} \right\}_{1 \times 12}^T \cdot \xi_{,x} + \left\{ \varphi_{,\eta} \right\}_{1 \times 12}^T \cdot \xi_{,\eta} \right) \cdot \left[G \right]_{12 \times 12} \left[\vec{T} \right]_{12 \times 36} \left\{ U_V \right\}_{36 \times 1} = \left\{ \omega_x \right\}_{1 \times 12}^T \left[\vec{T} \right]_{12 \times 36} \left\{ U_V \right\}_{36 \times 1}. \quad (4.15)
\end{aligned}$$

Далее выполняя преобразования (4.15) в соответствие с (4.12) ... (4.14) можно получить интерполяционные зависимости для компонент производной вектора перемещения по координате x точки внутренней области элемента дискретизации, например

$$\begin{aligned}
m_x^1 = & \left\{ \omega_{x1} \left\{ n_{11}^{0i} n_{21}^{0i} n_{31}^{0i} \right\} \Big|_{1 \times 3} \omega_{x2} \left\{ n_{11}^{0j} n_{21}^{0j} n_{31}^{0j} \right\} \Big|_{1 \times 3} \omega_{x3} \left\{ n_{11}^{0k} n_{21}^{0k} n_{31}^{0k} \right\} \Big|_{1 \times 3} \right. \\
& \omega_{x4} \left\{ n_{11}^{0l} n_{21}^{0l} n_{31}^{0l} \right\} \Big|_{1 \times 3} \omega_{x5} \left\{ n_{11}^{0i} n_{21}^{0i} n_{31}^{0i} \right\} \Big|_{1 \times 3} \dots \omega_{x8} \left\{ n_{11}^{0l} n_{21}^{0l} n_{31}^{0l} \right\} \Big|_{1 \times 3} \\
& \left. \omega_{x9} \left\{ n_{11}^{0i} n_{21}^{0i} n_{31}^{0i} \right\} \Big|_{1 \times 3} \dots \omega_{x12} \left\{ n_{11}^{0l} n_{21}^{0l} n_{31}^{0l} \right\} \Big|_{1 \times 3} \right\} \left\{ U_V \right\}_{36 \times 1}. \quad (4.16)
\end{aligned}$$

Совершенно аналогично предыдущим выкладкам можно скомпоновать интерполяционные выражения для компонент производной вектора перемещения по координате t точки внутренней области элемента дискретизации

$$\begin{aligned}
m_t = & \left\{ \omega_{t1} \left\{ n_{13}^{0i} n_{23}^{0i} n_{33}^{0i} \right\}_{1 \times 3} \middle| \omega_{t2} \left\{ n_{13}^{0j} n_{23}^{0j} n_{33}^{0j} \right\}_{1 \times 3} \middle| \omega_{t3} \left\{ n_{13}^{0k} n_{23}^{0k} n_{33}^{0k} \right\}_{1 \times 3} \middle| \right. \\
& \omega_{t4} \left\{ n_{13}^{0l} n_{23}^{0l} n_{33}^{0l} \right\}_{1 \times 3} \middle| \omega_{t5} \left\{ n_{13}^{0i} n_{23}^{0i} n_{33}^{0i} \right\}_{1 \times 3} \middle| \dots \omega_{t8} \left\{ n_{13}^{0l} n_{23}^{0l} n_{33}^{0l} \right\}_{1 \times 3} \middle| \\
& \left. \omega_{t9} \left\{ n_{13}^{0i} n_{23}^{0i} n_{33}^{0i} \right\}_{1 \times 3} \middle| \dots \omega_{t12} \left\{ n_{13}^{0l} n_{23}^{0l} n_{33}^{0l} \right\}_{1 \times 3} \right\} \left\{ U_V \right\}_{36 \times 1}. \quad (4.17)
\end{aligned}$$

Анализируя полученные интерполяционные выражения (4.14), (4.16) и (4.17) можно отметить их принципиальное отличие от классических интерполяционных зависимостей (4.1). Данное отличие заключается в том, что полученные интерполяционные формулы (4.14), (4.16) и (4.17) позволяют представить компоненту вектора перемещения или ее производные, как функцию столбца $\{U_V\}_{36 \times 1}$, в структуру которого входят узловые значения всех компонент, а также их производные.

Классическая же покомпонентная интерполяция предусматривает, что перемещение или её производные зависят от узловых значений этого же перемещения, и не зависят от узловых значений перемещений по другим направлениям. Достоинства векторной формы интерполяционной процедуры по сравнению с классической наглядно проявляются в расчетах оболочек со значительными кривизнами срединной поверхности или имеющими возможность смещаться как абсолютно твердые тела под действием заданной нагрузки [66, 68, 70, 72].

4.2. Тензорная форма интерполяционной процедуры

Так как при использовании смешанной формулировки МКЭ возникает необходимость интерполяции компонент тензоров деформаций и искривлений, продольных сил и изгибающих моментов, то по аналогии с интерполяцией компонент вектора перемещения имеется возможность реализации двух подходов к осуществлению данной процедуры. Первый подход состоит в использовании классической скалярной процедуры компоненты тензора через узловые значения этой же самой компоненты (4.1). Второй подход заключается в применении

интерполяции непосредственно к тензору деформаций и искривлений, продольных сил и изгибающих моментов согласно (4.3).

4.2.1. Интерполяция тензоров продольных сил и изгибающих моментов

Запишем основную формулу тензорной интерполяции (4.3) в виде

$$\tilde{Q}^{\alpha\beta} = \{\psi\}_{1 \times 4}^T \{\tilde{Q}^{\alpha\beta}\}_{4 \times 1}^y, \quad (4.18)$$

где под $\tilde{Q}^{\alpha\beta}$ будем понимать тензор продольных сил $\tilde{N}^{\alpha\beta}$ или изгибающих моментов $\tilde{M}^{\alpha\beta}$.

Столбец узловых тензоров используемого элемента дискретизации имеет вид

$$\{\tilde{Q}^{\alpha\beta}\}_{1 \times 4}^T = \{(\tilde{Q}^{\alpha\beta})^i (\tilde{Q}^{\alpha\beta})^j (\tilde{Q}^{\alpha\beta})^k (\tilde{Q}^{\alpha\beta})^l\}. \quad (4.19)$$

Тензор точки внутренней области элемента дискретизации и узловой тензор могут быть представлены компонентами диадных произведений ковариантных векторов локального базиса соответствующей точки

$$\begin{aligned} \tilde{Q}^{\alpha\beta} &= Q^{11}(\vec{a}_1^0 \vec{a}_1^0) + Q^{22}(\vec{a}_2^0 \vec{a}_2^0) + Q^{12}(\vec{a}_1^0 \vec{a}_2^0); \\ (\tilde{Q}^{\alpha\beta})^\rho &= (Q^{11})^\rho (\vec{a}_1^{0\rho} \vec{a}_1^{0\rho}) + (Q^{22})^\rho (\vec{a}_2^{0\rho} \vec{a}_2^{0\rho}) + (Q^{12})^\rho (\vec{a}_1^{0\rho} \vec{a}_2^{0\rho}). \end{aligned} \quad (4.20)$$

С учетом (4.20) интерполяционная формула (4.18) примет вид

$$\tilde{Q}^{\alpha\beta} = \{\psi\}_{1 \times 4}^T \left[\vec{\tilde{Z}} \right]_{4 \times 12} \{Q_y^G\}_{12 \times 1}, \quad (4.21)$$

где матрица $\left[\vec{\tilde{Z}} \right]_{4 \times 12}$ определяется следующим образом

$(\vec{a}_1^{0i} \vec{a}_1^{0i})$	$(\vec{a}_2^{0i} \vec{a}_2^{0i})$	$(\vec{a}_1^{0i} \vec{a}_2^{0i})$									
			$(\vec{a}_1^{0j} \vec{a}_1^{0j})$	$(\vec{a}_2^{0j} \vec{a}_2^{0j})$	$(\vec{a}_1^{0j} \vec{a}_2^{0j})$						
						$(\vec{a}_1^{0k} \vec{a}_1^{0k})$	$(\vec{a}_2^{0k} \vec{a}_2^{0k})$	$(\vec{a}_1^{0k} \vec{a}_2^{0k})$			
									$(\vec{a}_1^{0l} \vec{a}_1^{0l})$	$(\vec{a}_2^{0l} \vec{a}_2^{0l})$	$(\vec{a}_1^{0l} \vec{a}_2^{0l})$

$$\left\{Q_y^{\alpha\beta}\right\}_{1\times 12}^T = \left\{\{Q^{11i}Q^{22i}Q^{12i}\}\{Q^{11j}Q^{22j}Q^{12j}\}\{Q^{11k}Q^{22k}Q^{12k}\}\{Q^{11l}Q^{22l}Q^{12l}\}\right\}.$$

Входящие в структуру матрицы $\left[\vec{Z}\right]_{4\times 12}$ диадные произведения узловых векторов базиса с помощью (4.11) могут быть выражены через диадные произведения векторов базиса точки внутренней области элемента дискретизации

$$\begin{aligned}(\vec{a}_1^{0\rho}\vec{a}_1^{0\rho}) &= n_{11}^{0\rho}n_{11}^{0\rho}(\vec{a}_1^0\vec{a}_1^0) + n_{12}^{0\rho}n_{12}^{0\rho}(\vec{a}_2^0\vec{a}_2^0) + 2n_{11}^{0\rho}n_{12}^{0\rho}(\vec{a}_1^0\vec{a}_2^0); \\(\vec{a}_2^{0\rho}\vec{a}_2^{0\rho}) &= n_{21}^{0\rho}n_{21}^{0\rho}(\vec{a}_1^0\vec{a}_1^0) + n_{22}^{0\rho}n_{22}^{0\rho}(\vec{a}_2^0\vec{a}_2^0) + 2n_{21}^{0\rho}n_{22}^{0\rho}(\vec{a}_1^0\vec{a}_2^0); \\(\vec{a}_1^{0\rho}\vec{a}_2^{0\rho}) &= n_{11}^{0\rho}n_{21}^{0\rho}(\vec{a}_1^0\vec{a}_1^0) + n_{12}^{0\rho}n_{22}^{0\rho}(\vec{a}_2^0\vec{a}_2^0) + \\&+ (n_{11}^{0\rho}n_{22}^{0\rho} + n_{12}^{0\rho}n_{21}^{0\rho})(\vec{a}_1^0\vec{a}_2^0).\end{aligned}\quad (4.21)$$

На основании (4.21) можно скомпоновать следующую матричную зависимость

$$\left\{\begin{pmatrix}\vec{a}_1^{0\rho}\vec{a}_1^{0\rho} \\ \vec{a}_2^{0\rho}\vec{a}_2^{0\rho} \\ \vec{a}_1^{0\rho}\vec{a}_2^{0\rho}\end{pmatrix}\right\} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline n_{11}^{0\rho}n_{11}^{0\rho} & n_{12}^{0\rho}n_{12}^{0\rho} & 2n_{11}^{0\rho}n_{12}^{0\rho} \\ \hline n_{21}^{0\rho}n_{21}^{0\rho} & n_{22}^{0\rho}n_{22}^{0\rho} & 2n_{21}^{0\rho}n_{22}^{0\rho} \\ \hline n_{11}^{0\rho}n_{21}^{0\rho} & n_{12}^{0\rho}n_{22}^{0\rho} & (n_{11}^{0\rho}n_{22}^{0\rho} + \\ & & + n_{12}^{0\rho}n_{21}^{0\rho}) \\ \hline \end{array} \left\{\begin{pmatrix}\vec{a}_1^0\vec{a}_1^0 \\ \vec{a}_2^0\vec{a}_2^0 \\ \vec{a}_1^0\vec{a}_2^0\end{pmatrix}\right\} \quad (4.22)$$

или в более компактном виде

$$\left\{\left(\vec{a}_\alpha^{0\rho}\vec{a}_\beta^{0\rho}\right)\right\}_{3\times 1} = [D^\rho]_{3\times 3} \left\{\left(\vec{a}_\alpha^0\vec{a}_\beta^0\right)\right\}_{3\times 1}. \quad (4.23)$$

Матрицу $\left[\vec{Z}\right]_{4\times 12}$ с учетом (4.23) можно преобразовать к виду

$$\left[\vec{Z}\right]_{4\times 12} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \left\{\left(\vec{a}_\alpha^0\vec{a}_\beta^0\right)\right\}_{1\times 3}^T [D^i]_{3\times 3}^T & & & \\ \hline & \left\{\left(\vec{a}_\alpha^0\vec{a}_\beta^0\right)\right\}_{1\times 3}^T [D^j]_{3\times 3}^T & & \\ \hline & & \left\{\left(\vec{a}_\alpha^0\vec{a}_\beta^0\right)\right\}_{1\times 3}^T [D^k]_{3\times 3}^T & \\ \hline & & & \left\{\left(\vec{a}_\alpha^0\vec{a}_\beta^0\right)\right\}_{1\times 3}^T [D^l]_{3\times 3}^T \\ \hline \end{array} \quad (4.24)$$

Интерполяционное выражение (4.21) с учетом (4.20) и (4.24) может представлено в виде

$$\left\{ \left(\vec{a}_{\alpha}^{0\rho} \vec{a}_{\beta}^{0\rho} \right) \right\}_{1 \times 3}^T \begin{Bmatrix} Q^{11} \\ Q^{22} \\ Q^{12} \end{Bmatrix} = \left\{ \left(\vec{a}_{\alpha}^{0\rho} \vec{a}_{\beta}^{0\rho} \right) \right\}_{1 \times 3}^T \left\{ \psi_1 [D^i]^T | \psi_2 [D^j]^T | \right. \\ \left. \psi_3 [D^k]^T | \psi_4 [D^l]^T \right\}_{3 \times 3} \left\{ Q_y^{\alpha\beta} \right\}_{12 \times 1}. \quad (4.25)$$

Из интерполяционного выражения (4.25) можно получить искомые интерполяционные зависимости для каждой компоненты тензора $Q^{\alpha\beta}$

$$Q^{11} = \{ \psi_1 \{ D_{11}^i D_{21}^i D_{31}^i \} | \psi_2 \{ D_{11}^j D_{21}^j D_{31}^j \} | \psi_3 \{ D_{11}^k D_{21}^k D_{31}^k \} | \\ \psi_4 \{ D_{11}^l D_{21}^l D_{31}^l \} \} \left\{ Q_y^{\alpha\beta} \right\}_{12 \times 1}; \\ Q^{22} = \{ \psi_1 \{ D_{12}^i D_{22}^i D_{32}^i \} | \psi_2 \{ D_{12}^j D_{22}^j D_{32}^j \} | \psi_3 \{ D_{12}^k D_{22}^k D_{32}^k \} | \\ \psi_4 \{ D_{12}^l D_{22}^l D_{32}^l \} \} \left\{ Q_y^{\alpha\beta} \right\}_{12 \times 1}; \\ Q^{12} = \{ \psi_1 \{ D_{13}^i D_{23}^i D_{33}^i \} | \psi_2 \{ D_{13}^j D_{23}^j D_{33}^j \} | \psi_3 \{ D_{13}^k D_{23}^k D_{33}^k \} | \\ \psi_4 \{ D_{13}^l D_{23}^l D_{33}^l \} \} \left\{ Q_y^{\alpha\beta} \right\}_{12 \times 1}. \quad (4.26)$$

Внимательное рассмотрение полученных интерполяционных зависимостей (4.26) позволяет сделать вывод о том, что использование в качестве интерполируемого объекта тензора $\tilde{Q}^{\alpha\beta}$ позволяет выразить отдельную его компоненту через узловые значения всех компонент данного тензора $\left\{ Q_y^{\alpha\beta} \right\}_{12 \times 1}$.

При классической же покомпонентной интерполяции (4.1), отдельная компонента тензора выражается через узловые значения этой же отдельной компоненты и не зависит от узловых значений других компонент тензора. Эффективность разработанной формы тензорной интерполяции подтверждается численными экспериментами, в которых исследовалось НДС оболочек, имеющих существенную кривизну поверхности или допускающих жесткие смещения под действием внешней нагрузки.

С целью проверки работоспособности и корректности разработанных двух- и трехпольных ЧЭД с тензорно-векторной интерполяцией искомых величин были выполнены следующие численные эксперименты.

4.2.2. Примеры расчёта эллиптического кольца при шарнирном и пружинном опирании

С целью сравнения точности вычисления контролируемых прочностных параметров НДС оболочек, полученных на основе использования разработанного двухпольного элемента дискретизации в смешанной формулировке с тензорно-векторной формой аппроксимации искомых величин и конечного элемента с аналогичным набором узловых варьируемых параметров, скомпонованного на основе метода перемещений, был выполнен расчет эллиптического цилиндра с отношением параметров эллипса поперечного сечения $b/c = 4$, расчетная схема которого показана на рисунке 4.1. Физические и геометрические исходные данные имели следующие значения $q = 200 \text{ Н/м}$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $\nu = 0,3$ (коэффициент поперечной деформации); $h = 0,02 \text{ м}$; $L = 0,01 \text{ м}$; большая полуось эллипса $b = 4,0 \text{ м}$; малая полуось эллипса $c = 1,0 \text{ м}$. Учитывая наличие симметрии кольцо моделировалось одним рядом ЧЭД. При формировании матриц жесткостей ЧЭД на первом этапе была реализована классическая покомпонентная интерполяция искомых величин (4.1).

Расчеты осуществлялись в разработанной смешанной формулировке МКЭ (первый вариант) и формулировке метода перемещений (второй вариант). Результаты повариантных расчетов были занесены в таблицу 4.1, в которой зафиксированы значения напряжений и моментов в точках 1,2 и 3,4, которые должны совпадать исходя из расчетной схемы кольца по мере постепенного измельчения сетки узлов.

Анализ данных, представленных в верхней части таблицы 4.1 (первый вариант расчета) позволил констатировать достаточно высокую скорость

сходимости вычислений и соблюдения примерного равенства значений параметров НДС в точках 1,2 и 3,4 начиная от сетки узлов 81×2 и далее.

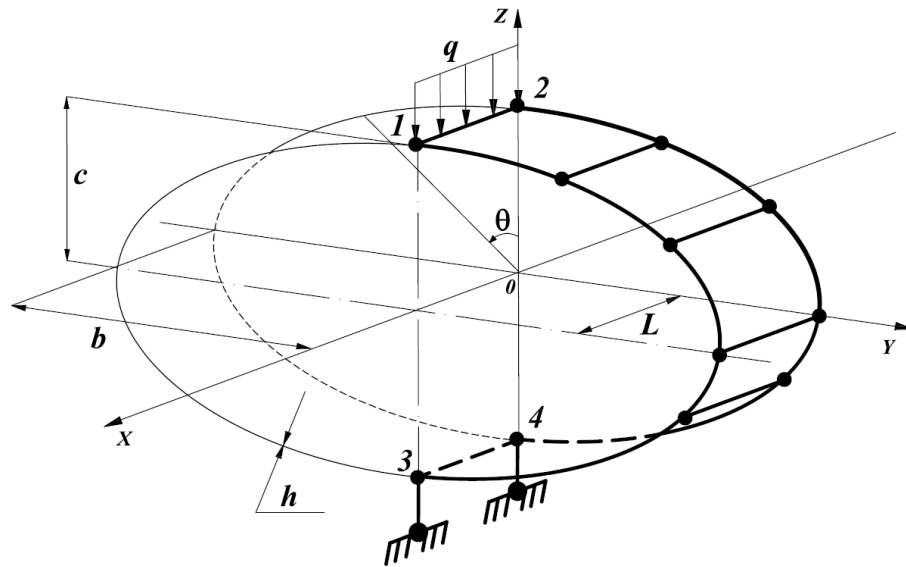


Рисунок 4.1 – Расчетная схема оболочки в форме сжимаемого эллиптического кольца с шарнирным опиранием

Анализ данных, приведённых в нижней части таблицы 4.1 (второй вариант расчета) показал, что в случае использования МКЭ в форме метода перемещений скорость сходимости вычислений гораздо ниже и для достижения аналогичного с первым вариантом уровня точности вычислений требуется в 4...5 раз большее количество КЭ.

Таким образом можно констатировать, что разработанный на основе смешанного конечного элемента вычислительный алгоритм имеет существенные преимущества перед конечно-элементным алгоритмом, основанным на формулировке метода перемещений. Следует также отметить, что чрезмерное измельчение сетки дискретизации может приводить к постепенному накоплению погрешности вычислений, поэтому целесообразно применять конечно-элементные алгоритмы, позволяющие достигать приемлемого уровня точности при относительно редкой сетке узлов дискретизации. Таким алгоритмом при расчете оболочек с существенной кривизной срединной поверхности является алгоритм, базирующийся на основе

использования тензорно-векторной формы интерполяционной процедуры, разработанной в настоящей работе применительно к смешанному варианту МКЭ (4.26).

Таблица 4.1 – Значения напряжений σ_{22} и моментов M_{22} в точках приложения нагрузки и в точках шарнирного опирания

Координаты точек x , см; θ , рад	Напряжения σ_{22} , 10^{-2} МПа; моменты M_{22} , $H \cdot m$	Сетка узлов дискретизации				
		Смешанная формулировка при общепринятой аппроксимации искомых величин				
		61×2	81×2	101×2	121×2	
$x = 0,0$; $\theta = 0,0$	σ_{22}^{in}	280,8	315,3	316,3	316,7	
	σ_{22}^{out}	-281,2	-315,0	-315,9	-316,3	
	M_{22}	-1,873	-2,101	-2,107	-2,110	
$x = 0,0$; $\theta = \pi$	σ_{22}^{in}	165,0	311,5	314,1	315,8	
	σ_{22}^{out}	-164,0	-311,1	-313,7	-315,4	
	M_{22}	-1,096	-2,075	-2,093	-2,104	
Формулировка метода перемещений при общепринятой аппроксимации искомых величин						
		81×2	101×2	201×2	301×2	401×2
$x = 0,0$; $\theta = 0,0$	σ_{22}^{in}	194,6	213,2	278,5	310,4	315,6
	σ_{22}^{out}	-197,3	-215,3	-279,0	-310,1	-315,3
	M_{22}	-1,306	-1,428	-1,858	-2,068	-2,103
$x = 0,0$; $\theta = \pi$	σ_{22}^{in}	2,38	-21,3	158,5	289,1	310,9
	σ_{22}^{out}	-2,83	21,9	-157,6	-288,6	-310,5
	M_{22}	-0,017	0,144	-1,053	-1,926	-2,071

Результаты расчетов по смешанному варианту МКЭ с тензорно-векторной формой интерполяции искомых величин представлены в таблице 4.2, структура которой аналогична структуре таблицы 4.1.

Как следует из анализа таблицы 4.2, применение векторно-тензорной формы интерполяционной процедуры позволяет достичь приемлемого уровня точности вычислений контролируемых параметров НДС оболочки при относительно редкой сетке узлов дискретизации. Так, расхождение между значениями напряжений и моментов при сетке узлов 31×2 и 61×2 не превышает 1 %. Таким образом, применение тензорно- векторной формы интерполяции искомых величин в смешанной формулировке МКЭ при решении рассматриваемой задачи позволило достичь приемлемого уровня точности вычислений при существенно меньшем (в 3 раза) числе элементов дискретизации по сравнению с разработанным вариантом смешанного МКЭ со стандартной интерполяционной процедурой.

Таблица 4.2 – Значения нормальных напряжений σ_{22} и моментов M_{22} в точках приложения вертикальной нагрузки и в точках шарнирного опирания

Координаты точек x , см; θ , рад	Напряжения $\sigma_{22}, 10^{-2} \text{ МПа};$ моменты $M_{22}, \text{ Н} \cdot \text{ м}$	Сетка узлов дискретизации				
		21×2	31×2	41×2	51×2	61×2
$x = 0,0;$ $\theta = 0,0$	σ_{22}^{in}	311,7	315,3	316,0	316,4	316,7
	σ_{22}^{out}	-311,3	-314,9	-315,6	-316,0	-316,3
	M_{22}	-2,077	-2,100	-2,106	-2,108	-2,110
$x = 0,0;$ $\theta = \pi$	σ_{22}^{in}	311,7	315,3	316,0	316,4	316,7
	σ_{22}^{out}	-311,3	-314,9	-315,6	-316,0	-316,3
	M_{22}	-2,077	-2,100	-2,106	-2,108	-2,110

С целью визуализации сходимости вычислительного процесса по данным таблицы 4.1 на рисунках 4.2 и 4.3 представлены графики изменения напряжений σ_{22} , а на рисунках 4.4 и 4.5 - графики изменения изгибающего момента M_{22} в зависимости от числа элементов дискретизации рассчитываемого фрагмента эллиптического цилиндра. Как видно по графикам на рисунках 4.2 и 4.4 приемлемый уровень сходимости смешанного варианта МКЭ при традиционной покомпонентной интерполяции искомых величин достигается при разбиении оболочки на 80 и 100 КЭ. Для достижения аналогичного уровня сходимости при использовании МКЭ в формулировке метода перемещений необходимое количество КЭ достигает 400, т.е. вчетверо большее, чем при реализации смешанного варианта МКЭ с традиционной интерполяционной процедурой. Необходимость в визуализации данных таблицы 4.2 отсутствует, так как графики, подобные графикам 4.2 ... 4.5 практически будут представлять собой горизонтальную прямую.

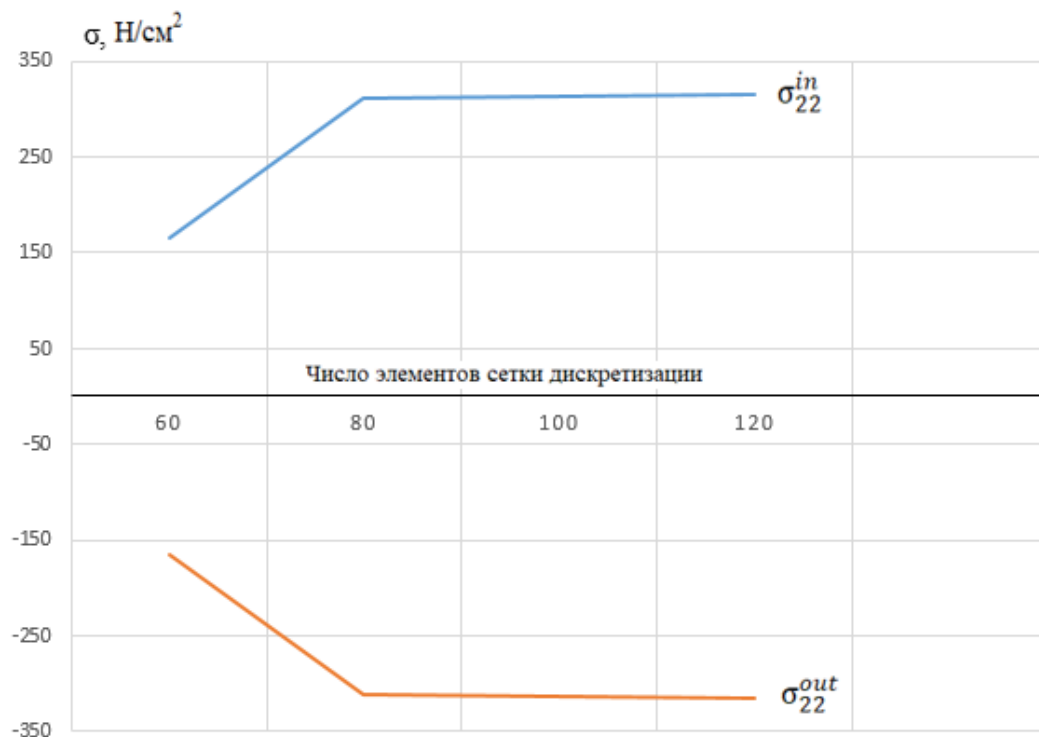


Рисунок 4.2 – Значения нормальных напряжений при шарнирном опирании оболочки в смешанной формулировке при общепринятой аппроксимации искомых величин

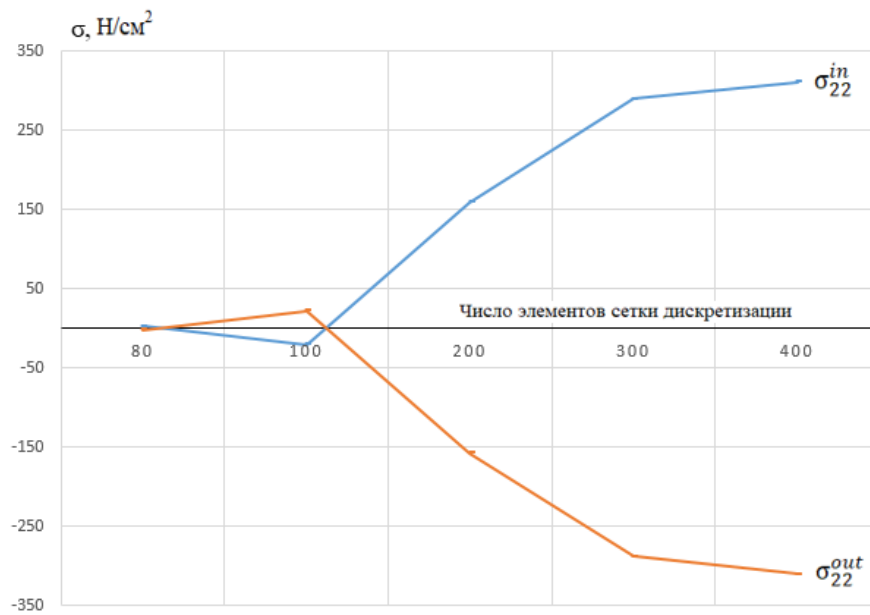


Рисунок 4.3 – Значения нормальных напряжений при шарнирном опирании оболочки в формулировке метода перемещений при общепринятой аппроксимации искомых величин

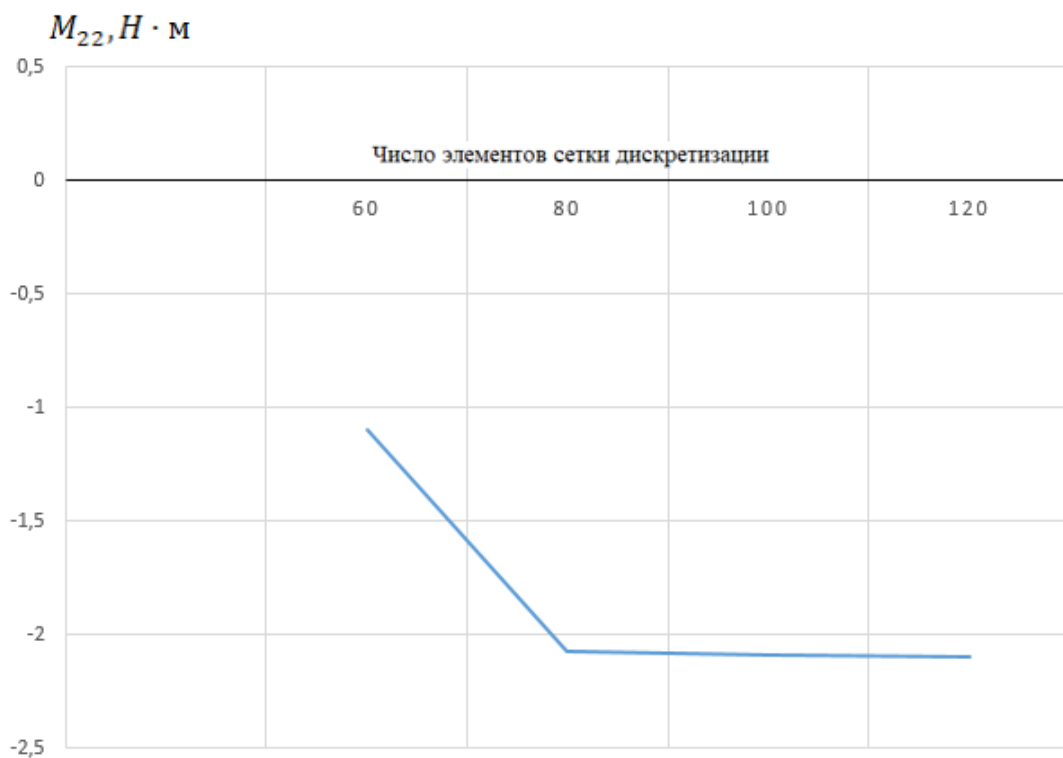


Рисунок 4.4 – Значения моментов при шарнирном опирании оболочки в смешанной формулировке при общепринятой аппроксимации искомых величин

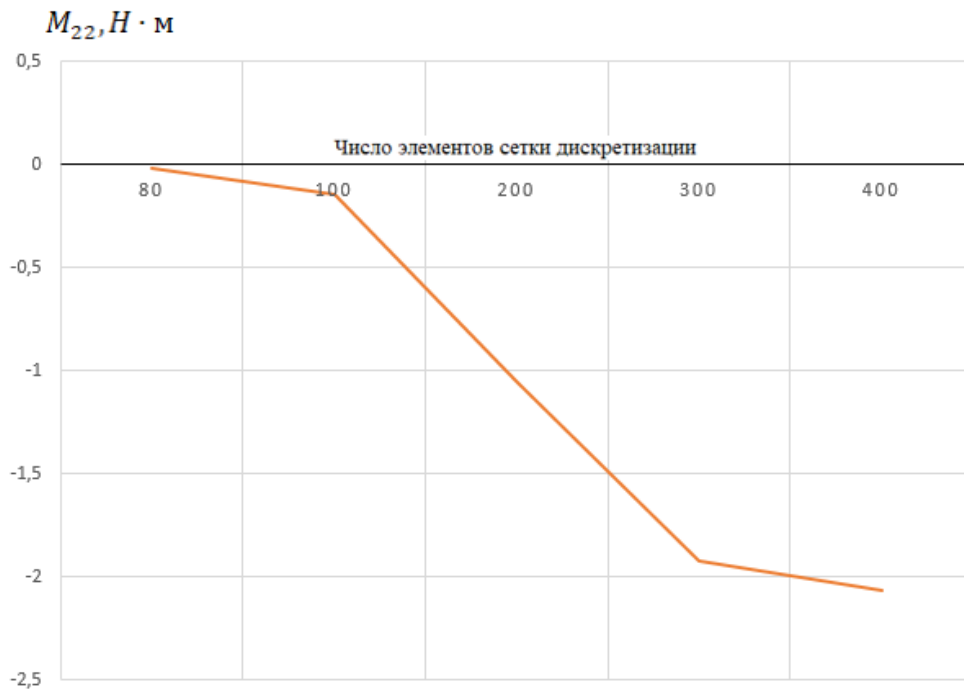


Рисунок 4.5 – Значения моментов при шарнирном опирании оболочки в формулировке метода перемещений при общепринятой аппроксимации искомых величин

Тензорно-векторная форма интерполяционной процедуры искомых величин позволяет получать корректные значения контролируемых прочностных параметров НДС при смещениях оболочек как абсолютно твердых тел под действием заданной нагрузки. Для подтверждения данного факта был выполнен расчет описанной выше конструкции при замене шарнирных опор на пружинные (Рис. 4.6). В этом случае оболочка под воздействием заданной нагрузки получает возможность смещаться в вертикальном направлении как абсолютно твердое тело. Величина жесткого смещения обратно пропорциональна жесткости пружинных опор.

Результаты расчетов оболочки при пружинном опирании сведены в таблицу 4.3, в которой представлены значения напряжений σ_{22} и моментов M_{22} в зависимости от величины смещения оболочки как абсолютно твердого тела.

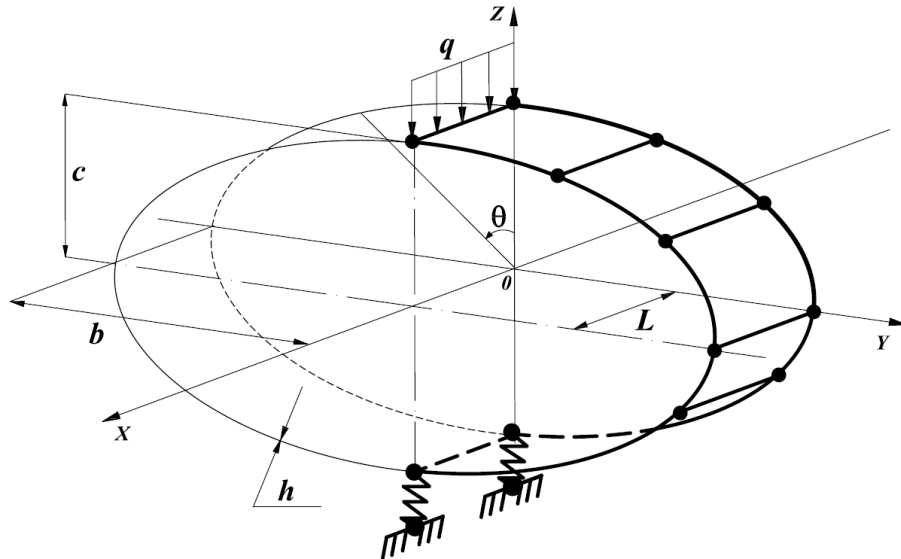


Рисунок 4.6 – Расчетная схема оболочки с пружинным опиранием

Расчеты оболочки при пружинном опирании проводились в трех вариантах при двух видах интерполяции искомых величин: тензорно-векторной (4.26) и стандартной (4.1). В первом и втором вариантах была реализована смешанная формулировка МКЭ при тензорно-векторной и стандартной интерполяционной процедурах соответственно. В третьем варианте была использована формулировка МКЭ в форме метода перемещений при стандартной интерполяции искомых величин. В первом варианте оболочка разбивалась на 50 КЭ, во втором и третьем - на 100 и 400 КЭ соответственно.

Анализ данных, представленных в таблице 4.3 показывает, что в первом варианте напряжения и моменты не меняют своих значений при всех величинах жестких смещений. Во втором варианте контролируемые параметры НДС меняют свои значения тем существеннее, чем больше величина жесткого смещения. Аналогичная картина наблюдается и в третьем варианте расчета. Наиболее значительные погрешности вычислений во втором и третьем вариантах фиксируются в точках пружинного опирания. Так, во втором варианте значения напряжений и моментов в этих точках уменьшились примерно в 2 раза при величине жесткого смещения 0,50 м, а в третьем варианте - в 2,5 раза.

Таблица 4.3 – Значения нормальных напряжений σ_{22} и моментов M_{22} при пружинном опирании

Координаты точек x , см; θ , рад	Напряжения $\sigma_{22}, 10^{-2}$ МПа; моменты $M_{22}, H \cdot м$	Величина жесткого смещения, м			
		0,00	0,05	0,20	0,50
Первый вариант расчета					
$x = 0,0$; $\theta = 0,0$	σ_{22}^{in}	316,4	316,4	316,4	316,4
	σ_{22}^{out}	-316,0	-316,0	-316,0	-316,0
	M_{22}	-2,108	-2,108	-2,108	-2,108
$x = 0,0$; $\theta = \pi$	σ_{22}^{in}	316,4	316,4	316,4	316,4
	σ_{22}^{out}	-316,0	-316,0	-316,0	-316,0
	M_{22}	-2,108	-2,108	-2,108	-2,108
Второй вариант расчета					
$x = 0,0$; $\theta = 0,0$	σ_{22}^{in}	316,3	306,3	287,8	271,2
	σ_{22}^{out}	-315,9	-306,3	-288,0	-271,7
	M_{22}	-2,107	-2,041	-1,919	-1,810
$x = 0,0$; $\theta = \pi$	σ_{22}^{in}	314,1	281,7	221,9	168,0
	σ_{22}^{out}	-313,7	-281,2	-221,1	-167,0
	M_{22}	-2,093	-1,876	-1,477	-1,117
Третий вариант расчета					
$x = 0,0$; $\theta = 0,0$	σ_{22}^{in}	315,6	302,3	284,0	272,0
	σ_{22}^{out}	-315,3	-302,2	-284,3	-272,7
	M_{22}	-2,103	-2,015	-1,894	-1,816
$x = 0,0$; $\theta = \pi$	σ_{22}^{in}	310,9	253,1	174,1	122,6
	σ_{22}^{out}	-310,5	-252,4	-173,1	-121,5
	M_{22}	-2,071	-1,685	-1,157	-0,814

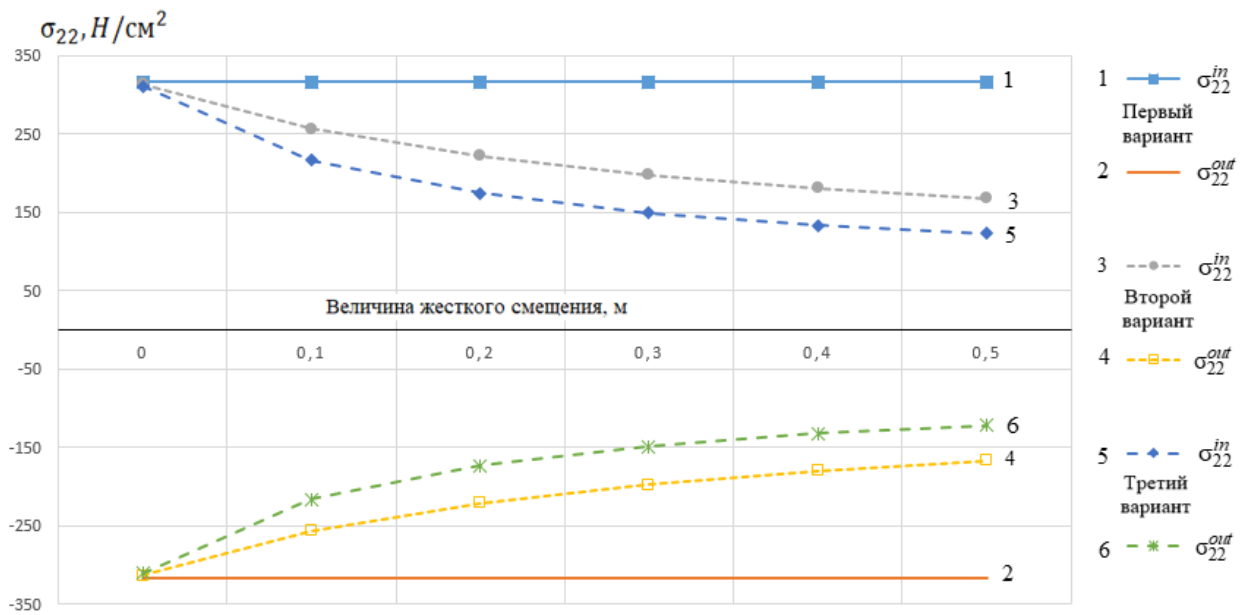


Рисунок 4.7 – Значения нормальных напряжений при пружинном опирании оболочки для различных вариантов расчета

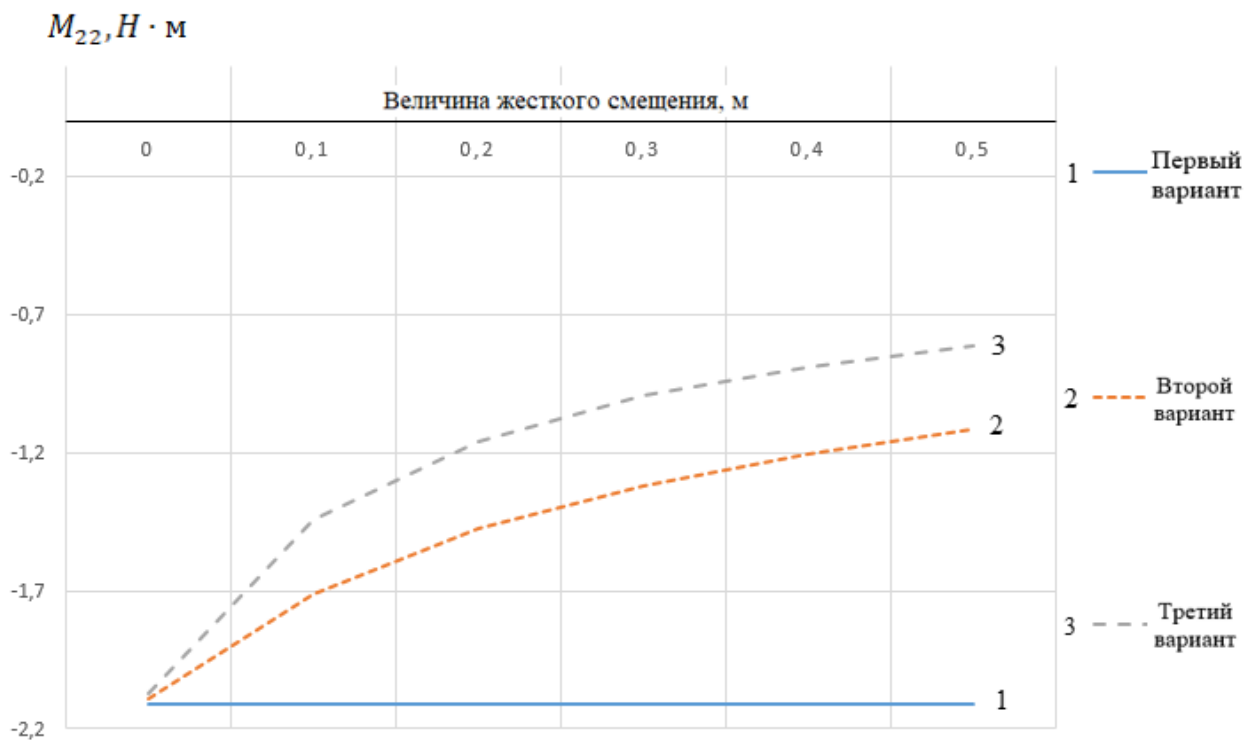


Рисунок 4.8 – Значения моментов при пружинном опирании оболочки для различных вариантов расчета

Повариантная визуализация результатов, представленных в таблице 4.3, приведена на рисунках 4.7 и 4.8, на которых показаны зависимости изменения значений напряжений σ_{22} и изгибающего момента M_{22} в опорном сечении в зависимости от величины жесткого смещения оболочки в вертикальном направлении. Как следует из рисунков 4.7 и 4.8, в первом варианте расчета контролируемые параметры НДС эллиптического цилиндра абсолютно не зависят от величины жесткого смещения, сколь велико оно ни было. Графики в этом случае представляют собой горизонтальную прямую. Во втором и третьем вариантах графики изменения σ_{22} и M_{22} представляют собой ломаные со значительными градиентами, т.е. контролируемые параметры НДС оболочки весьма значительно меняют свою величину в зависимости от смещения оболочки как абсолютно твердого тела, что является неприемлемым фактором, доказывающим некорректность применения традиционной покомпонентной интерполяции в задачах анализа НДС оболочек, имеющих способность перемещаться как твёрдое тело.

4.2.3. Примеры расчёта оболочки вращения при шарнирном и пружинном опирании

Для реализации верификации изложенного выше алгоритма был выполнен численный эксперимент по исследованию НДС оболочки вращения, радиус которой определялся функциональной зависимостью вида

$$r(x) = a + b \cos(x/C). \quad (4.27)$$

Входящие в (4.27) геометрические параметры имели следующие значения: $a = 0.9$ м; $b = 0.4$ м; $c = 0.24$ м. Осевая координата x изменялась в пределах $0 \leq x \leq 0.24\pi$ м. На левом торце оболочка имела шарнирное закрепление, препятствующее осевому смещению, правый торец был свободен от закреплений. Вследствие наличия осевой симметрии оболочка моделировалась лентой элементов дискретизации, ориентированной вдоль меридиана оболочки (рис. 4.9).

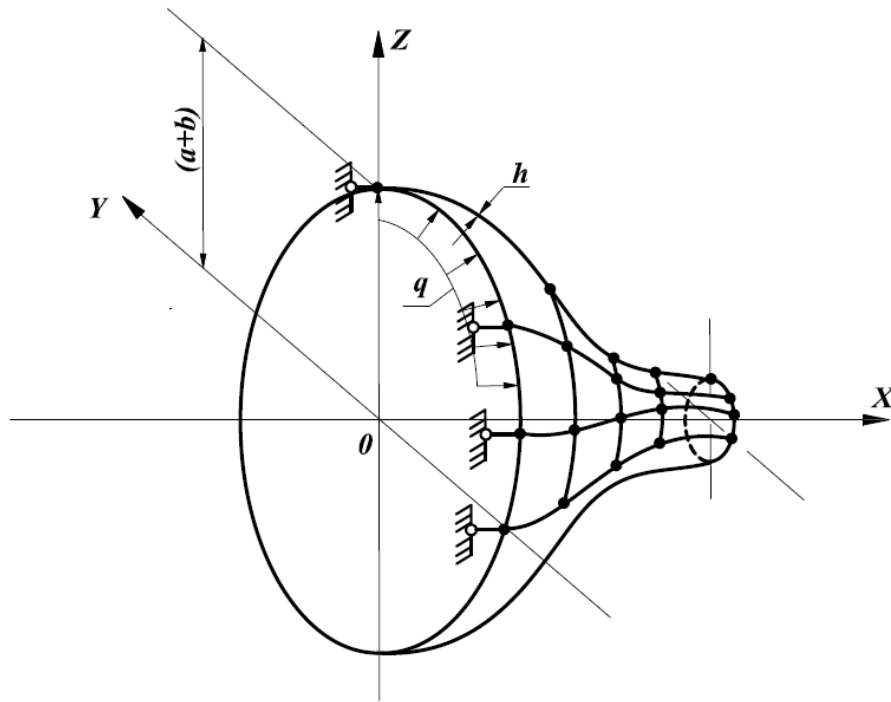


Рисунок 4.9 – Расчетная схема оболочки вращения

Прочие исходные данные были приняты следующими: $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\nu = 0.3$; $q = 0.4$ МПа; $h = 0.01$ м. В процессе выполнения численного эксперимента были использованы два варианта формулировок МКЭ. В первом варианте применялся МКЭ в форме метода перемещений. Во втором варианте использовался разработанный вариант смешанного МКЭ с силовыми узловыми неизвестными в виде продольных сил и изгибающих моментов.

Результаты повариантных вычислений на основе скалярного варианта интерполяционной процедуры представлены в табл. 4.4, где приведены значения нормальных напряжений в торцевых сечениях оболочки при различных сетках дискретизации.

Анализируя данные табл. 4.4, можно констатировать наличие устойчивой сходимости вычислительного процесса в обеих формулировках МКЭ.

Таблица 4.4 – Значения нормальных напряжений
в форме метода перемещений и в смешанной формулировке

Коор- динаты точек, х, м; θ, рад.	На- пря- же- ния, МПа	Сетка узлов						Решение из условия равнове- сия
		МКЭ в форме метода перемещений			Смешанная формулировка МКЭ			
		2×49	2×61	2×81	2×49	2×61	2×81	
χ = 0.0; θ = 0.0	σ_{ss}^{in}	23.14	22.76	22.46	22.04	22.08	22.10	—
	σ_{ss}^{midl}	22.50	22.32	22.22	22.136	22.142	22.148	22.154
	σ_{ss}^{out}	21.84	21.88	21.96	22.22	22.20	22.18	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{in}$	-162.40	-162.54	-162.62	-162.70	-162.72	-162.72	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{midl}$	-162.60	-162.66	-162.70	-162.68	-162.70	-162.70	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	-162.80	-162.80	-162.78	-162.64	-162.68	-162.70	—
χ = 0.24π; θ = 0.0	σ_{ss}^{in}	-0.582	-0.32	-0.148	-0.062	-0.042	-0.0246	—
	σ_{ss}^{midl}	-0.272	-0.146	-0.064	-0.0024	-0.0014	-0.0008	0.00
	σ_{ss}^{out}	0.042	0.030	0.0196	0.058	0.038	0.023	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{in}$	16.64	16.74	16.80	16.78	16.80	16.82	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{midl}$	16.74	16.80	16.82	16.80	16.82	16.84	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	16.84	16.84	16.86	16.82	16.82	16.84	—

Выбранная расчетная схема позволяет вычислить значение меридионального напряжения в опорном сечении, исходя из условия статического равновесия

$$\sigma_{xx}^{midl} = \frac{\pi(a+b)^2 - \pi(a-b)^2}{2\pi(a+b)} \cdot \frac{q}{t} = \frac{1.3^2 - 0.5^2}{2 \cdot 1.3} \cdot \frac{0.4}{0.01} = 22.154 \text{ МПа.}$$

Очевидно, что на правом, свободном торце меридиональные напряжения должны быть равны нулю ($\sigma_{xx}^{midl} = 0.00 \text{ МПа}$).

Как видно из таблицы 4.4, меридиональные напряжения на опорном и свободном торцах вполне соответствуют аналитическому решению из условия статического равновесия при реализации обеих формулировок МКЭ.

Если шарнирные опоры на левом торце заменить на упругоподатливые, оболочка получит возможность смещаться вдоль осевой координаты x , как абсолютно твердое тело. Величина данного жесткого смещения обратно пропорциональна жесткости пружинных опор. Общеизвестно, что наличие жестких смещений не должно оказывать влияния на параметры НДС рассчитываемой оболочки. Для того, чтобы оценить влияние жестких смещений на величины контролируемых прочностных параметров НДС оболочки, были выполнены расчеты при использовании векторной (для МКЭ в форме метода перемещений) и тензорно-векторной (для смешанной формулировки МКЭ) форм интерполяционных процедур. В табл. 4.5 приведены результаты численного эксперимента по расчету НДС оболочки, допускающей смещение как твердого тела, полученные при реализации МКЭ в формулировке метода перемещений при сетке узлов 2×61 . Анализ таблицы 4.5 показывает, что использование скалярной интерполяции компонент вектора перемещения приводит к существенным погрешностям вычислений напряжений даже при незначительных смещениях оболочки как абсолютно твердого тела. При более значительных величинах жестких смещений оболочки погрешность вычислений прочностных параметров НДС резко возрастает до совершенно неприемлемых значений. Так, начиная с величины жесткого смещения вдоль оси Ox равной 0.36 м и более, значения σ_{xx} на концевом сечении возрастают на несколько порядков, а $\sigma_{\theta\theta}$ вообще изменяют свой знак.

Для корректного анализа НДС оболочек вращения в криволинейной системе координат следует использовать векторную форму интерполяционной процедуры ((4.14)...(4.17)). Данный вид интерполяционной процедуры позволил корректным образом в полной мере учесть жесткие смещения оболочки.

Таблица 4.5. Значения нормальных напряжений при использовании скалярной и векторной интерполяции в формулировке метода перемещений

Координаты точек $x, m; \theta, \text{рад.}$	Напряжения, МПа	Способы интерполяции компонент вектора перемещений							Решение из условия равновесия
		Скалярный способ				Векторный способ			
		Величина смещения оболочки как твердого тела, м							
		0,00	0,36	0,76	1,51	0,00	0,76	1,51	
$x = 0.0; \theta = 0.0$	σ_{xx}^{in}	22.76	34.62	47.46	72.18	18.98	18.98	18.98	—
	σ_{xx}^{midl}	22.32	78.84	140.04	257.8	23.18	23.18	23.18	22.15
	σ_{xx}^{out}	21.88	123.06	232.6	443.2	27.38	27.38	27.38	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{in}$	-162.54	-166.48	-170.76	-178.98	-160.0	-160.0	-160.0	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{midl}$	-162.66	-153.22	-142.98	-123.32	-158.82	-158.82	-158.82	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	-162.80	-139.96	-115.20	-67.64	-157.60	-157.60	-157.60	—
$x = 0.24\pi; \theta = 0.0$	σ_{xx}^{in}	-0.32	-101.04	-210.2	-419.8	-0.216	-0.216	-0.216	—
	σ_{xx}^{midl}	-0.146	-56.22	-116.96	-233.8	0.066	0.066	0.066	0.00
	σ_{xx}^{out}	-0.030	-11.4	-23.78	-47.58	0.348	0.348	0.348	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{in}$	16.74	-24.14	-68.44	-153.56	17.02	17.02	17.02	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{midl}$	16.80	-10.70	-40.48	-97.72	17.10	17.10	17.10	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	16.84	2.74	-12.52	-41.88	17.18	17.18	17.18	—

Анализируя соответствующие колонки таблицы 4.5, можно констатировать, что при любой величине жестких смещений численные значения напряжений при реализации векторной формы интерполяции остаются

абсолютно стабильными, что является необходимым условием корректности алгоритма анализа НДС оболочек вращения, допускающих жесткие смещения.

С целью визуализации результатов, приведенных в таблице 4.5, на рисунке 4.10 представлены графики изменения нормальных напряжений на срединной поверхности в зависимости от величины жесткого смещения оболочки вдоль оси Ox . Кривыми 1...4 показаны изменения значений напряжений σ_{xx} и $\sigma_{\theta\theta}$ при общепринятой в МКЭ форме интерполяционной процедуры (кривые 1 и 2 отражают изменения напряжений в опорном сечении, а кривые 3 и 4 – в концевом сечении), а кривыми 5...8 – при использовании векторной формы интерполяции компонент вектора перемещений и их производных (кривые 5 и 6 относятся к опорному сечению, а кривые 7 и 8 – к концевому сечению).

Как видно из рисунка 4.10, кривые 1...4 имеют весьма существенный градиент, который нарастает по мере увеличения жесткого смещения, что является недопустимым. Кривые 5...8, напротив, представляют собой строго горизонтальные линии, что указывает на то, что значения напряжений не меняются даже при значительных величинах жесткого смещения оболочки при использовании векторной формы интерполяции компонент вектора перемещения.

В таблице 4.6 представлены результаты расчетов оболочки при пружинном опирании, выполненные в разработанной смешанной формулировке МКЭ.

Результаты расчета таблицы 4.6 показывают, что при использовании скалярной формы интерполяции значения напряжений σ_{xx} в опорном сечении практически не меняются, а значения $\sigma_{\theta\theta}$ возрастают по мере увеличения жесткого смещения, но отмеченная погрешность составляет 16%. В концевом сечении меридиональные напряжения σ_{xx} , несмотря на жесткие смещения, демонстрируют стабильность и остаются весьма близкими к нулевым значениям, что соответствует статическому условию равновесия

незагруженного торца. Кольцевые же напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ на правом конце существенно снижаются (до 20 раз) по мере увеличения жестких смещений, а при величине жесткого смещения 1.51 м меняют свой знак.

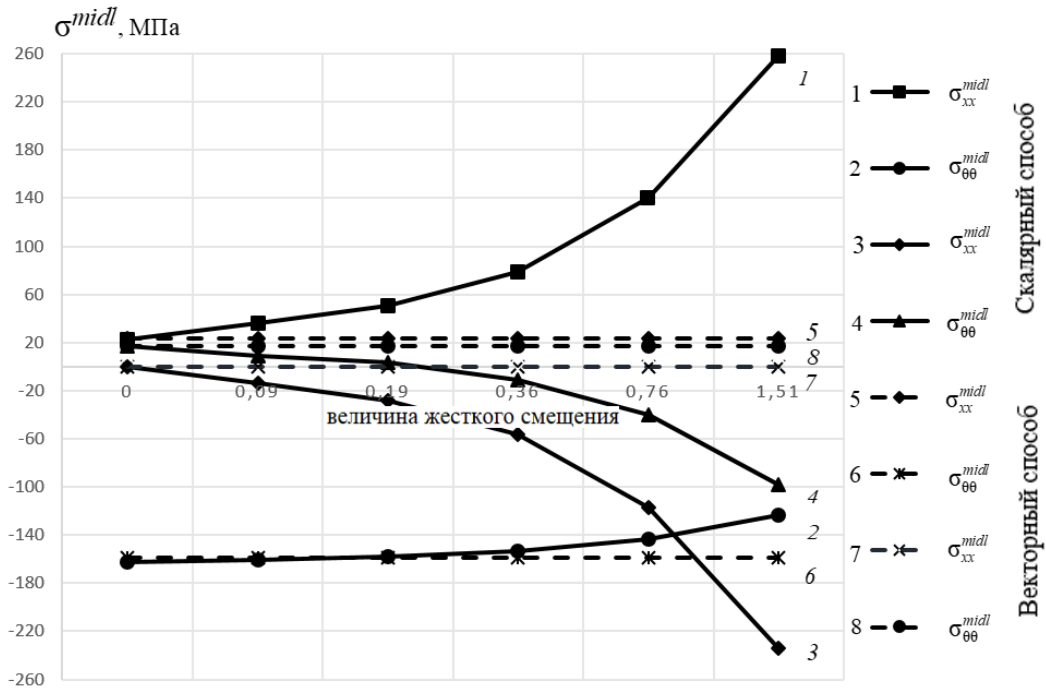


Рисунок 4.10 – Значения напряжений в формулировке метода перемещений с использованием скалярного (линии 1...4) и векторного (линии 5...8) способов интерполяции

Поэтому при наличии значительных величин жестких смещений оболочки и при реализации МКЭ в смешанной формулировке также целесообразно использование тензорно-векторной интерполяционной процедуры. В подтверждение данного факта можно наглядно убедиться, если проанализировать правую часть табл. 4.6, которая заполнена по результатам реализации тензорно-векторной формы интерполяционной процедуры. Значения σ_{xx} и $\sigma_{\theta\theta}$, и в опорном, и в концевом сечениях остаются абсолютно стабильными при любых, даже весьма существенных величинах смещения оболочки как жесткого целого.

Таблица 4.6 – Значения нормальных напряжений при использовании скалярной и тензорно-векторной интерполяции в смешанной формулировке

Координаты точек $x, m; \theta, \text{рад.}$	Напряжения, МПа	Способы интерполяции искомых величин						Решение из условия равновесия
		Скалярная интерполяция			Тензорно-векторная интерполяция			
		Величина смещения оболочки как твердого тела, м						
		0.00	0.76	1.51	0.00	0.76	1.51	
$x = 0.0; \theta = 0.0$	σ_{xx}^{in}	22.14	22.00	21.92	22.08	22.08	22.08	—
	σ_{xx}^{midl}	22.14	22.14	22.14	22.14	22.14	22.14	22.154
	σ_{xx}^{out}	22.20	22.28	22.36	22.22	22.22	22.25	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{in}$	-162.72	-175.94	-189.16	-162.60	-162.60	-162.60	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{midl}$	-162.70	-175.90	-189.10	-162.58	-162.58	-162.58	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	-162.68	-175.86	-189.04	-162.56	-162.56	-162.56	—
$x = 0.24\pi; \theta = 0.0$	σ_{xx}^{in}	-0.042	-0.308	-0.574	-0.042	-0.042	-0.042	—
	σ_{xx}^{midl}	-0.002	0.004	0.008	-0.002	-0.002	-0.002	0.00
	σ_{xx}^{out}	0.038	-0.316	0.592	0.038	0.038	0.038	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{in}$	16.80	0.886	-15.030	16.82	16.82	16.82	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{midl}$	16.82	0.99	-14.836	16.84	16.84	16.84	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	16.84	1.092	-14.642	16.84	16.84	16.84	—

Результаты, приведенные в таблице 4.6, также представлены в графической форме (рис. 4.11), обозначения в которой соответствуют обозначениям, принятым на рис. 4.10.

Как видно из рисунка 4.11, кривые 1 и 3, которые отражают изменение σ_{xx} при общепринятой в МКЭ форме интерполяции – горизонтальные, а кривые 2 и 4, отражающие изменение $\sigma_{\theta\theta}$ при этой же форме интерполяции имеют градиент, нарастающий при увеличении величины жесткого смещения.

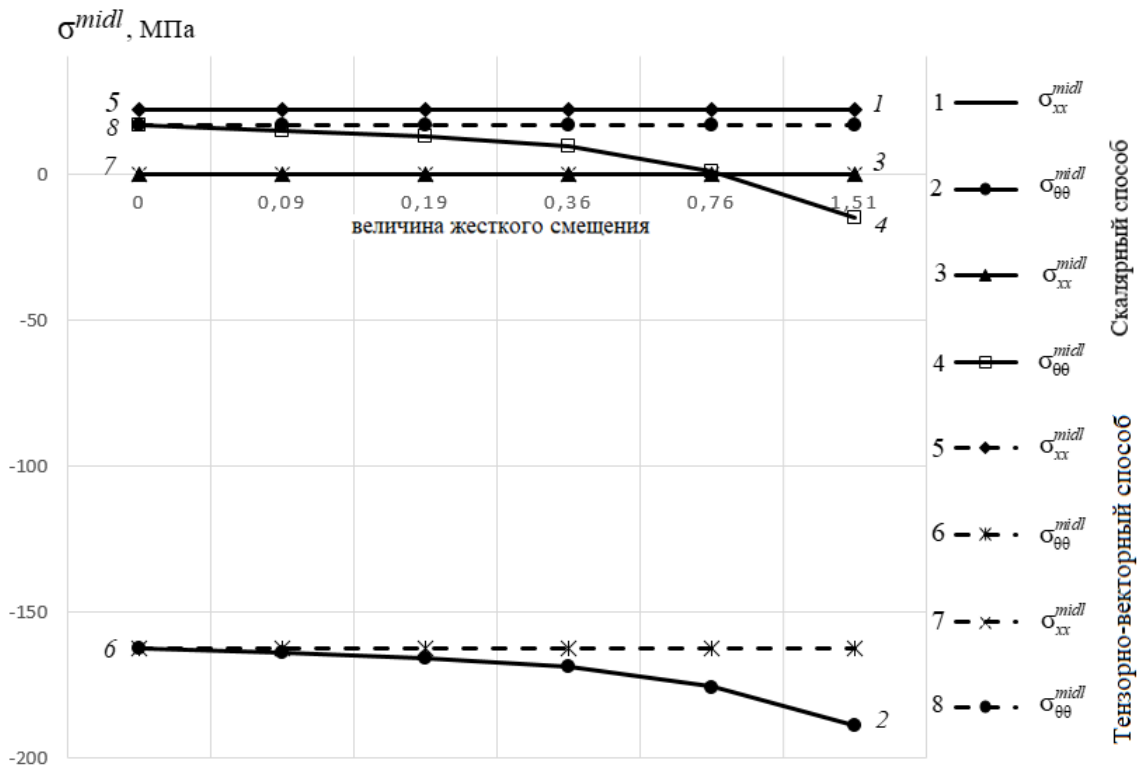


Рисунок 4.11 – Значения напряжений в разработанной смешанной формулировке МКЭ с использованием скалярного (линии 1...4) и тензорно-векторного (линии 5...8) способов интерполяции

При использовании тензорно-векторной формы интерполяционной процедуры (кривые 5...8) наблюдается абсолютная стабильность напряжений (кривые 5...8 строго горизонтальны) при всех рассматриваемых значениях величины смещения оболочки как жесткого целого, что подтверждает преимущества такой формы интерполяционной процедуры при анализе НДС оболочек вращения, в том числе допускающих жесткие смещения.

4.2.4. Примеры расчёта оболочки вращения с использованием вычислительного комплекса ANSYS

С целью адекватной оценки точности вычисления прочностных параметров НДС оболочек вращения при использовании разработанного алгоритма на основе смешанного МКЭ с тензорно-векторной формой интерполяции искомых величин был выполнен сравнительный анализ конечно-

элементных решений, полученных с применением разработанного алгоритма и вычислительного комплекса ANSYS. Первоначально параметр c в формуле (4.27) был принят равным 0.10 м ($0 \leq x \leq 0.10\pi$ м), затем данному параметру последовательно давались значения $c = 0.08$ м; $c = 0.06$ м; $c = 0.05$ м. Была использована расчетная схема, представленная на рисунке 4.9. Значение интенсивности внутреннего давления было принято равным $q = 0.2$ МПа. Прочие геометрические и физические значения исходных данных соответствовали приведенным выше величинам. Результаты расчетов представлены в табличной форме (табл. 4.7–4.10).

Таблица 4.7 – Значения нормальных напряжений при использовании вычислительного комплекса ANSYS и в смешанной формулировке при $c = 0.10$ м

Коор- динаты точек, х, м θ, рад.	На- пря- же- ния, МПа	Варианты расчета						Решение из условия стати- ческого равнове- сия
		ANSYS Shell 181			Смешанный МКЭ с тензорно-векторной интерполяцией			
		Сетка узлов						
		21×61	21×151	21×201	2×61	2×81	2×101	
х = 0.0; θ = 0.0	σ_{xx}^{in}	13.07	11.58	11.63	11.21	11.15	11.12	—
	σ_{xx}^{midl}	10.88	11.205	11.42	11.05	11.06	11.07	11.077
	σ_{xx}^{out}	8.69	10.83	11.21	10.89	10.97	11.01	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{in}$	-379.92	-401.88	-408.7	-403.3	-403.5	-403.5	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{midl}$	-383.2	-402.25	-407.7	-403.3	-403.5	-403.6	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	-386.53	-402.62	-406.7	-403.4	-403.5	-403.6	—
х = 0.10π; θ = 0.0	σ_{xx}^{in}	-0.216	-0.048	-0.003	-0.0310	-0.0179	-0.0117	—
	σ_{xx}^{midl}	0.157	0.034	0.031	-0.0011	-0.0006	-0.0004	0.00
	σ_{xx}^{out}	0.529	0.116	0.064	0.0288	0.0167	0.0109	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{in}$	1.79	-1.61	-2.49	-3.057	-3.042	-3.037	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{midl}$	2.06	-1.80	-2.95	-3.103	-3.070	-3.055	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	2.32	-1.98	-3.41	-3.152	-3.097	-3.072	—

Как следует из анализа значений напряжений, приведенных в таблице 4.7 ($c = 0.10$ м) при существенном сгущении сетки КЭ, величины нормальных напряжений, полученные при использовании вычислительного комплекса ANSYS в опорном сечении, оказались примерно равными значениям напряжений, вычисленным при использовании разработанного алгоритма.

В концевом же сечении значения кольцевых напряжений, вычисленные в комплексе ANSYS при относительно редкой сетке КЭ имеют противоположный знак значениям, полученным при достаточно густой сетке элементов дискретизации. Также следует отметить, что для достижения уровня точности вычисления кольцевых напряжений, соответствующего уровню точности разработанного алгоритма смешанного МКЭ с тензорно-векторной аппроксимацией перемещений вычислительному комплексу ANSYS понадобилось, как минимум, в 3–4 раза большее число КЭ в меридиональном направлении. Анализируя значения нормальных напряжений, вычисленных при использовании разработанного алгоритма, можно констатировать гораздо лучшую сходимость вычислительного процесса по сравнению со сходимостью, продемонстрированному комплексом ANSYS.

При уменьшении значения параметра до $c = 0.08$ м кривизна меридиана оболочки пропорционально возрастет. Результаты расчета при $c = 0.08$ м внесены в таблицу 4.8.

Анализируя табличные данные, можно отметить исключительно быструю сходимость вычислительного процесса разработанного алгоритма по сравнению с ANSYS. Так, значения меридиональных и кольцевых напряжений на срединной поверхности в опорном сечении при сетке 2×31 и 2×121 изменяются всего лишь на 1.3% и 0.33% соответственно. В концевом сечении данный процент по кольцевым напряжениям составляет 2.5. Меридиональные напряжения в концевом сечении оказались достаточно близки к нулевым значениям даже при редкой сетке КЭ. При использовании программного комплекса ANSYS процент расхождения при сетке узлов 21×61 и 21×201 (сетка 21×31 во внимание даже не принималась) в опорном сечении составил 8% и

6.1% для меридиональных и кольцевых напряжений на срединной поверхности соответственно. В концевом же сечении для кольцевых напряжений процент расхождения составил уже 78.9%. Кроме того, следует отметить, что даже при густой сетке КЭ (21×201) кольцевые напряжения в концевом сечении, вычисленные в программном комплексе ANSYS, оказались заниженными по абсолютной величине на 20% по сравнению с кольцевыми напряжениями, полученными при использовании разработанного алгоритма.

Таблица 4.8 – Значения нормальных напряжений при использовании вычислительного комплекса ANSYS и в смешанной формулировке при $c = 0.08$ м

Коор- динаты точек, х, м θ, рад.	Напря- жения, МПа	Варианты расчета						Решение из условия стати- ческого равно- весия
		ANSYS Shell 181			Смешанный МКЭ с тензорно-векторной интерполяцией			
		Сетка узлов						
		21×61	21×151	21×201	2×31	2×81	2×121	
x = 0.0; θ = 0.0	σ_{xx}^{in}	14.55	12.26	12.06	11.86	11.19	11.13	—
	σ_{xx}^{midl}	10.55	11.365	11.47	10.94	11.056	11.07	11.077
	σ_{xx}^{out}	6.55	10.47	10.88	10.01	10.92	11.01	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{in}$	-492.2	-526.1	-532.4	-520.7	-522.3	-522.4	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{midl}$	-500.45	-528.1	-533.15	-520.7	-522.3	-522.45	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	-508.7	-530.1	-533.9	-520.7	-522.4	-522.5	—
x = 0.08π; θ = 0.0	σ_{xx}^{in}	-0.415	-0.12	-0.09	-0.125	-0.0199	-0.009	—
	σ_{xx}^{midl}	0.223	0.001	0.025	-0.0046	-0.0006	-0.0003	0.00
	σ_{xx}^{out}	0.86	0.123	0.14	0.115	0.0186	0.0084	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{in}$	-3.25	-9.01	-10.1	-12.36	-12.49	-12.50	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{midl}$	-2.165	-8.88	-10.25	-12.84	-12.56	-12.53	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	-1.08	-8.75	-10.4	-13.33	-12.63	-12.56	—

Таблица 4.9 – Значения нормальных напряжений при использовании
вычислительного комплекса ANSYS
и в смешанной формулировке при $c = 0.06$ м

Коор- динаты точек, х, м; θ, рад.	На- пря- же- ния, МПа	Варианты расчета						Реше- ние из усло- вия стати- чес- кого равно- весия
		ANSYS Shell 181			Смешанный МКЭ с тензорно-векторной интерполяцией			
		Сетка узлов						
		21×41	21×81	21×201	2×41	2×81	2×151	
х = 0.0; θ = 0.0	σ_{xx}^{in}	17.79	15.62	13.63	11.68	11.23	11.12	-
	σ_{xx}^{midl}	8.21	10.305	11.99	10.94	11.04	11.07	11.077
	σ_{xx}^{out}	-1.37	4.99	10.35	10.20	10.85	11.01	-
	$\sigma_{\theta\theta}^{in}$	-609.0	-660.2	-703.8	-681.8	-682.3	-682.4	-
	$\sigma_{\theta\theta}^{midl}$	-636.75	-678.2	-710.45	-681.5	-682.3	-682.4	-
	$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	-664.5	-696.2	-717.1	-681.2	-682.3	-682.4	-
х = 0.06π; θ = 0.0	σ_{xx}^{in}	-0.84	-0.48	-0.23	-0.074	-0.0194	-0.0056	-
	σ_{xx}^{midl}	0.325	0.195	0.031	-0.003	-0.0007	-0.0002	0.00
	σ_{xx}^{out}	1.49	0.87	0.29	0.068	0.018	0.0052	-
	$\sigma_{\theta\theta}^{in}$	-2.86	-12.61	-20.25	-28.76	-29.25	-29.37	-
	$\sigma_{\theta\theta}^{midl}$	0.70	-10.21	-20.09	-29.59	-29.46	-29.43	-
	$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	4.26	-7.81	-19.96	-30.43	-29.67	-29.48	-

Анализируя данные, представленные в таблице 4.9, которые были получены при значении параметра $c = 0.06$ м, можно сделать выводы, аналогичные выводам, полученным по результатам анализа табл. 4.8 с той лишь разницей, что сходимость вычислительного процесса программного комплекса ANSYS ухудшилась, а проценты расхождений между значениями напряжений при сетке узлов 21×41 и 21×201 – увеличились до 31.5% и 10.4% для меридиональных и кольцевых напряжений в опорном сечении соответственно. Кольцевые значения в концевом сечении, вычисленные при сетке 21×201 в комплексе ANSYS оказались заниженными по сравнению с разработанным алгоритмом уже на 31.8%.

Таблица 4.10 – Значения нормальных напряжений при использовании вычислительного комплекса ANSYS и в смешанной формулировке при $c = 0.05$ м

Координаты точек, x , м θ , рад.	Напряжения, МПа	Варианты расчета						Решение из условия статического равновесия
		ANSYS Shell 181			Смешанный МКЭ с тензорно-векторной интерполяцией			
		Сетка узлов						
		21×61	21×151	21×201	2×61	2×101	2×151	
$x = 0.0;$ $\theta = 0.0$	σ_{xx}^{in}	16.33	15.21	14.87	11.37	11.18	11.12	-
	σ_{xx}^{midl}	8.62	11.78	12.45	10.99	11.04	11.06	11.077
	σ_{xx}^{out}	0.919	8.34	10.02	10.60	10.90	11.0	-
	$\sigma_{\theta\theta}^{in}$	-740.8	-805.65	-820.4	-782.9	-782.9	-782.9	-
	$\sigma_{\theta\theta}^{midl}$	-775.25	-822.63	-832.4	-782.7	-782.9	-782.9	-
	$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	-809.7	-839.6	-844.4	-782.5	-782.9	-782.95	-
$x = 0.05\pi;$ $\theta = 0.0$	σ_{xx}^{in}	-1.17	-0.44	-0.39	-0.026	-0.0094	-0.0041	-
	σ_{xx}^{midl}	0.13	0.005	0.015	-0.0015	-0.0005	-0.0002	0.00
	σ_{xx}^{out}	1.43	0.45	0.42	0.0227	0.0084	0.0037	-
	$\sigma_{\theta\theta}^{in}$	6.89	-6.34	-4.78	-33.27	-33.67	-33.80	-
	$\sigma_{\theta\theta}^{midl}$	14.06	-1.7	-1.22	-33.99	-33.93	-33.90	-
	$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	21.23	2.94	2.34	-34.71	-34.18	-34.01	-

Если значение параметра уменьшить до $c = 0.05$ м, то кривизна меридиана оболочки возрастет и погрешность значений напряжений, полученных с помощью программного комплекса ANSYS, возрастет. Это обстоятельство подтверждается анализом результатов, представленных в таблице 4.10 при значении параметра $c = 0.05$ м. Если в опорном сечении сходимость вычислительного процесса еще наблюдается (хотя σ_{xx}^{midl} отличаются на 12.4% от σ_{xx} по условиям равновесия при сетке узлов 21×201, а $\sigma_{\theta\theta}^{midl}$ монотонно возрастают от 775.25 МПа до 832.4 МПа), то в концевом сечении сходимость по кольцевым напряжениям явно неудовлетворительная. Кроме того, значения $\sigma_{\theta\theta}$ на внутренней и наружной поверхностях оболочки имеют разный знак, чего не

наблюдалось при предыдущих значениях параметра c , равных 0.10 м; 0.08 м; 0.06 м. Также следует отметить, что при значении параметра $c = 0.05$ м нарушается выявленная при других значениях параметра c закономерность, которая заключается в том, что при уменьшении параметра c напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ в концевом сечении возрастают по абсолютной величине. И напротив, анализируя правую часть таблицы 4.10, в которой представлены значения напряжений, вычисленных при использовании разработанного алгоритма, можно наблюдать абсолютную сходимость вычислительного процесса при любом варианте сетки дискретизации и практическое совпадение меридиональных напряжений σ_{xx}^{midl} с напряжениями, вычисленными из условия статического равновесия оболочки.

4.2.5. Примеры расчёта эллиптической арки при шарнирном и пружинном опирании

В качестве тестовой задачи был выполнен расчет двухшарнирной арки эллиптического очертания (рис. 4.12), загруженной линейной нагрузкой интенсивности $q = 60$ Н/м.

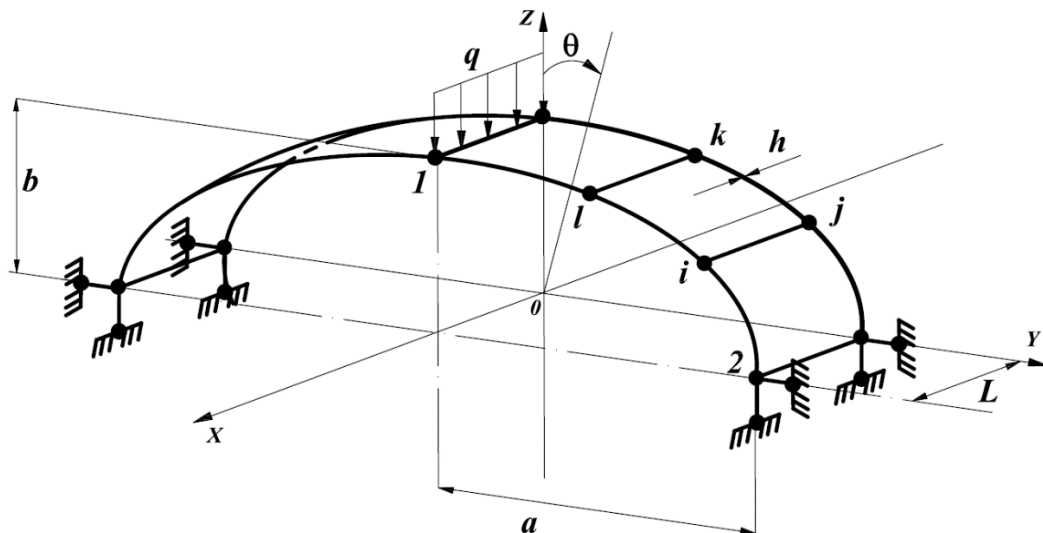


Рисунок 4.12 – Расчетная схема эллиптической арки при шарнирном опирании

По условиям симметрии рассматривалась половина арки. Использовались следующие исходные данные: $L = 0,01$ м; $a = 5,0$ м; $b = 1,0$ м;

$h=0,01$ м; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\nu = 0.3$. Расчеты выполнялись в двух вариантах: в первом варианте искомые величины аппроксимировались как составляющие скалярных полей; во втором варианте интерполяционные функции применялись к векторным и тензорным полям в трехпольном варианте МКЭ и только после координатных преобразований определялись аппроксимирующие выражения искомых величин. Результаты повариантных расчетов приведены в таблице 4.11, где в зависимости от степени сгущения сетки дискретизации даются «физические» значения нормальных напряжений на внутренней σ^{in} , наружной σ^{out} и срединной σ^{midl} поверхностях оболочки, а также моментов и продольных сил в точках 1 и 2 арки.

Таблица 4.11 – Значения нормальных напряжений, изгибающих моментов и продольных сил в точке 1 приложения нагрузки и в точке 2 шарнирного опирания

Координаты точек, $y, \text{м}; \theta, \text{рад.}$	$\sigma, 10^{-2} \text{ МПа}; M, \text{Н}\cdot\text{см}; N, \text{Н}$	Способ интерполяции						Значения $M_{\phi}^{22}, N_{\phi}^{22}, \sigma_{\theta\theta}^{midl}$ из условия равновесия
		Общепринятый			Тензорно-векторный			
		Сетка узлов						
		121×2	151×2	181×2	121× 2	151 × 2	181 × 2	
$y = 0.0;$ $\theta=0.0$	$\sigma_{\theta\theta}^{in}$	291.4	291.4	291.4	291.4	291.4	291.4	-
	$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	-293.3	-293.3	-293.3	-293.3	-293.3	-293.3	-
	M^{22}	-48.73	-48.73	-48.73	-48.72	-48.73	-48.73	-
	σ_{xx}^{in}	87.42	87.42	87.43	87.42	87.42	87.42	-
	σ_{xx}^{out}	-87.99	-88.00	-88.00	-87.99	-87.99	-88.00	-
$y = 5.0;$ $\theta = \frac{\pi}{2}$	σ_{xx}^{midl}	0.350	-0.099	0.006	0.415	0.185	0.080	-
	$\sigma_{\theta\theta}^{midl}$	-0.292	-0.295	-0.296	-0.310	-0.304	-0.301	-0.300
	M^{22}	-0.065	-0.030	-0.0161	-0.098	-0.047	-0.026	0.000
	N^{22}	-0.292	-0.295	-0.296	-0.310	-0.304	-0.301	-0.300

В правой колонке таблицы 4.11 даются значения M_{ϕ}^{22} и N_{ϕ}^{22} в точке 2 арки, определенные соотношениями

$$N_{\phi}^{22} = -\frac{q \cdot L}{2} = -\frac{60 \cdot 0,01}{2} = -0,300 \text{ Н};$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{midl} = -\frac{N_{\phi}^{22}}{(L \cdot h)} = -\frac{0,300}{(0,01 \cdot 0,01)} = -0,300 \cdot 10^{-2} \text{ МПа};$$

$$M_{\phi}^{22} = 0.000 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Анализ данных таблицы 4.11 показывает сходимость вычислительного процесса при использовании трехпольного конечного элемента и адекватное совпадение параметров НДС со значениями, полученными аналитическим путем. Сравнение повариантных значений нормальных напряжений, продольных сил и изгибающих моментов показывает их примерное совпадение.

При замене шарнирной опоры на пружинную (рис. 4.13) оболочка получает возможность смещаться в вертикальном направлении при неизменном НДС.

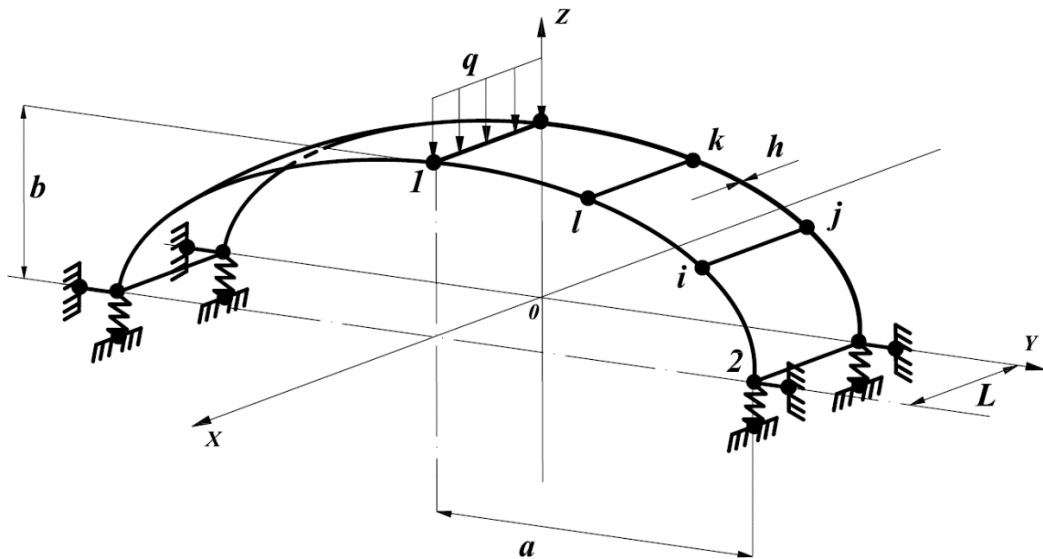


Рисунок 4.13 – Расчетная схема эллиптической арки при пружинном опирании

В таблице 4.12 приведены значения параметров НДС оболочки при различных смещениях арки по вертикали. При выполнении повариантных расчетов была использована сетка дискретизации 151×2

Таблица 4.12 – Значения нормальных напряжений, изгибающих моментов
и продольных сил в точке 1 приложения нагрузки
и в точке 2 пружинного опирания

Координаты точек, $y, \text{м};$ $\theta, \text{рад.}$	$\sigma, 10^{-2}$ МПа; $M, \text{Н} \cdot \text{см};$ $N, \text{Н}$	Величина жесткого смещения, м				Значения $M^{22}, N^{22},$ $\sigma_{\theta\theta}^{midl}$ из условия равновесия
		0.00	0.50	0.75	0.88	
Общепринятый способ интерполяции						
$y = 0.0;$ $\theta = 0.0$	$\sigma_{\theta\theta}^{in}$	291.4	290.9	290.6	290.5	-
	$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	-293.3	-292.8	-292.5	-292.4	-
	M^{22}	-48.73	-48.64	-48.60	-48.57	-
	σ_{xx}^{in}	87.42	87.32	87.27	87.25	-
	σ_{xx}^{out}	-88.00	-87.77	-87.67	-87.62	-
$y = 5.0;$ $\theta = \frac{\pi}{2}$	σ_{xx}^{midl}	-0.099	-437.4	-614.2	-745.4	-
	$\sigma_{\theta\theta}^{midl}$	-0.295	0.160	0.160	0.234	-0.300
	M^{22}	-0.030	1.033	1.529	1.782	0.000
	N^{22}	-0.295	0.160	0.160	0.234	-0.300
Тензорно-векторный способ интерполяции						
$y = 0.0;$ $\theta = 0.0$	$\sigma_{\theta\theta}^{in}$	291.4	291.4	291.4	291.4	-
	$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	-293.3	-293.3	-293.3	-293.3	-
	M^{22}	-48.73	-48.73	-48.73	-48.73	-
	σ_{xx}^{in}	87.42	87.42	87.42	87.42	-
	σ_{xx}^{out}	-87.99	-87.99	-87.99	-87.99	-
$y = 5.0;$ $\theta = \frac{\pi}{2}$	σ_{xx}^{midl}	0.185	0.185	0.185	0.185	-
	$\sigma_{\theta\theta}^{midl}$	-0.304	-0.304	-0.304	-0.304	-0.300
	M^{22}	-0.047	-0.047	-0.047	-0.047	0.000
	N^{22}	-0.304	-0.304	-0.304	-0.304	-0.300

Анализ данных таблицы 4.12 показывает, что в первом варианте расчета параметры НДС оболочки в точке пружинного опирания претерпевают весьма значительные изменения, которые возрастают по мере увеличения смещения оболочки как абсолютно твердого тела. Так, при смещении оболочки на величину 0.50 м напряжения $\sigma_{\theta\theta}^{midl}$ уже меняют свой знак, а σ_{xx} возрастают на

несколько порядков. На основе этого можно отметить, что использование общепринятой в МКЭ интерполяции компонент вектора перемещения, компонент тензоров усилий и моментов, деформаций и искривлений не позволяет учитывать смещения оболочки как абсолютно твердого тела. И напротив, использование разработанной тензорно-векторной формы интерполяционной процедуры в трехпольной формулировке МКЭ позволяет в полной мере учитывать смещения оболочки как абсолютно твердого тела. Подтверждением этого факта является анализ значений параметров НДС оболочки, полученных во втором варианте расчета. Анализ данных, представленных в нижней части таблицы 4.12 показывает, что численные значения нормальных напряжений, продольных сил и изгибающих моментов остаются неизменными даже при существенной величине жестких смещений, что доказывает несомненные преимущества разработанного трехпольного конечного элемента с тензорно-векторной формой интерполяционной процедуры.

4.2.6. Примеры расчёта эллиптического цилиндра при шарнирном и пружинном опирании

Определено НДС эллиптической цилиндрической оболочки, имеющей первоначально шарнирное опирание по торцам (рис. 4.14).

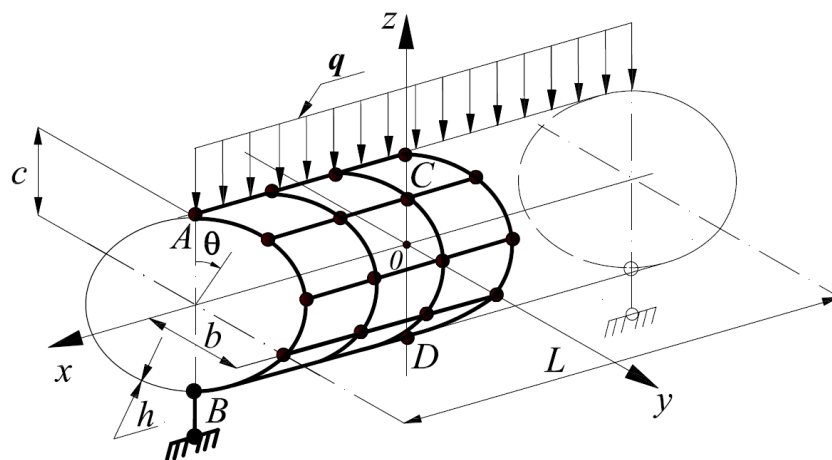


Рисунок 4.14 – Расчетная схема эллиптического цилиндра при шарнирном опирании

Вдоль верхней образующей была приложена линейно распределенная нагрузка интенсивностью $q=1$ кН/м. Геометрические размеры оболочки были приняты равными: $L=2.0$ м; толщина стенки $h=0.015$ м; параметры эллипса поперечного сечения: $b=1.0$ м; $c=0.3$ м. Физические характеристики: $E=2 \cdot 10^5$ МПа; $\nu=0.3$.

Таблица 4.13 – Значения нормальных напряжений
в контролируемых точках при шарнирном опирании

Координаты точек, x, м; θ, рад.	На- пря- жения σ, МПа	Варианты расчета					
		Первый			Второй		
		Сетка узлов					
		41×41	51×51	56×56	41×41	46×46	51×51
Т. А, x=1.00; θ=0.00	σ _{θθ} ⁱⁿ	12.36	12.63	12.64	12.67	12.67	12.66
	σ _{θθ} ^{out}	-15.55	-15.75	-15.73	-15.74	-15.75	-15.76
Т. В, x=1.00; θ=π	σ _{θθ} ⁱⁿ	49.63	56.33	57.19	53.56	55.02	56.33
	σ _{θθ} ^{out}	-65.20	-73.47	-74.32	-71.06	-72.65	-74.08
	σ _{xx} ⁱⁿ	-5.101	-5.552	-5.528	-5.574	-5.579	-5.584
	σ _{xx} ^{out}	5.109	5.549	5.523	5.572	5.578	5.584
Т. С, x=0.00; θ=0.00	σ _{θθ} ⁱⁿ	13.99	14.22	14.22	14.23	14.23	14.24
	σ _{θθ} ^{out}	-14.15	-14.38	-14.38	-14.40	-14.40	-14.40
	σ _{xx} ⁱⁿ	4.286	4.350	4.349	4.357	4.357	4.358
	σ _{xx} ^{out}	-4.110	-4.177	-4.170	-4.188	-4.188	-4.188
Т. D, x=0.00; θ=π	σ _{xx} ⁱⁿ	3.840	4.098	4.079	4.111	4.111	4.111
	σ _{xx} ^{out}	-0.690	-0.663	-0.664	-0.619	-0.619	-0.618

Как и в предыдущем примере определение НДС оболочки выполнялось при двух вариантах интерполяции искомых величин. Результаты повариантных расчетов при шарнирном способе опирания оболочки приведены в таблице 4.13,

в которой даются численные значения физических напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ и σ_{xx} на внутренней и наружной поверхностях оболочки в точках A, B, C и D (рис. 4.14) при различных размерах сетки дискретизации $1/4$ части эллиптического цилиндра (была рассчитана только четвертая часть оболочки вследствие симметрии расчетной схемы).

Анализ данных, приведенных в таблице 4.13, показывает, что при использовании обоих вариантов аппроксимации искомых величин наблюдается сходимость вычислительного процесса, но во втором варианте аппроксимации искомых величин сходимость выше. Значения контролируемых параметров НДС в обоих вариантах весьма близки между собой.

При замене шарнирных опор оболочки на пружинные при действии той же нагрузки она получает возможность смещаться по вертикали как твердое тело (рис. 4.15).

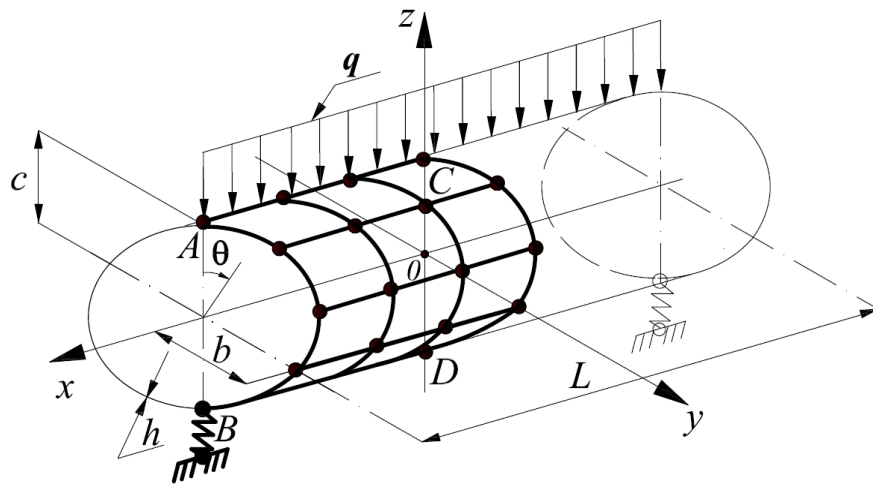


Рисунок 4.15 – Расчетная схема эллиптического цилиндра
при пружинном опирании

Результаты определения НДС оболочки при фиксированной сетке узлов 51×51 и различных смещениях оболочки как твердого тела приведены в таблице 4.14.

Таблица 4.14 – Значения нормальных напряжений
в контролируемых точках при пружинном опирании

Координаты точек, x, м; θ, рад.	Напряжения σ, МПа	Величина жесткого смещения в вертикальном направлении, м			
		0.00	0.25	0.50	1.0
Первый вариант					
Т. А, x = 1.00; θ = 0.00	σ _{θθ} ⁱⁿ	12.63	8.312	6.568	5.035
	σ _{θθ} ^{out}	-15.75	-13.24	-12.23	-11.34
Т. В, x = 1.00; θ = π	σ _{θθ} ⁱⁿ	56.33	36.72	28.79	21.83
	σ _{θθ} ^{out}	-73.47	-44.76	-33.16	-22.96
	σ _{xx} ⁱⁿ	-5.552	-3.128	-2.149	-1.288
	σ _{xx} ^{out}	5.549	3.273	2.353	1.544
Т. С, x = 0.00; θ = 0.00	σ _{θθ} ⁱⁿ	14.22	10.71	9.287	8.039
	σ _{θθ} ^{out}	-14.38	-10.87	-9.447	-8.198
	σ _{xx} ⁱⁿ	4.35	3.609	3.310	3.046
	σ _{xx} ^{out}	-4.177	-2.454	-1.758	-1.146
Т. D, x = 0.00; θ = π	σ _{xx} ⁱⁿ	4.098	3.117	2.721	2.372
	σ _{xx} ^{out}	-0.663	-2.095	-2.6740	-3.183
Второй вариант					
Т. А, x = 1.00; θ = 0.00	σ _{θθ} ⁱⁿ	12.66	12.66	12.66	12.66
	σ _{θθ} ^{out}	-15.76	-15.76	-15.76	-15.76
Т. В, x = 1.00; θ = π	σ _{θθ} ⁱⁿ	56.33	56.33	56.33	56.33
	σ _{θθ} ^{out}	-74.08	-74.08	-74.08	-74.08
	σ _{xx} ⁱⁿ	-5.584	-5.584	-5.584	-5.584
	σ _{xx} ^{out}	5.584	5.584	5.584	5.584
Т. С, x = 0.00; θ = 0.00	σ _{θθ} ⁱⁿ	4.358	4.358	4.358	4.358
	σ _{θθ} ^{out}	-4.188	-4.188	-4.188	-4.188
	σ _{xx} ⁱⁿ	14.24	14.24	14.24	14.24
	σ _{xx} ^{out}	-14.40	-14.40	-14.40	-14.40
Т. D, x = 0.00; θ = π	σ _{xx} ⁱⁿ	4.111	4.111	4.111	4.111
	σ _{xx} ^{out}	-0.618	-0.618	-0.618	-0.618

Как следует из анализа данных таблицы 4.14, в первом варианте расчета наблюдается существенное изменение параметров НДС, причем фиксируемые изменения пропорциональны величине жесткого смещения оболочки в вертикальном направлении. Так, например, σ_{xx}^{in} в точке В уменьшились в 4.3 раза, а $\sigma_{\theta\theta}^{out}$ – в 3.2 раза.

Для наглядности полученных вычислений на рисунках 4.16 и 4.17 представлены повариантные графические зависимости изменения значений нормальных напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ и σ_{xx} в точке В в зависимости от величины жесткого вертикального смещения.

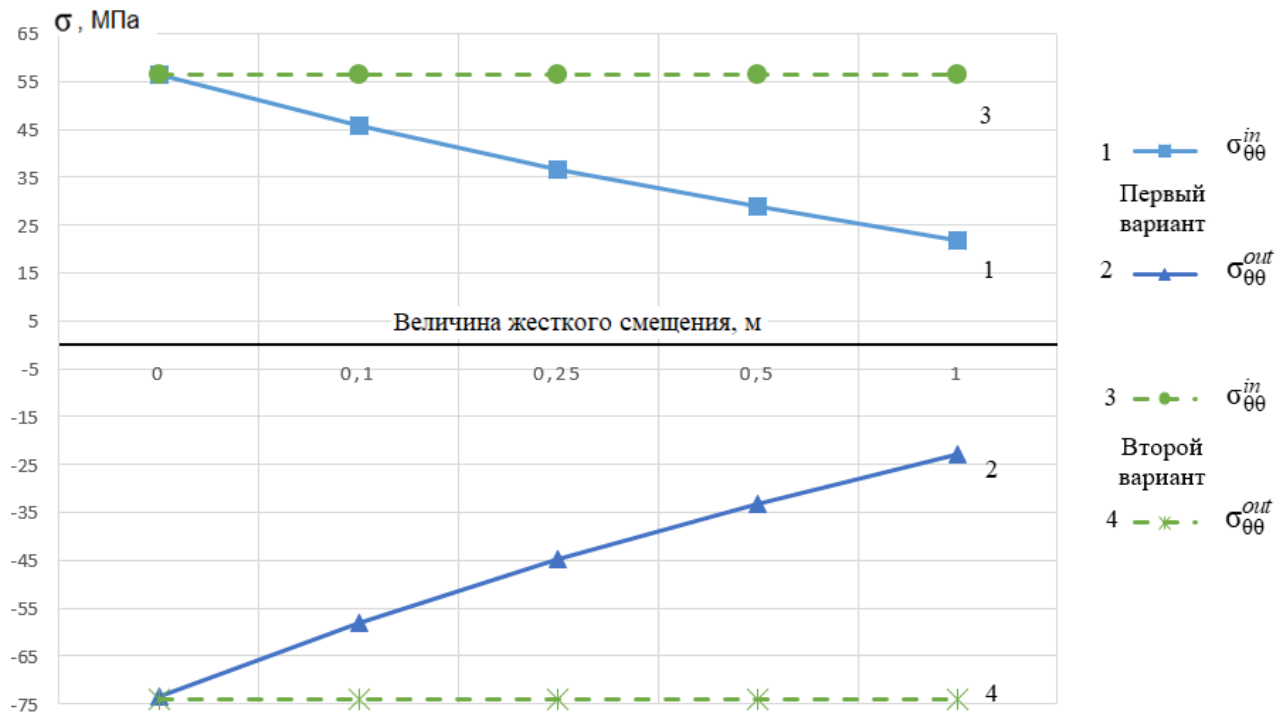


Рисунок 4.16 – Графики значений нормальных напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ в точке В

На графиках отчетливо прослеживается тенденция к увеличению погрешности вычисления напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ и σ_{xx} в первом варианте расчета по мере увеличения жесткого вертикального смещения оболочки. Во втором варианте расчета контролируемые параметры НДС остаются неизменными, чему свидетельствуют строго горизонтальные графики $\sigma_{\theta\theta}$ и σ_{xx} .

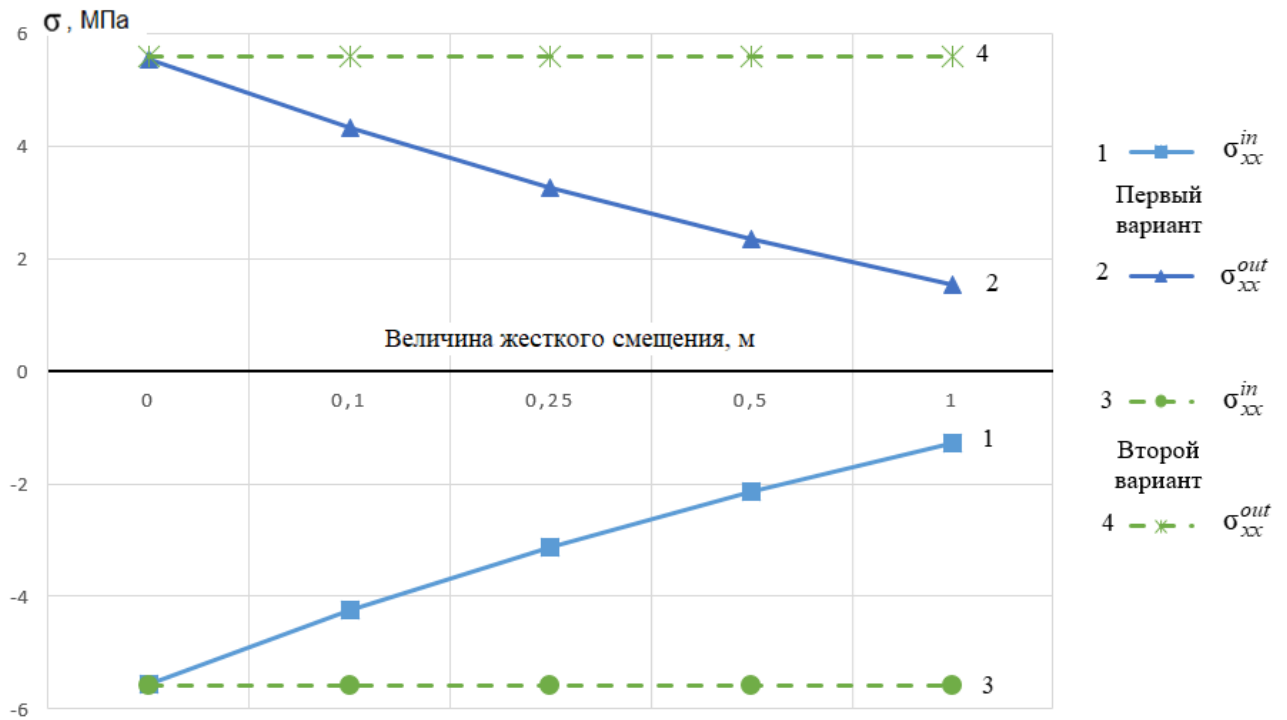


Рисунок 4.17 – Графики значений нормальных напряжений σ_{xx} в точке В

Из анализа данных таблицы 4.14 видно, что во втором варианте расчета контролируемые параметры НДС оставались абсолютно неизменными при любом значении величины вертикального жесткого смещения, что приводит к выводу о том, что разработанная тензорно-векторная форма интерполяционной процедуры искомых величин в трехпольном варианте МКЭ позволяет полностью учитывать смещения исследуемых оболочечных объектов техносферы как абсолютно твердых тел.

4.3. Выводы по четвертой главе

1. Разработан тензорно-векторный способ аппроксимации искомых величин для двупольного варианта смешанного МКЭ. Искомые параметрами на этапе записи аппроксимирующего выражения выступают тензоры деформаций и искривлений срединной поверхности. В результате преобразований получены новые аппроксимирующие выражения для компонент тензоров деформаций и

искривлений срединной поверхности, зависящие от узловых значений всех компонент соответствующих тензоров.

2. Разработан векторно-тензорный способ аппроксимации искомых величин для трехпольного варианта МКЭ, позволяющий выразить компоненты силовых (продольных сил и изгибающих моментов) и деформационных (деформаций и искривлений срединной поверхности) искомых неизвестных через полный набор узловых силовых или деформационных параметров.

3. Выполненные численные эксперименты по расчету оболочек со значительной кривизной срединной поверхности, имеющих возможность под действием заданной нагрузки смещаться как абсолютно твердые тела, показали, что применение разработанной тензорно-векторной формы интерполяционной процедуры позволяет вычислять искомые параметры НДС без какой-либо погрешности, а также корректным образом учитывать жесткие смещения оболочек.

4. Сопоставительный анализ конечно-элементных решений, полученных на основе использования смешанной формулировки МКЭ с тензорно-векторной формой аппроксимации искомых величин и формулировки МКЭ в форме метода перемещений, доказал несомненные преимущества разработанных алгоритмов МКЭ в смешанной формулировке с тензорно-векторной формой аппроксимации в плане корректности и точности вычислений прочностных параметров НДС оболочек.

5. На основании выполненного сравнительного анализа результатов конечно-элементных решений, полученных с использованием комплекса ANSYS и разработанного алгоритма, можно сделать вывод о том, что при расчете пологих оболочек вращения контролируемые параметры НДС, вычисленные с помощью ANSYS и разработанного алгоритма, оказываются достаточно близкими по своим значениям. Но по мере увеличения кривизны меридиана оболочки погрешность вычислений в программном комплексе ANSYS возрастает и может превысить предельно допустимый уровень. И напротив, значения напряжений, полученные при использовании разработанного алгоритма расчета на основе

смешанного МКЭ с тензорно-векторной интерполяционной процедурой, оказываются корректными даже при относительно редкой сетке узлов дискретизации, что позволяет эффективно исследовать НДС оболочек при минимальных затратах времени и ограниченных ресурсах вычислительной техники.

ГЛАВА 5. УЧЁТ ФИЗИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ В РАСЧЕТАХ ОБОЛОЧЕЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

В настоящее время при анализе НДС оболочечных конструкций необходимо учитывать не только упругую, но и пластическую стадию работы материала оболочки. Допущение пластической деформации в регламентированных СНиПами пределах позволяет в более полной мере использовать прочностные свойства применяемого материала оболочечной конструкции.

В настоящее время при расчете конструкций за пределом упругости применяют две теории: теорию малых упруго-пластических деформаций и теорию течения [83].

5.1. Соотношения теории малых упруго-пластических деформаций при использовании шаговой процедуры последовательного нагружения

Как отмечает Малинин Н.Н. «В теории малых упруго-пластических деформаций принимается, что зависимость средней линейной деформации от среднего нормального напряжения такая же, как и в пределах упругости» [83].

Данную гипотезу можно зафиксировать следующей формулой

$$I_1(\varepsilon) = K_\varepsilon I_1(\sigma), \quad (5.1)$$

где $I_1(\varepsilon) = g^{ij} \varepsilon_{ij}^\zeta$ – первый инвариант тензора деформаций; $I_1(\sigma) = g^{ij} \sigma_{ij}$ – первый инвариант тензора напряжений.

Входящий в (5.1) коэффициент пропорциональности определяется по формуле [83]

$$K_\varepsilon = \frac{1 - 2\nu}{E}. \quad (5.2)$$

Согласно второй гипотезе теории малых упруго-пластических деформаций компоненты девиатора деформаций пропорциональны компонентам девиатора напряжений

$$E_{ij} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \cdot S_{ij}, \quad (5.3)$$

где E_{ij} , S_{ij} – девиаторы деформаций и напряжений, соответственно

$$E_{ij} = \varepsilon_{ij}^\zeta - \frac{1}{3} I_1(\varepsilon) g_{ij}; \quad S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} I_1(\sigma) g_{ij}, \quad (5.4)$$

$$I_1(\varepsilon) = g^{ij} \varepsilon_{ij}^\zeta = g_{ij} \varepsilon^{\zeta ij}; \quad I_1(\sigma) = g^{ij} \sigma_{ij} = g_{ij} \sigma^{ij}.$$

Входящие в (5.3) интенсивность деформаций ε_i и интенсивность напряжений σ_i определяются зависимостями

$$\varepsilon_i = \sqrt{(2/3) E^{ij} E_{ij}}; \quad \sigma_i = \sqrt{(3/2) S^{ij} S_{ij}}, \quad (5.5)$$

где E^{ij} , S^{ij} – девиаторы деформаций и напряжений, определяемые их контравариантными компонентами

$$E^{ij} = \varepsilon^{\zeta ij} - \frac{1}{3} I_1(\varepsilon) g^{ij}; \quad S^{ij} = \sigma^{ij} - \frac{1}{3} I_1(\sigma) g^{ij}. \quad (5.6)$$

Соотношение (5.4) с учетом (5.6) примет следующий вид

$$\varepsilon_{ij}^\zeta - \frac{1}{3} I_1(\varepsilon) g_{ij} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} I_1(\sigma) g_{ij} \right). \quad (5.7)$$

Принимая во внимание первую гипотезу теории малых упруго-пластических деформаций (5.1) и (5.2) из (5.7) можно получить выражения для ковариантных компонент тензора деформаций через ковариантные компоненты тензора напряжений

$$\varepsilon_{ij}^\zeta = \frac{3}{2} \cdot \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \sigma_{ij} + I_1(\sigma) g_{ij} \left(\frac{1}{3} \cdot K_\varepsilon - \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \right). \quad (5.8)$$

При решении нелинейных задач механики оболочек, как правило, используют шаговую процедуру последовательного нагружения [100]. Для реализации шаговой процедуры нагружения необходимо установить связь между приращениями ковариантных компонент тензора деформаций и ковариантными компонентами тензора напряжений. Для установления этой зависимости воспользуемся формулой приближенного равенства

$$\Delta \varepsilon_{ij}^\zeta \approx d \varepsilon_{ij}^\zeta, \quad (5.9)$$

где

$$\varepsilon_{ij}^{\zeta} = f(\sigma_{11}, \quad \sigma_{22}, \quad \sigma_{12}). \quad (5.10)$$

Применяя формулу полного дифференциала к функции (5.10) можно получить следующие зависимости

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_{11}^{\zeta} &= \frac{\partial \varepsilon_{11}^{\zeta}}{\partial \sigma_{11}} \Delta \sigma_{11} + \frac{\partial \varepsilon_{11}^{\zeta}}{\partial \sigma_{22}} \Delta \sigma_{22} + \frac{\partial \varepsilon_{11}^{\zeta}}{\partial \sigma_{12}} \Delta \sigma_{12}; \\ \Delta \varepsilon_{22}^{\zeta} &= \frac{\partial \varepsilon_{22}^{\zeta}}{\partial \sigma_{11}} \Delta \sigma_{11} + \frac{\partial \varepsilon_{22}^{\zeta}}{\partial \sigma_{22}} \Delta \sigma_{22} + \frac{\partial \varepsilon_{22}^{\zeta}}{\partial \sigma_{12}} \Delta \sigma_{12}; \\ \Delta \varepsilon_{12}^{\zeta} &= \frac{\partial \varepsilon_{12}^{\zeta}}{\partial \sigma_{11}} \Delta \sigma_{11} + \frac{\partial \varepsilon_{12}^{\zeta}}{\partial \sigma_{22}} \Delta \sigma_{22} + \frac{\partial \varepsilon_{12}^{\zeta}}{\partial \sigma_{12}} \Delta \sigma_{12}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Для вычисления входящих в (5.11) частных производных $\partial \varepsilon_{ij}^{\zeta} / \partial \sigma_{ij}$ предварительно запишем выражения для ковариантных компонент тензора деформаций в соответствие с (5.8)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^{\zeta} &= \frac{3}{2} \cdot \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \sigma_{11} + g_{11}(g^{11}\sigma_{11} + g^{22}\sigma_{22} + 2g^{12}\sigma_{12}) \left(\frac{1}{3} K_{\varepsilon} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \right); \\ \varepsilon_{22}^{\zeta} &= \frac{3}{2} \cdot \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \sigma_{22} + g_{22}(g^{11}\sigma_{11} + g^{22}\sigma_{22} + 2g^{12}\sigma_{12}) \left(\frac{1}{3} K_{\varepsilon} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \right); \\ \varepsilon_{12}^{\zeta} &= \frac{3}{2} \cdot \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \sigma_{12} + g_{12}(g^{11}\sigma_{11} + g^{22}\sigma_{22} + 2g^{12}\sigma_{12}) \left(\frac{1}{3} K_{\varepsilon} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \right). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Вычисляя частную производную $\partial \varepsilon_{11}^{\zeta} / \partial \sigma_{11}$ можно получить следующее выражение

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_{11}^{\zeta}}{\partial \sigma_{11}} &= \frac{3}{2} \left(\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} + \sigma_{11} \frac{\partial}{\partial \sigma_{11}} \left(\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \right) \right) + g_{11} g^{11} \left(\frac{1}{3} K_{\varepsilon} - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \right) + \\ &+ g_{11} (g^{11}\sigma_{11} + g^{22}\sigma_{22} + 2g^{12}\sigma_{12}) \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \sigma_{11}} \left(\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \right) \right). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Входящая в (5.13) частная производная $\frac{\partial}{\partial \sigma_{11}} \left(\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \right)$ может быть определена по формуле

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_{11}} \left(\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \right) = \frac{\partial}{\partial \sigma_i} \left(\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \right) \frac{\partial \sigma_i}{\partial \sigma_{11}} = \frac{(\partial \varepsilon_i / \partial \sigma_i) \sigma_i - \varepsilon_i}{\sigma_i^2} \cdot \frac{\partial \sigma_i}{\partial \sigma_{11}} =$$

$$= \frac{1}{\sigma_i} \left(\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \sigma_i} - \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \right) \frac{\partial \sigma_i}{\partial \sigma_{11}} = \frac{1}{\sigma_i} \left(\frac{1}{E_k} - \frac{1}{E_c} \right) \frac{\partial \sigma_i}{\partial \sigma_{11}} = \psi \frac{\partial \sigma_i}{\partial \sigma_{11}}, \quad (5.14)$$

где E_k и E_c - касательный и секущий модули диаграммы деформирования;

$$\psi = \frac{1/E_k - 1/E_c}{\sigma_i}.$$

Соотношение (5.13) с учетом (5.14) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_{11}^{\zeta}}{\partial \sigma_{11}} &= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{E_c} + \psi \frac{\partial \sigma_i}{\partial \sigma_{11}} \left(\frac{3}{2} \sigma_{11} - \frac{1}{2} g_{11} (g^{11} \sigma_{11} + g^{22} \sigma_{22} + 2g^{12} \sigma_{12}) \right) + \\ &+ g_{11} g^{11} \left(\frac{1}{3} K_{\varepsilon} - \frac{1}{2E_c} \right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{E_c} + \psi \frac{\partial \sigma_i}{\partial \sigma_{11}} \cdot \frac{3}{2} S_{11} + g_{11} g^{11} \left(\frac{1}{3} K_{\varepsilon} - \frac{1}{2E_c} \right). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Для получения входящей в (5.15) частной производной $\partial \sigma_i / \partial \sigma_{11}$ представим формулу (5.5) в развернутом виде

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2} (S^{11} S_{11} + S^{22} S_{22} + 2S^{12} S_{12} + S^{33} S_{33})}. \quad (5.16)$$

Применяя к (5.16) процедуру дифференцирования по σ_{11} можно записать

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_i}{\partial \sigma_{11}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} (S^{11} S_{11} + S^{22} S_{22} + 2S^{12} S_{12} + S^{33} S_{33}) \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{3}{2} \cdot \\ &\cdot \left(\frac{\partial S^{11}}{\partial \sigma_{11}} S_{11} + S^{11} \frac{\partial S_{11}}{\partial \sigma_{11}} + \frac{\partial S^{22}}{\partial \sigma_{11}} S_{22} + S^{22} \frac{\partial S_{22}}{\partial \sigma_{11}} + 2 \left(\frac{\partial S^{12}}{\partial \sigma_{11}} S_{12} + \frac{\partial S_{12}}{\partial \sigma_{11}} S^{12} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial S^{33}}{\partial \sigma_{11}} S_{33} + S^{33} \frac{\partial S_{33}}{\partial \sigma_{11}} \right). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Входящие в (5.17) частные производные компонент девиаторов напряжений могут быть определены по формулам

$$\begin{aligned} \frac{\partial S^{11}}{\partial \sigma_{11}} &= \frac{2}{3} g^{11} g^{11}; \quad \frac{\partial S_{11}}{\partial \sigma_{11}} = 1 - \frac{1}{3} g_{11} g^{11}; \quad \frac{\partial S^{22}}{\partial \sigma_{11}} = g^{21} g^{21} - \frac{1}{3} g^{22} g^{11}; \\ \frac{\partial S_{22}}{\partial \sigma_{11}} &= -\frac{1}{3} g_{22} g^{11}; \quad \frac{\partial S^{12}}{\partial \sigma_{11}} = g^{11} g^{21} - \frac{1}{3} g^{12} g^{11}; \quad \frac{\partial S_{12}}{\partial \sigma_{11}} = -\frac{1}{3} g_{12} g^{11}; \\ \frac{\partial S^{33}}{\partial \sigma_{11}} &= -\frac{1}{3} g^{33} g^{11}; \quad \frac{\partial S_{33}}{\partial \sigma_{11}} = -\frac{1}{3} g_{33} g^{11}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Соотношение (5.17) с учетом (5.18) может быть преобразовано к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_i}{\partial \sigma_{11}} = & \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\sigma_i} \left(\frac{2}{3} g^{11} g^{11} S_{11} + \left(1 - \frac{1}{3} g_{11} g^{11} \right) S^{11} + \left(g^{21} g^{21} - \frac{1}{3} g^{22} g^{11} \right) S_{22} + \right. \\ & + \left(-\frac{1}{3} g_{22} g^{11} \right) S^{22} + \frac{4}{3} g^{12} g^{11} S_{12} + \left(-\frac{2}{3} g_{12} g^{11} \right) S^{12} + \\ & \left. + \left(-\frac{1}{3} g^{33} g^{11} \right) S_{33} + \left(-\frac{1}{3} g_{33} g^{11} \right) S^{33} \right). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Применяя к первой формуле (5.12) процедуру дифференцирования по σ_{22} можно получить следующее выражение

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_{11}^\zeta}{\partial \sigma_{22}} = & \frac{3}{2} \sigma_{11} \frac{\partial}{\partial \sigma_{22}} \left(\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \right) + g_{11} g^{22} \left(\frac{1}{3} K_\varepsilon - \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \right) + \\ & + g_{11} (g^{11} \sigma_{11} + g^{22} \sigma_{22} + 2g^{12} \sigma_{12}) \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial \sigma_{22}} \left(\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \right) \right) = \frac{3}{2} \sigma_{11} \psi \frac{\partial \sigma_i}{\partial \sigma_{22}} + \\ & + g_{11} g^{22} \left(\frac{1}{3} K_\varepsilon - \frac{1}{2E_c} \right) + g_{11} (g^{11} \sigma_{11} + g^{22} \sigma_{22} + 2g^{12} \sigma_{12}) \left(-\frac{1}{2} \right) \psi \frac{\partial \sigma_i}{\partial \sigma_{22}} = \\ & = g_{11} g^{22} \left(\frac{1}{3} K_\varepsilon - \frac{1}{2E_c} \right) + \frac{3}{2} \psi S_{11} \frac{\partial \sigma_i}{\partial \sigma_{22}}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Входящая в (5.20) частная производная $\partial \sigma_i / \partial \sigma_{22}$ определится соответствующим дифференцированием (5.16)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_i}{\partial \sigma_{22}} = & \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\sigma_i} \left(\frac{\partial S^{11}}{\partial \sigma_{22}} S_{11} + S^{11} \frac{\partial S_{11}}{\partial \sigma_{22}} + \frac{\partial S^{22}}{\partial \sigma_{22}} S_{22} + \frac{\partial S_{22}}{\partial \sigma_{22}} S^{22} + \right. \\ & \left. + 2 \left(\frac{\partial S^{12}}{\partial \sigma_{22}} S_{12} + \frac{\partial S_{12}}{\partial \sigma_{22}} S^{12} \right) + \frac{\partial S^{33}}{\partial \sigma_{22}} S_{33} + \frac{\partial S_{33}}{\partial \sigma_{22}} S^{33} \right). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Частные производные ковариантных и контравариантных компонент девиаторов напряжений по σ_{22} , входящие в (5.21) могут быть определены по формулам

$$\begin{aligned} \frac{\partial S^{11}}{\partial \sigma_{22}} = & g^{12} g^{12} - \frac{1}{3} g^{11} g^{22}; \quad \frac{\partial S_{11}}{\partial \sigma_{22}} = -\frac{1}{3} g_{11} g^{22}; \quad \frac{\partial S_{22}}{\partial \sigma_{22}} = 1 - \frac{1}{3} g_{22} g^{22}; \\ \frac{\partial S^{22}}{\partial \sigma_{22}} = & \frac{2}{3} \cdot g^{22} g^{22}; \quad \frac{\partial S^{12}}{\partial \sigma_{22}} = \frac{2}{3} \cdot g^{12} g^{22}; \quad \frac{\partial S_{12}}{\partial \sigma_{22}} = -\frac{1}{3} g_{12} g^{22}; \\ \frac{\partial S^{33}}{\partial \sigma_{22}} = & -\frac{1}{3} \cdot g^{33} g^{22}; \quad \frac{\partial S_{33}}{\partial \sigma_{22}} = -\frac{1}{3} g_{33} g^{22}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

С учётом (5.22) частная производная $\partial\sigma_i/\partial\sigma_{22}$ примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial\sigma_i}{\partial\sigma_{22}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\sigma_i} & \left(\left(g^{12}g^{12} - \frac{1}{3}g^{11}g^{22} \right) S_{11} - \frac{1}{3}g_{11}g^{22}S^{11} + \frac{2}{3}g^{22}g^{22}S_{22} + \right. \\ & + \left(1 - \frac{1}{3}g_{22}g^{22} \right) S^{22} + \frac{4}{3}g^{12}g^{22}S_{12} - \frac{2}{3}g_{12}g^{22}S^{12} - \frac{1}{3}g^{33}g^{22}S_{33} - \\ & \left. - \frac{1}{3}g_{33}g^{22}S^{33} \right). \end{aligned} \quad (5.23)$$

Дифференцируя ε_{11}^ζ по σ_{12} можно получить следующее выражение

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varepsilon_{11}^\zeta}{\partial\sigma_{12}} &= \frac{3}{2} \cdot \sigma_{11} \frac{\partial}{\partial\sigma_{12}} \left(\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \right) + g_{11}2g^{12} \left(\frac{1}{3} \cdot K_\varepsilon - \frac{1}{2E_c} \right) + \\ &+ g_{11}(g^{11}\sigma_{11} + g^{22}\sigma_{22} + 2g^{12}\sigma_{12}) \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{\partial}{\partial\sigma_{12}} \left(\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \right) = \\ &= \frac{3}{2} \psi \frac{\partial\sigma_i}{\partial\sigma_{12}} \left(\sigma_{11} - \frac{1}{3}g_{11}I_1(\sigma) \right) + 2g_{11}g^{12} \left(\frac{1}{3}K_\varepsilon - \frac{1}{2E_c} \right) = \\ &= \frac{3}{2} \psi S_{11} \frac{\partial\sigma_i}{\partial\sigma_{12}} + 2g_{11}g^{12} \left(\frac{1}{3}K_\varepsilon - \frac{1}{2E_c} \right). \end{aligned} \quad (5.24)$$

Входящая в (5.24) частная производная $\partial\sigma_i/\partial\sigma_{12}$ определяется выражением

$$\begin{aligned} \frac{\partial\sigma_i}{\partial\sigma_{12}} &= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\sigma_i} \cdot \left(\frac{\partial S^{11}}{\partial\sigma_{12}} S_{11} + \frac{\partial S_{11}}{\partial\sigma_{12}} S^{11} + \frac{\partial S^{22}}{\partial\sigma_{12}} S_{22} + \frac{\partial S_{22}}{\partial\sigma_{12}} S^{22} + \right. \\ &+ 2 \left(\frac{\partial S^{12}}{\partial\sigma_{12}} S_{12} + \frac{\partial S_{12}}{\partial\sigma_{12}} S^{12} \right) + \frac{\partial S^{33}}{\partial\sigma_{12}} S_{33} + \frac{\partial S_{33}}{\partial\sigma_{12}} S^{33} \Big). \end{aligned} \quad (5.25)$$

Входящие в структуру (5.25) частные производные ковариантных и контравариантных компонент девиаторов напряжений по σ_{12} определяются по формулам

$$\begin{aligned} \frac{\partial S^{11}}{\partial\sigma_{12}} &= 2g^{11}g^{12} - \frac{2}{3}g^{11}g^{12}; \quad \frac{\partial S_{11}}{\partial\sigma_{12}} = -\frac{2}{3}g_{11}g^{12}; \quad \frac{\partial S^{22}}{\partial\sigma_{12}} = \frac{4}{3}g^{12}g^{22}; \\ \frac{\partial S_{22}}{\partial\sigma_{12}} &= -\frac{2}{3}g_{22}g^{12}; \quad \frac{\partial S^{12}}{\partial\sigma_{12}} = g^{11}g^{22} + \frac{1}{3}g^{12}g^{12}; \quad \frac{\partial S_{12}}{\partial\sigma_{12}} = 1 - \frac{2}{3}g_{12}g^{12}; \\ \frac{\partial S^{33}}{\partial\sigma_{12}} &= -\frac{2}{3}g^{33}g^{12}; \quad \frac{\partial S_{33}}{\partial\sigma_{12}} = -\frac{2}{3}g_{33}g^{12}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

С учетом (5.26) частная производная $\partial\sigma_i/\partial\sigma_{12}$ примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial\sigma_i}{\partial\sigma_{12}} = & \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\sigma_i} \left(\frac{4}{3} g^{11} g^{12} S_{11} - \frac{2}{3} g_{11} g^{12} S^{11} + \frac{4}{3} g^{12} g^{22} S_{22} - \frac{2}{3} g_{22} g^{12} S^{22} + \right. \\ & + 2 \left(g^{11} g^{22} + \frac{1}{3} g^{12} g^{12} \right) S_{12} + 2 \left(1 - \frac{2}{3} g_{12} g^{12} \right) S^{12} - \\ & \left. - \frac{2}{3} g^{33} g^{12} S_{33} - \frac{2}{3} g_{33} g^{12} S^{33} \right). \end{aligned} \quad (5.27)$$

Последовательно применяя процедуру дифференцирования ко второму и третьему выражениям (5.12) по σ_{11}, σ_{22} и σ_{12} будем иметь следующие зависимости

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varepsilon_{22}^\zeta}{\partial\sigma_{11}} = & \frac{3}{2} \cdot \sigma_{22} \frac{\partial}{\partial\sigma_{11}} \left(\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \right) + g_{22} g^{11} \left(\frac{1}{3} \cdot K_\varepsilon - \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \right) + \\ & + g_{22} I_1(\sigma) \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial\sigma_{11}} \left(\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \right) \right) = \frac{3}{2} \psi S_{22} \frac{\partial\sigma_i}{\partial\sigma_{11}} + g_{22} g^{11} \left(\frac{1}{3} \cdot K_\varepsilon - \frac{1}{2E_c} \right); \\ \frac{\partial\varepsilon_{22}^\zeta}{\partial\sigma_{22}} = & \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} + \sigma_{22} \frac{\partial}{\partial\sigma_{22}} \left(\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \right) \right) + g_{22} g^{22} \left(\frac{1}{3} \cdot K_\varepsilon - \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \right) + \\ & + g_{22} I_1(\sigma) \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial\sigma_{22}} \left(\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \right) \right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{E_c} + \frac{3}{2} \psi S_{22} \frac{\partial\sigma_i}{\partial\sigma_{22}} + g_{22} g^{22} \left(\frac{1}{3} \cdot K_\varepsilon - \frac{1}{2E_c} \right); \\ \frac{\partial\varepsilon_{22}^\zeta}{\partial\sigma_{12}} = & \frac{3}{2} \cdot \sigma_{22} \frac{\partial}{\partial\sigma_{12}} \left(\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \right) + 2g_{22} g^{12} \left(\frac{1}{3} \cdot K_\varepsilon - \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \right) + \\ & + g_{22} I_1(\sigma) \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial\sigma_{12}} \left(\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \right) \right) = \frac{3}{2} \psi S_{22} \frac{\partial\sigma_i}{\partial\sigma_{12}} + 2g_{22} g^{12} \left(\frac{1}{3} \cdot K_\varepsilon - \frac{1}{2E_c} \right); \\ \frac{\partial\varepsilon_{12}^\zeta}{\partial\sigma_{11}} = & \frac{3}{2} \cdot \sigma_{12} \frac{\partial}{\partial\sigma_{11}} \left(\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \right) + g_{12} g^{11} \left(\frac{1}{3} \cdot K_\varepsilon - \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \right) + \\ & + g_{12} I_1(\sigma) \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial\sigma_{11}} \left(\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \right) \right) = \frac{3}{2} \psi S_{12} \frac{\partial\sigma_i}{\partial\sigma_{11}} + 2g_{12} g^{11} \left(\frac{1}{3} \cdot K_\varepsilon - \frac{1}{2E_c} \right); \\ \frac{\partial\varepsilon_{12}^\zeta}{\partial\sigma_{22}} = & \frac{3}{2} \psi S_{12} \frac{\partial\sigma_i}{\partial\sigma_{22}} + g_{12} g^{22} \left(\frac{1}{3} \cdot K_\varepsilon - \frac{1}{2E_c} \right); \\ \frac{\partial\varepsilon_{12}^\zeta}{\partial\sigma_{12}} = & \frac{3}{2} \cdot \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} + \frac{3}{2} \cdot \sigma_{12} \frac{\partial}{\partial\sigma_{12}} \left(\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \right) + 2g_{12} g^{12} \left(\frac{1}{3} \cdot K_\varepsilon - \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + g_{12} I_1(\sigma) \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial \sigma_{12}} \left(\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \right) \right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{E_c} + \frac{3}{2} \cdot \psi S_{12} \frac{\partial \sigma_i}{\partial \sigma_{12}} + \\
& + 2g_{12} g^{12} \left(\frac{1}{3} \cdot K_\varepsilon - \frac{1}{2E_c} \right). \tag{5.28}
\end{aligned}$$

На основании полученных частных производных $\partial \varepsilon_{ij}^\zeta / \partial \sigma_{ij}$ (5.15)...(5.28) может быть скомпонована матричная зависимость

$$\left\{ \Delta \varepsilon_{ij}^\zeta \right\}_{1 \times 3} = [C_{\Delta \varepsilon}^P]_{3 \times 3} \left\{ \Delta \sigma_{ij} \right\}_{3 \times 1}, \tag{5.29}$$

где $\left\{ \Delta \varepsilon_{ij}^\zeta \right\}_{1 \times 3}^T = \{ \Delta \varepsilon_{11}^\zeta \Delta \varepsilon_{22}^\zeta \Delta \varepsilon_{12}^\zeta \}$; $\left\{ \sigma_{ij} \right\}_{1 \times 3}^T = \{ \sigma_{11} \sigma_{22} \sigma_{12} \}$; $[C_{\Delta \varepsilon}^P]_{3 \times 3}$ – матрица пластичности на одном из шагов последовательного нагружения.

5.2. Процедура компоновки матрицы жесткости ЧЭД на шаге нагружения

Равенство работ внешних и внутренних сил на одном из этапов нагружения может быть зафиксировано в виде следующей формулы

$$\Phi_L = \int_V \left[\left\{ \sigma^{\alpha\beta} \right\}_{1 \times 3}^T + \frac{1}{2} \left\{ \Delta \sigma^{\alpha\beta} \right\}_{1 \times 3}^T \right] \left\{ \Delta \varepsilon_{\alpha\beta}^\zeta \right\}_{3 \times 1} dV - \int_F \left\{ \Delta U \right\}_{1 \times 3}^T \left[\left\{ P \right\}_{3 \times 1} + \frac{1}{2} \left\{ \Delta P \right\}_{3 \times 1} \right] dF, \tag{5.30}$$

где $\left\{ \sigma^{\alpha\beta} \right\}_{1 \times 3}^T = \{ \sigma^{11} \sigma^{22} \sigma^{12} \}$; $\left\{ \Delta \sigma^{\alpha\beta} \right\}_{1 \times 3}^T = \{ \Delta \sigma^{11} \Delta \sigma^{22} \Delta \sigma^{12} \}$ – матрицы строки контравариантных компонент тензора напряжений и приращений напряжений на шаге нагружения; $\left\{ \Delta \varepsilon_{\alpha\beta}^\zeta \right\}_{1 \times 3}^T = \{ \Delta \varepsilon_{11}^\zeta \Delta \varepsilon_{22}^\zeta \Delta \varepsilon_{12}^\zeta \}$ – приращения деформаций на шаге нагружения; $\left\{ \Delta U \right\}_{1 \times 3}^T = \{ \Delta v^1 \Delta v^2 \Delta v \}$ – приращения компонент вектора перемещения; $\left\{ P \right\}_{1 \times 3}^T = \{ P_1 P_2 P \}$; $\left\{ \Delta P \right\}_{1 \times 3}^T = \{ \Delta P_1 \Delta P_2 \Delta P \}$ – компоненты вектора внешней поверхностной нагрузки и их приращения на шаге нагружения.

Для компоновки смешанного функционала необходимо после раскрытия скобок в первом интеграле (5.30) осуществить замену

$$\frac{1}{2} \int_V \left\{ \Delta \sigma^{\alpha\beta} \right\}_{1 \times 3}^T \left\{ \Delta \varepsilon_{\alpha\beta}^\zeta \right\}_{3 \times 1} dV =$$

$$= \int_V \left\{ \Delta \sigma^{\alpha\beta} \right\}_{1 \times 3}^T \left\{ \Delta \varepsilon_{\alpha\beta}^{\zeta} \right\}_{3 \times 1} dV - \frac{1}{2} \int_V \left\{ \Delta \sigma^{\alpha\beta} \right\}_{1 \times 3}^T \left\{ \Delta \varepsilon_{\alpha\beta}^{\zeta} \right\}_{3 \times 1} dV. \quad (5.31)$$

В результате подстановки (5.31) в (5.30) можно получить функционал смешанного типа

$$\begin{aligned} \Phi_S = & \int_V \left\{ \sigma^{\alpha\beta} \right\}_{1 \times 3}^T \left\{ \Delta \varepsilon_{\alpha\beta}^{\zeta} \right\}_{3 \times 1} dV + \int_V \left\{ \Delta \sigma^{\alpha\beta} \right\}_{1 \times 3}^T \left\{ \Delta \varepsilon_{\alpha\beta}^{\zeta} \right\}_{3 \times 1} dV - \frac{1}{2} \int_V \left\{ \Delta \sigma^{\alpha\beta} \right\}_{1 \times 3}^T \left\{ \Delta \varepsilon_{\alpha\beta}^{\zeta} \right\}_{3 \times 1} dV - \\ & - \int_F \left\{ \Delta U \right\}_{1 \times 3}^T \left[\left\{ P \right\}_{3 \times 1} + \frac{1}{2} \left\{ \Delta P \right\}_{3 \times 1} \right] dF. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Во втором интеграле приращения деформаций $\left\{ \Delta \varepsilon_{\alpha\beta}^{\zeta} \right\}_{3 \times 1}$ в произвольном слое матричным образом представляются через приращения деформаций и искривлений на срединной поверхности

$$\left\{ \Delta \varepsilon_{\alpha\beta}^{\zeta} \right\}_{3 \times 1} = [\Gamma_{\varepsilon}]_{3 \times 6} \left\{ \Delta \varepsilon_{\alpha\beta} \right\}_{6 \times 1}, \quad (5.33)$$

которые с помощью соотношений Коши затем выражаются через столбец узловых приращений компонент вектора перемещения и их производных

$$\left\{ \Delta \varepsilon_{\alpha\beta} \right\}_{6 \times 1} = [B]_{6 \times 36} \left\{ \Delta U^L \right\}_{36 \times 1}, \quad (5.34)$$

$$\text{где } \left\{ \Delta U^L \right\}_{1 \times 36}^T = \left\{ \left\{ \Delta v_y^{1L} \right\}_{1 \times 12}^T \left\{ \Delta v_y^{2L} \right\}_{1 \times 12}^T \left\{ \Delta v^L \right\}_{1 \times 12}^T \right\};$$

$$\left\{ \Delta q_y^L \right\}_{1 \times 12}^T = \left\{ \Delta q^i \Delta q^j \Delta q^k \Delta q^l \Delta q_{,\xi}^i \dots \Delta q_{,\xi}^l \Delta q_{,\eta}^i \dots \Delta q_{,\eta}^l \right\}.$$

Здесь под q понимается $\Delta v^1, \Delta v^2$ или Δv .

В третьем слагаемом (5.32) приращения деформаций аппроксимируются посредством матричного произведения

$$\left\{ \Delta \varepsilon_{\alpha\beta}^{\zeta} \right\}_{3 \times 1} = [\Gamma_{\varepsilon}]_{3 \times 6} \left\{ \Delta \varepsilon_{\alpha\beta} \right\}_{6 \times 1} = [\Gamma_{\varepsilon}]_{3 \times 6} [H]_{6 \times 24} \left\{ \Delta \varepsilon_{\alpha\beta} \right\}_{24 \times 1}_y, \quad (5.35)$$

$$\text{где } \left\{ \Delta \varepsilon_{\alpha\beta} \right\}_{1 \times 24}_y^T = \left\{ \left\{ \Delta \varepsilon_{\alpha\beta} \right\}_{1 \times 12}_y^T \left\{ \Delta \varepsilon_{\alpha\beta} \right\}_{1 \times 12}_y^T \right\}.$$

Входящая в подынтегральные выражения (5.32) матрица-строка приращений напряжений $\{\Delta\sigma^{\alpha\beta}\}_{1 \times 3}^T$ на основании соотношений теории малых упруго-пластических деформаций выражается через приращения деформаций произвольного слоя оболочки

$$\{\Delta\sigma^{\alpha\beta}\}_{3 \times 1} = [C_{\Delta\sigma}^P]_{3 \times 3} \{\Delta\varepsilon_{\alpha\beta}^{\zeta}\}_{3 \times 1}, \quad (5.36)$$

где $[C_{\Delta\sigma}^P]_{3 \times 3} = [C_{\Delta\varepsilon}^P]_{3 \times 3}^{-1}$.

Функционал (5.32) с учетом (5.33)...(5.36) может быть преобразован к виду

$$\begin{aligned} \Phi_S = & \int_V \{\sigma^{\alpha\beta}\}_{1 \times 3}^T [\Gamma_{\varepsilon}]_{3 \times 6} [B]_{6 \times 36} dV [P_R]_{36 \times 36} \{\Delta U^G\}_{36 \times 1} + \\ & + \{\Delta\varepsilon\kappa_{\alpha\beta}\}_{1 \times 24}^T \int_V [H]_{24 \times 6}^T [\Gamma_{\varepsilon}]_{6 \times 3}^T [C_{\Delta\sigma}^P]_{3 \times 3}^T [\Gamma_{\varepsilon}]_{3 \times 6} [B]_{6 \times 36} dV [P_R]_{36 \times 36} \{\Delta U^G\}_{36 \times 1} - \\ & - \frac{1}{2} \{\Delta\varepsilon\kappa_{\alpha\beta}\}_{1 \times 24}^T \int_V [H]_{24 \times 6}^T [\Gamma_{\varepsilon}]_{6 \times 3}^T [C_{\Delta\sigma}^P]_{3 \times 3}^T [\Gamma_{\varepsilon}]_{3 \times 6} [H]_{6 \times 24} dV \{\Delta\varepsilon\kappa_{\alpha\beta}\}_{24 \times 1} - \\ & - \{\Delta U^G\}_{1 \times 36}^T [P_R]_{36 \times 36}^T \int_F [A]_{36 \times 3}^T \{P\}_{3 \times 1} dF - \frac{1}{2} \{\Delta U^G\}_{1 \times 36}^T [P_R]_{36 \times 36}^T \int_F [A]_{36 \times 3}^T \{\Delta P\}_{3 \times 1} dF. \quad (5.37) \end{aligned}$$

Осуществляя процедуру минимизации (5.37) по $\{\Delta\varepsilon\kappa_{\alpha\beta}\}_{1 \times 24}^T$ можно получить

следующее выражение

$$\begin{aligned} \partial\Phi_S / \partial\{\Delta\varepsilon\kappa_{\alpha\beta}\}_{1 \times 24}^T & \equiv \int_V [H]_{24 \times 6}^T [\Gamma_{\varepsilon}]_{6 \times 3}^T [C_{\Delta\sigma}^P]_{3 \times 3}^T [\Gamma_{\varepsilon}]_{3 \times 6} [B]_{6 \times 36} dV [P_R]_{36 \times 36} \{\Delta U^G\}_{36 \times 1} - \\ & - \int_V [H]_{24 \times 6}^T [\Gamma_{\varepsilon}]_{6 \times 3}^T [C_{\Delta\sigma}^P]_{3 \times 3}^T [\Gamma_{\varepsilon}]_{3 \times 6} [H]_{6 \times 24} dV \{\Delta\varepsilon\kappa_{\alpha\beta}\}_{24 \times 1} = 0. \quad (5.38) \end{aligned}$$

Применяя минимизацию к (5.37) по $\{\Delta U^G\}_{1 \times 36}^T$ можно записать следующее

выражение

$$\begin{aligned}
\partial\Phi_S/\partial\{\Delta U^G\}_{1\times 36}^T &\equiv [P_R]_{36\times 36}^T \int_V [B]_{36\times 6}^T [\Gamma_\varepsilon]_{6\times 3}^T [\sigma^{\alpha\beta}]_{3\times 1} dV + \\
&+ [P_R]_{36\times 36}^T \int_V [B]_{36\times 6}^T [\Gamma_\varepsilon]_{6\times 3}^T [C_{\Delta\sigma}^P]_{3\times 3} [\Gamma_\varepsilon]_{3\times 6} [H]_{6\times 24} dV \{\Delta\epsilon\kappa_{\alpha\beta}\}_{24\times 1} - \\
&- [P_R]_{36\times 36}^T \int_F [A]_{36\times 3}^T \{P\}_{3\times 1} dF - [P_R]_{36\times 36}^T \int_F [A]_{36\times 3}^T \{\Delta P\}_{3\times 1} dF = 0. \quad (5.39)
\end{aligned}$$

В результате выполнения процедуры минимизации смешанного нелинейного функционала (5.38), (5.39) можно скомпоновать систему матричных уравнений

$$\begin{cases} [Q]_{24\times 36} \{\Delta U^G\}_{36\times 1} - [Y]_{24\times 24} \{\Delta\epsilon\kappa_{\alpha\beta}\}_{24\times 1} = 0; \\ \{f_\sigma\}_{36\times 1} + [Q]_{36\times 24}^T \{\Delta\epsilon\kappa_{\alpha\beta}\}_{24\times 1} - \{f_P\}_{36\times 1} - \{f_{\Delta P}\}_{36\times 1} = 0, \end{cases} \quad (5.40)$$

где $[Q]_{24\times 36} = \int_V [H]_{24\times 6}^T [\Gamma_\varepsilon]_{6\times 3}^T [C_{\Delta\sigma}^P]_{3\times 3}^T [\Gamma_\varepsilon]_{3\times 6} [B]_{6\times 36} dV [P_R]_{36\times 36}$;

$$[Y]_{24\times 24} = \int_V [H]_{24\times 6}^T [\Gamma_\varepsilon]_{6\times 3}^T [C_{\Delta\sigma}^P]_{3\times 3}^T [\Gamma_\varepsilon]_{3\times 6} [H]_{6\times 24} dV;$$

$$\{f_\sigma\}_{36\times 1} = [P_R]_{36\times 36}^T \int_V [B]_{36\times 6}^T [\Gamma_\varepsilon]_{6\times 3}^T [\sigma^{\alpha\beta}]_{3\times 1} dV; \{f_P\}_{36\times 1} = [P_R]_{36\times 36}^T \int_F [A]_{36\times 3}^T \{P\}_{3\times 1} dF;$$

$$\{f_{\Delta P}\}_{36\times 1} = [P_R]_{36\times 36}^T \int_F [A]_{36\times 3}^T \{\Delta P\}_{3\times 1} dF.$$

Из первого уравнения системы (5.40) можно выразить столбец шаговых силовых узловых неизвестных

$$\{\Delta\epsilon\kappa_{\alpha\beta}\}_{24\times 1} = [Y]_{24\times 24}^{-1} [Q]_{24\times 36} \{\Delta U^G\}_{36\times 1}. \quad (5.41)$$

В результате подстановки (5.41) во второе уравнение (5.40) можно скомпоновать матричное уравнение

$$[Q]_{36\times 24}^T [Y]_{24\times 24}^{-1} [Q]_{24\times 36} \{\Delta U^G\}_{36\times 1} = \{f_{\Delta P}\}_{36\times 1} - \left(\{f_\sigma\}_{36\times 1} - \{f_P\}_{36\times 1} \right)$$

или в более компактном виде

$$[K^{\text{шаг}}]_{36\times 36} \{\Delta U^G\}_{36\times 1} = \{f_{\Delta P}\}_{36\times 1} - \{f_{NR}\}_{36\times 1}, \quad (5.42)$$

где $[K_{\text{шаг}}] = \begin{bmatrix} [Q] & [Y] \\ [Q] & [Q] \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} [Q] \\ [Q] \end{bmatrix}$ – матрица жесткости четырёхузлового элемента дискретизации на одном из последовательных шагов нагружения; $\{f_{\Delta P}\}_{36 \times 1}$ – столбец шаговой узловой нагрузки; $\{f_{NR}\}_{36 \times 1}$ – поправка Ньютона-Рафсона.

В результате решения системы алгебраических уравнений (5.42) на конкретном из серии шагов последовательного нагружения может быть получен столбец $\{\Delta U^G\}_{36 \times 1}$ – приращений узловых компонент вектора перемещения и их частных производных первого порядка.

Выполняя подстановку $\{\Delta U^G\}_{36 \times 1}$ в (5.41), можно получить приращения деформаций и искривлений на данном шаге нагружения.

Суммарные деформации после завершения серии шагов последовательного нагружения определяются суммированием приращений, выполненных на каждом из серии шагов

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{\zeta} = \sum_{j=1}^n \Delta \varepsilon_{\alpha\beta}^{\zeta j}. \quad (5.43)$$

Для вычисления интенсивности деформаций ε_i по формуле (5.5) необходимо иметь значение деформации в направлении нормали к поверхности оболочки ε_{33}^{ζ} , которая не входит в столбец $\{\varepsilon_{\alpha\beta}^{\zeta}\}_{3 \times 1}$. Для вычисления этой компоненты тензора деформаций можно воспользоваться общепринятой в теории оболочек [89] гипотезой о равенстве нулю нормального напряжения вдоль нормали к срединной поверхности

$$\sigma_{33} = 0. \quad (5.44)$$

Вышеуказанное напряжение может быть определено зависимостью

$$\begin{aligned} \sigma_{33} = & \frac{2}{3} \cdot \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \varepsilon_{33}^{\zeta} + g_{33} I_1(\varepsilon) \left(\frac{E}{1-2\nu} - \frac{2}{3} \cdot \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \varepsilon_{33}^{\zeta} + \\ & + g_{33} (g^{11} \varepsilon_{11}^{\zeta} + g^{22} \varepsilon_{22}^{\zeta} + 2g^{12} \varepsilon_{12}^{\zeta} + g^{33} \varepsilon_{33}^{\zeta}) \cdot \left(\frac{E}{1-2\nu} - \frac{2}{3} \cdot \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \right) \end{aligned} \quad (5.45)$$

Если левую часть (5.45) согласно (5.44) приравнять нулю, то из правой части (5.45) можно получить выражение для ε_{33}^ζ через остальные компоненты тензора деформаций

$$\varepsilon_{33}^\zeta = \frac{-\left(\frac{E}{1-2\nu} - \frac{2}{3} \cdot \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\right) g_{33} (g^{11} \varepsilon_{11}^\zeta + g^{22} \varepsilon_{22}^\zeta + 2g^{12} \varepsilon_{12}^\zeta)}{\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} + g_{33} g^{33} \left(\frac{E}{1-2\nu} - \frac{2}{3} \cdot \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\right)\right)}. \quad (5.46)$$

Соотношения теории малых упруго-пластических деформаций позволяют получить суммарные напряжения на любом из этапов последовательного нагружения по формулам

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \varepsilon_{\alpha\beta}^\zeta + \frac{1}{3} g_{\alpha\beta} I_1(\varepsilon) \left(\frac{E}{1-2\nu} - \frac{2}{3} \cdot \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \right). \quad (5.47)$$

Представляя (5.46) в матричном виде

$$\varepsilon_{33}^\zeta = [L]_{1 \times 3}^T \left\{ \varepsilon_{\alpha\beta}^\zeta \right\}_{3 \times 1} \quad (5.48)$$

можно скомпоновать матрицу перехода от столбца $\left\{ \varepsilon_{\alpha\beta}^\zeta \right\}_{3 \times 1}$ к столбцу $\left\{ \varepsilon_{\alpha\beta}^{\zeta'} \right\}_{4 \times 1}$

$$\left\{ \varepsilon_{\alpha\beta}^{\zeta'} \right\}_{4 \times 1} = [S]_{4 \times 3} \left\{ \varepsilon_{\alpha\beta}^\zeta \right\}_{3 \times 1}, \quad (5.49)$$

$$\text{где } \left\{ \varepsilon_{\alpha\beta}^{\zeta'} \right\}_{1 \times 4}^T = \left\{ \varepsilon_{11}^\zeta \varepsilon_{22}^\zeta \varepsilon_{12}^\zeta \varepsilon_{33}^\zeta \right\}; [S]_{4 \times 3} = \begin{bmatrix} [E]_{3 \times 3} \\ [L]_{1 \times 3} \end{bmatrix}.$$

Соотношения (5.47) могут быть представлены в матричной форме

$$\left\{ \sigma_{\alpha\beta} \right\}_{3 \times 1} = [T]_{3 \times 4} \left\{ \varepsilon_{\alpha\beta}^{\zeta'} \right\}_{4 \times 1}$$

или с учетом (5.49)

$$\left\{ \sigma_{\alpha\beta} \right\}_{3 \times 1} = [T]_{3 \times 4} [S]_{4 \times 3} \left\{ \varepsilon_{\alpha\beta}^\zeta \right\}_{3 \times 1}. \quad (5.50)$$

С помощью (5.50) можно определять значения суммарных напряжений на любой стадии нагружения рассчитываемой оболочечной конструкции через

вычисленный столбец $\left\{ \varepsilon_{\alpha\beta}^{\zeta} \right\}_{3 \times 1}$ суммарных деформаций в произвольном слое оболочки.

Корректность и работоспособность разработанного алгоритма по упруго-пластическому расчету оболочечных конструкций была доказана решением тестовых задач.

5.3. Пример упруго-пластического расчета консольного фрагмента кругового цилиндра

В качестве примера была рассчитана цилиндрическая оболочка, жестко защемленная по правому торцу и свободная от закреплений по левому торцу, нагружаемая внутренним давлением интенсивностью $q = 5$ МПа. Исходные данные имели следующие значения: длина образующей $L = 0,8$ м; радиус цилиндра $R = 0,9$ м; толщина стенки $h = 0,02$ м; модуль упругости $E = 7,49 \cdot 10^4$ МПа; коэффициент Пуассона $\nu = 0,32$. Диаграмма деформирования была принята в виде двух звеньев ломаной, определяемой на этапе упрочнения зависимостью $\sigma_i = 200 + 18087(\varepsilon_i - 0,0023496)$, МПа.

Таблица 5.1 – Значения нормальных напряжений в цилиндре при $n_{ш} = 32$

Сечение	Напряжения, МПа	Сетка узлов дискретизации			
		2×61	2×81	2×101	2×121
Опорное	σ_{xx}^{in}	312,0	320,9	322,3	324,2
	σ_{xx}^{out}	-312,6	-320,9	-322,20	-324,1
	$\sigma_{\theta\theta}^{in}$	122,1	129,8	131,6	131,9
	$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	-129,7	-130,8	-131,0	-130,6
Свободный торец	σ_{xx}^{in}	0,024	0,024	0,026	0,026
	σ_{xx}^{out}	0,031	0,029	0,028	0,028
	$\sigma_{\theta\theta}^{in}$	225,4	225,3	225,3	225,4
	$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	223,8	223,8	223,8	223,8

Зафиксировав сетку узлов дискретизации 2×61 и последовательно увеличивая количество шагов нагружения, можно проследить сходимость вычислительного процесса в зависимости от количества этапов нагружения (таблица 5.2).

Сечение	Напряжения, МПа	Количество шагов нагружения					Аналитическое значение, МПа
		32	42	52	62	72	
Опорное	σ_{xx}^{in}	322,3	322,1	321,9	322,5	323,1	-
	σ_{xx}^{out}	-322,2	-322,1	-321,7	-322,5	-323,1	-
	$\sigma_{\theta\theta}^{in}$	131,6	134,9	136,4	131,6	133,2	-
	$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	-131,0	-135,0	-134,4	-131,8	-134,5	-
Свободный торец	σ_{xx}^{in}	0,026	0,017	0,014	0,012	0,011	0,00
	σ_{xx}^{out}	0,028	0,019	0,016	0,015	0,014	
	$\sigma_{\theta\theta}^{in}$	225,3	225,4	225,4	225,4	225,4	225,0
	$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	223,8	223,8	223,8	223,8	223,8	

Анализ численных значений нормальных напряжений, представленных в таблице 5.2, позволяет сделать вывод о стабильности вычислительного процесса определения прочностных параметров НДС оболочки при увеличении числа шагов последовательного нагружения. Также следует отметить соответствие численных значений напряжений на свободном торце цилиндра аналитическим значениям, полученным из условия статического равновесия: $\sigma_{xx} = 0,00$ МПа; $\sigma_{xx} = q \cdot R/t = 5 \cdot 0,9/0,02 = 225,0$ МПа.

На рисунке 5.1 представлена эпюра нормальных напряжений σ_{xx} в опорном жестко защемленном сечении оболочки при числе шагов нагружения равном 62.

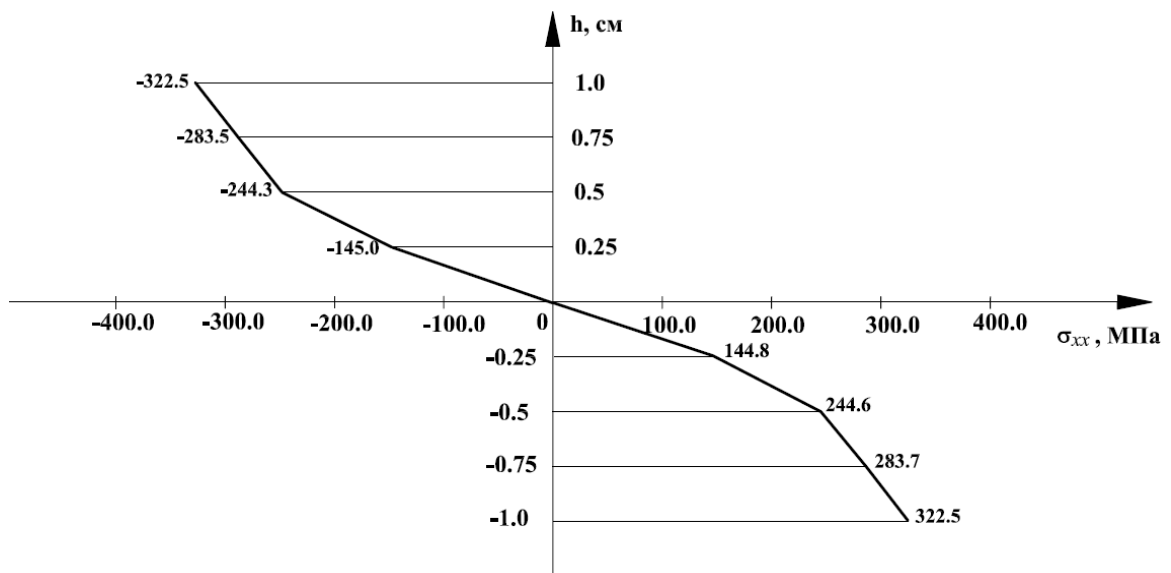


Рисунок 5.1 – Эпюра нормальных напряжений σ_{xx} в опорном сечении оболочки

Анализ эпюры позволяет констатировать выраженный нелинейный характер напряженного состояния оболочки в наиболее нагруженном сечении и выполнение условия равновесия оболочки: сумма проекций всех сил на продольную ось x равна нулю.

5.4. Пример расчета эллипсоида вращения с учетом пластической стадии работы материала

Было исследовано НДС эллипсоида вращения под воздействием внутреннего давления $q = 6$ МПа. Вследствие осевой симметрии эллипсоид моделировался лентой элементов дискретизации, ориентированной вдоль меридиана оболочки. Левый торец оболочки был жестко закреплён, правый торец - свободен от закреплений (Рисунок 5.2). Исходные данные имели следующие значения: параметры эллипсоида $a = 1,3$ м; $b = 0,9$ м; толщина $h = 0,02$ м; осевая координата изменялась в пределах $0 \leq x \leq 1,2$ м. Механические характеристики материала оболочки: дюралюминевый сплав $E = 7,49 \cdot 10^4$ МПа; $\nu = 0,32$. Предел текучести материала $\sigma_T = 200$ МПа. Диаграмма деформирования моделировалась двухзвенной ломаной с линейным упрочнением, определяемой зависимостью

$$\sigma_i = 200 + 18087(\varepsilon_i - 0,0023496).$$

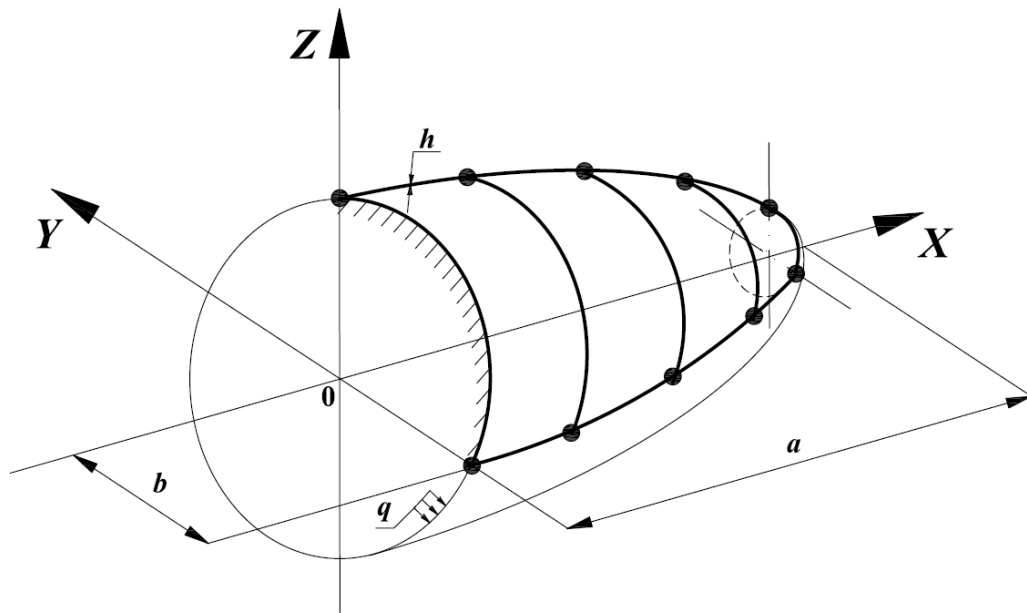


Рисунок 5.2 – Расчетная схема эллипсоидальной оболочки

Расчеты были выполнены с контролем сходимости вычислительного процесса как по числу элементов дискретизации, так и по количеству шагов нагружения. В таблице 5.3 приведены результаты расчета эллипсоидальной

оболочки при числе элементов дискретизации равном 200 и различных количествах шагов нагружения. В таблице показаны значения нормальных напряжений в опорном и свободном торцах оболочки на внутренней σ^{in} , наружной σ^{out} и срединной σ^{midl} поверхностях оболочки. Анализ табличных данных позволяет сделать вывод о стабильности вычислительного процесса по мере увеличения количества шагов нагружения. Вследствие незагруженности правого торца эллипсоида σ_{xx}^{midl} должно быть равным нулю. Как следует из таблицы 5.3 численные значения σ_{xx}^{midl} достаточно близки к нулю. Кольцевые напряжения σ_{tt}^{midl} на свободном торце эллипсоида могут быть вычислены с помощью формулы Лапласа

$$\frac{\sigma_{xx}}{R_1} + \frac{\sigma_{tt}}{R_t} = \frac{q}{t},$$

где R_1 , R_t – радиусы главных кривизн.

Таблица 5.3 – Численные значения напряжений в зависимости от количества шагов нагружения

Координаты точек x , м	σ , МПа	Количество шагов нагружения				Аналитическое решение
		12	22	32	42	
0,00	σ_{xx}^{in}	322,6	321,1	319,8	320,1	
	σ_{xx}^{out}	-230,4	-228,4	-227,2	-227,9	
	σ_{xx}^{midl}	168,7	167,0	165,1	165,5	
1,20	σ_{xx}^{in}	0,039	0,025	0,032	0,033	
	σ_{xx}^{out}	0,041	0,030	0,036	0,036	
	σ_{xx}^{midl}	0,036	0,023	0,30	0,030	0,00
	σ_{tt}^{in}	200,7	199,5	200,1	200,2	
	σ_{tt}^{out}	189,5	188,3	188,9	188,9	
	σ_{tt}^{midl}	195,0	193,8	194,4	194,4	201,2

Учитывая, что на свободном торце $\sigma_{xx} = 0$, из (4.2) можно получить аналитическое значение σ_{tt} .

$$\sigma_{tt} = \frac{q}{t} R_t = \frac{6}{0,02} \cdot 0,6708 = 201,2 \quad \text{МПа.}$$

Сравнивая аналитическое значение σ_{tt} , представленное в правой крайней колонке таблицы 5.3, с

численным значением σ_{tt}^{midl} , можно сделать вывод, что погрешность вычислений $\delta = 3,38 \%$ находится в допустимых пределах при выполнении инженерных расчетов.

5.5. Реализация трехпольного МКЭ в расчётах оболочек при упруго-пластическом деформировании

При реализации трёхпольного варианта МКЭ, описанного в главе 3, в расчётах оболочек за пределом упругости необходимо разработать новый нелинейный смешанный функционал, отличный от (5.32), минимизация которого по приращениям перемещений, деформаций и усилий позволила бы скомпоновать матрицу жесткости ЧЭД на одном из этапов нагружения.

Для достижения поставленной цели запишем нелинейный смешанный функционал в следующей формулировке

$$\begin{aligned} \Phi_{S_3} = \int_F \left[\{S^{\alpha\beta}\}_{1 \times 6}^T + \frac{1}{2} \{\Delta S_a^{\alpha\beta}\}_{1 \times 6}^T \right] \{\Delta \varepsilon_{\alpha\beta}\}_{6 \times 1} dF - \int_F \{\Delta U\}_{1 \times 3}^T \left[\{P\}_{3 \times 1} + \frac{1}{2} \{\Delta P\}_{3 \times 1} \right] dF + \\ + \frac{1}{2} \int_F \left[\{\Delta S_k^{\alpha\beta}\}_{1 \times 6}^T - \{\Delta S_a^{\alpha\beta}\}_{1 \times 6}^T \right] \{\Delta \varepsilon_{\alpha\beta}\}_{6 \times 1} dF, \end{aligned} \quad (5.51)$$

где $\{S^{\alpha\beta}\}_{1 \times 6}^T = \{N^{11} N^{22} N^{12} M^{11} M^{22} M^{12}\}$ – матрица-строка продольных сил изгибающих моментов;

$\{\Delta S_a^{\alpha\beta}\}_{1 \times 6}^T, \{\Delta S_k^{\alpha\beta}\}_{1 \times 6}^T$ – матрицы-строки приращений продольных сил и изгибающих моментов на шаге нагружения, которые затем интерполируются с помощью билинейных функций формы или выражаются через приращения деформаций и искривлений срединной поверхности $\{\Delta \varepsilon_{\alpha\beta}\}_{6 \times 1}$ соответственно.

Вышеупомянутый столбец приращений продольных сил и изгибающих моментов $\{\Delta S_k^{\alpha\beta}\}_{1 \times 6}^T$ выражается через столбец приращений деформаций и искривлений срединной поверхности посредством матричной зависимости

$$\left\{ \Delta S_k^{\alpha\beta} \right\}_{6 \times 1} = [h^P]_{6 \times 6} \left\{ \Delta \varepsilon_{\alpha\beta} \right\}_{6 \times 1}. \quad (5.52)$$

Входящая в (5.52) матрица $[h^P]_{6 \times 6}$ состоит из двух подматриц $[\alpha^P]_{3 \times 6}$ и $[\beta^P]_{3 \times 6}$,

которые определяются на основе соотношений

$$\begin{aligned} \left\{ \Delta N^{\alpha\beta} \right\}_{3 \times 1} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left\{ \Delta \sigma^{\alpha\beta} \right\}_{3 \times 1} d\zeta = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [C_{\Delta\sigma}^P]_{3 \times 3} [\Gamma_\varepsilon]_{3 \times 6} d\zeta \left\{ \Delta \varepsilon_{\alpha\beta} \right\}_{6 \times 1} = [\alpha^P]_{3 \times 6} \left\{ \Delta \varepsilon_{\alpha\beta} \right\}_{6 \times 1}; \\ \left\{ \Delta M^{\alpha\beta} \right\}_{3 \times 1} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left\{ \Delta \sigma^{\alpha\beta} \right\}_{3 \times 1} \zeta d\zeta = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [C_{\Delta\sigma}^P]_{3 \times 3} [\Gamma_\varepsilon]_{3 \times 6} \zeta d\zeta \left\{ \Delta \varepsilon_{\alpha\beta} \right\}_{6 \times 1} = [\beta^P]_{3 \times 6} \left\{ \Delta \varepsilon_{\alpha\beta} \right\}_{6 \times 1}; \end{aligned} \quad (5.53)$$

где $\left\{ \Delta N^{\alpha\beta} \right\}_{1 \times 3}^T = \{\Delta N^{11} \Delta N^{22} \Delta N^{12}\}$; $\left\{ \Delta M^{\alpha\beta} \right\}_{1 \times 3}^T = \{\Delta M^{11} \Delta M^{22} \Delta M^{12}\}$.

Раскрыв скобки в первом и третьем интегралах (5.51), будем иметь следующее выражение

$$\begin{aligned} \Phi_{S_3} &= \int_F \left\{ \Delta \varepsilon_{\alpha\beta} \right\}_{1 \times 6}^T \left\{ S^{\alpha\beta} \right\}_{6 \times 1} dF - \int_F \left\{ \Delta U \right\}_{1 \times 3}^T \left[\left\{ P \right\}_{3 \times 1} + \frac{1}{2} \left\{ \Delta P \right\}_{3 \times 1} \right] dF + \\ &+ \frac{1}{2} \int_F \left\{ \Delta S_a^{\alpha\beta} \right\}_{1 \times 6}^T [h^P]_{6 \times 6}^{-1} \left\{ \Delta S_a^{\alpha\beta} \right\}_{6 \times 1} dF + \frac{1}{2} \int_F \left\{ \Delta S_k^{\alpha\beta} \right\}_{1 \times 6}^T \left\{ \Delta \varepsilon_{\alpha\beta} \right\}_{6 \times 1} dF - \\ &- \frac{1}{2} \int_F \left\{ \Delta S_a^{\alpha\beta} \right\}_{1 \times 6}^T \left\{ \Delta \varepsilon_{\alpha\beta} \right\}_{6 \times 1} dF. \end{aligned} \quad (5.54)$$

В первом и четвертом интегралах (5.54) столбец деформаций и искривлений срединной поверхности на основании соотношений Коши (2.25), (2.26) представляется матричным произведением

$$\left\{ \Delta \varepsilon_{\alpha\beta} \right\}_{6 \times 1} = [B]_{6 \times 36} [P_R]_{36 \times 36} \left\{ \Delta U^G \right\}_{36 \times 1}, \quad (5.55)$$

а в пятом интеграле интерполируется билинейными функциями формы

$$\left\{ \Delta \varepsilon_{\alpha\beta} \right\}_{6 \times 1} = [H]_{6 \times 24} \left\{ \Delta \varepsilon_{\alpha\beta} \right\}_{24 \times 1}. \quad (5.56)$$

Входящий в третий интеграл (5.54) столбец приращений усилий и моментов $\{\Delta S^{\alpha\beta}\}_{6 \times 1}$ интерполируется аналогичным образом

$$\{\Delta S_a^{\alpha\beta}\}_{6 \times 1} = [H]_{6 \times 24} \{\Delta S^{\alpha\beta}\}_y_{24 \times 1}. \quad (5.57)$$

Функционал (5.54) с учетом (5.55)...(5.57) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \Phi_{S_3} = & \{\Delta U^G\}_{1 \times 36}^T [P_R]_{36 \times 36}^T \int_F [B]_{36 \times 6}^T \{S^{\alpha\beta}\}_{6 \times 1} dF - \{\Delta U^G\}_{1 \times 36}^T [P_R]_{36 \times 36}^T \cdot \left(\int_F [A]_{36 \times 3}^T \{P\}_{3 \times 1} dF + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \int_F [A]_{36 \times 3}^T \{\Delta P\}_{3 \times 1} dF \right) + \\ & + \frac{1}{2} \{\Delta S^{\alpha\beta}\}_y_{1 \times 24}^T \int_F [H]_{24 \times 6}^T [h^P]_{6 \times 6}^{-1} [H]_{6 \times 24} dF \{\Delta S^{\alpha\beta}\}_y_{24 \times 1} + \\ & + \frac{1}{2} \{\Delta \varepsilon \kappa_{\alpha\beta}\}_y_{1 \times 24}^T \int_F [H]_{24 \times 6}^T [h^P]_{6 \times 6}^T [B]_{6 \times 36} dF [P_R]_{36 \times 36} \{\Delta U^G\}_{36 \times 1} - \\ & - \frac{1}{2} \{\Delta \varepsilon \kappa_{\alpha\beta}\}_y_{1 \times 24}^T \int_F [H]_{24 \times 6}^T [H]_{6 \times 24} dF \{\Delta S^{\alpha\beta}\}_y_{24 \times 1} \end{aligned} \quad (5.58)$$

или в более компактной форме

$$\begin{aligned} \Phi_{S_3} = & \{\Delta U^G\}_{1 \times 36}^T \{f_S\}_{36 \times 1} - \{\Delta U^G\}_{1 \times 36}^T \{f_P\}_{36 \times 1} - \frac{1}{2} \{\Delta U^G\}_{1 \times 36}^T \{f_{\Delta P}\}_{36 \times 1} + \frac{1}{2} \{\Delta S^{\alpha\beta}\}_y_{1 \times 24}^T [a_1]_{24 \times 24} \{\Delta S^{\alpha\beta}\}_y_{24 \times 1} + \\ & + \frac{1}{2} \{\Delta \varepsilon \kappa_{\alpha\beta}\}_y_{1 \times 24}^T [b_1]_{24 \times 36} \{\Delta U^G\}_{36 \times 1} - \frac{1}{2} \{\Delta \varepsilon \kappa_{\alpha\beta}\}_y_{1 \times 24}^T [d_1]_{24 \times 24} \{\Delta S^{\alpha\beta}\}_y_{24 \times 1}, \end{aligned} \quad (5.59)$$

где $\{f_S\}_{36 \times 1} = [P_R]_{36 \times 36}^T \int_F [B]_{36 \times 6}^T \{S^{\alpha\beta}\}_{6 \times 1} dF$; $\{f_P\}_{36 \times 1} = [P_R]_{36 \times 36}^T \int_F [A]_{36 \times 3}^T \{P\}_{3 \times 1} dF$;

$$\{f_{\Delta P}\}_{36 \times 1} = [P_R]_{36 \times 36}^T \int_F [A]_{36 \times 3}^T \{\Delta P\}_{3 \times 1} dF; \quad [a_1]_{24 \times 24} = \int_F [H]_{24 \times 6}^T [h^P]_{6 \times 6}^{-1} [H]_{6 \times 24} dF;$$

$$[b_1]_{24 \times 36} = \int_F [H]_{24 \times 6}^T [h^P]_{6 \times 6}^T [B]_{6 \times 36} dF [P_R]_{36 \times 36}; \quad [d_1]_{24 \times 24} = \int_F [H]_{24 \times 6}^T [H]_{6 \times 24} dF.$$

Применяя к (5.59) процедуру минимизации по $\{\Delta\epsilon\kappa_{\alpha\beta}\}_y^T$ можно получить

следующее соотношение

$$\partial\Phi_{S_3}/\partial\{\Delta\epsilon\kappa_{\alpha\beta}\}_y^T \equiv \underset{1 \times 24}{[b_1]} \underset{24 \times 36}{\{\Delta U^G\}} \underset{36 \times 1}{-} \underset{24 \times 24}{[d_1]} \underset{24 \times 1}{\{\Delta S^{\alpha\beta}\}_y} = 0. \quad (5.60)$$

Реализуя процедуру минимизации (5.59) по шаговым силовым узловым неизвестным $\{\Delta S^{\alpha\beta}\}_y^T$ можно записать следующее матричное выражение

$$\partial\Phi_{S_3}/\partial\{\Delta S^{\alpha\beta}\}_y^T \equiv \underset{1 \times 24}{[a_1]} \underset{24 \times 24}{\{\Delta S^{\alpha\beta}\}_y} \underset{24 \times 1}{-} \underset{24 \times 24}{[d_1]}^T \underset{24 \times 1}{\{\Delta\epsilon\kappa_{\alpha\beta}\}_y} = 0. \quad (5.61)$$

Выполняя минимизацию смешанного нелинейного функционала (5.59) по шаговым кинематическим узловым неизвестным $\{\Delta U^G\}^T$ можно получить матричное соотношение следующего вида

$$\partial\Phi_{S_3}/\partial\{U^G\}^T \equiv \underset{1 \times 36}{\{f_S\}} \underset{36 \times 1}{-} \underset{36 \times 1}{\{f_P\}} \underset{36 \times 1}{-} \underset{36 \times 1}{\{f_{\Delta P}\}} + \underset{36 \times 24}{[b_1]}^T \underset{24 \times 1}{\{\Delta\epsilon\kappa_{\alpha\beta}\}_y} = 0. \quad (5.62)$$

Объединяя полученные в результате троекратной минимизации смешанного нелинейного функционала (5.59) соотношения (5.60), (5.61) и (5.62), можно записать следующую систему матричных уравнений

$$\begin{cases} \underset{24 \times 36}{[b_1]} \underset{36 \times 1}{\{\Delta U^G\}} \underset{24 \times 24}{-} \underset{24 \times 1}{[d_1]} \underset{24 \times 1}{\{\Delta S^{\alpha\beta}\}_y} = 0; \\ \underset{24 \times 24}{[a_1]} \underset{24 \times 1}{\{\Delta S^{\alpha\beta}\}_y} \underset{24 \times 1}{-} \underset{24 \times 24}{[d_1]}^T \underset{24 \times 1}{\{\Delta\epsilon\kappa_{\alpha\beta}\}_y} = 0; \\ \underset{36 \times 1}{\{f_S\}} \underset{36 \times 1}{-} \underset{36 \times 1}{\{f_P\}} \underset{36 \times 1}{-} \underset{36 \times 1}{\{f_{\Delta P}\}} + \underset{36 \times 24}{[b_1]}^T \underset{24 \times 1}{\{\Delta\epsilon\kappa_{\alpha\beta}\}_y} = 0. \end{cases} \quad (5.63)$$

Из второго уравнения (5.63) можно получить деформационные узловые неизвестные на шаге нагружения

$$\underset{24 \times 1}{\{\Delta\epsilon\kappa_{\alpha\beta}\}_y} = \left[\underset{24 \times 24}{[d_1]}^T \right]^{-1} \underset{24 \times 24}{[a_1]} \underset{24 \times 1}{\{\Delta S^{\alpha\beta}\}_y}. \quad (5.64)$$

Из первого уравнения системы (5.63) можно выразить шаговые силовые узловые неизвестные

$$\underset{24 \times 1}{\{\Delta S^{\alpha\beta}\}_y} = \underset{24 \times 24}{[d_1]}^{-1} \underset{24 \times 36}{[b_1]} \underset{36 \times 1}{\{\Delta U^G\}}. \quad (5.65)$$

Выполняя подстановку (5.64) и (5.65) в третье уравнение системы (5.63) можно получить следующую систему алгебраических уравнений

$$\begin{bmatrix} b_1 \end{bmatrix}_{36 \times 24}^T \begin{bmatrix} d_1 \end{bmatrix}_{24 \times 24}^T \begin{bmatrix} a_1 \end{bmatrix}_{24 \times 24} \begin{bmatrix} d_1 \end{bmatrix}_{24 \times 24}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \end{bmatrix}_{24 \times 36} \{ \Delta U^G \}_{36 \times 1} = \{ f_P \}_{36 \times 1} + \{ f_{\Delta P} \}_{36 \times 1} - \{ f_S \}_{36 \times 1} \quad (5.66)$$

или в более компактном виде

$$\begin{bmatrix} K_{s_3} \end{bmatrix}_{36 \times 36} \{ \Delta U^G \}_{36 \times 1} = \{ f_{\Delta P} \}_{36 \times 1} - \{ NR \}_{36 \times 1}, \quad (5.67)$$

где

$$\begin{bmatrix} K_{s_3} \end{bmatrix}_{36 \times 36} = \begin{bmatrix} b_1 \end{bmatrix}_{36 \times 24}^T \begin{bmatrix} d_1 \end{bmatrix}_{24 \times 24}^T \begin{bmatrix} a_1 \end{bmatrix}_{24 \times 24} \begin{bmatrix} d_1 \end{bmatrix}_{24 \times 24}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \end{bmatrix}_{24 \times 36} - \text{ матрица жесткости}$$

четырёхузловое элемента дискретизации на шаге нагружения при реализации трёхпольного варианта МКЭ; $\{ NR \}_{36 \times 1} = \{ f_S \}_{36 \times 1} - \{ f_P \}_{36 \times 1}$ – поправка Ньютона-Рафсона.

5.6. Пример упруго-пластического расчёта кругового цилиндра при использовании трёхпольного варианта МКЭ

С целью верификации разработанного выше трёхпольного варианта МКЭ в физически нелинейной постановке был выполнен численный эксперимент по определению НДС жестко заземленного с одного торца кругового цилиндра, противоположный торец которого был свободен от закреплений. Были использованы следующие исходные данные: длина образующей цилиндра $L = 2,4$ м, радиус цилиндра $R = 1,0$ м, толщина стенки $h = 0,02$ м. Модуль упругости материала $E = 7,49 \cdot 10^4$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,32$. Диаграмма деформирования была представлена двузвенной ломанной, определяемой, как и в предыдущем примере, зависимостью

$$\sigma_i = \operatorname{tg} \alpha \cdot \varepsilon_i; \quad \varepsilon_i \leq 0,0023496; \quad (5.68)$$

$$\sigma_i = \operatorname{tg} \beta \cdot (\varepsilon_i - 0,0023496) + 200; \quad \varepsilon_i > 0,0023496,$$

где $\operatorname{tg} \alpha = 85120,87$; $\operatorname{tg} \beta = 18087,03$.

Вследствие осевой симметрии цилиндр моделировался одной полосой элементов дискретизации, ориентированной вдоль образующей L . На первом этапе расчетов при фиксированном количестве этапов последовательного

нагружения равным 22 была исследована сходимость вычислительного процесса по мере сгущения сетки элементов дискретизации. Результаты расчетов сведены в таблицу 5.4, в которой зафиксированы «физические» значения нормальных напряжений на опорном и свободном торцах цилиндра. В правой крайней колонке таблицы приведены аналитические значения напряжений, полученные из уравнения статики.

Отслеживая представленные в таблице 5.4 данные можно зафиксировать приемлемую скорость сходимости в вычисленных значениях напряжений, как в опорном, так и на свободном торцах оболочки, и их практическое совпадение с аналитическими значениями с минимальной долей погрешности.

Таблица 5.4 – Значения нормальных напряжений на опорном и свободном торцах цилиндра при $n_{ш} = 22$

Координаты точек x , м; θ , рад	Напряжения, МПа	Сетка узлов				Аналитическое решение
		2×81	2×101	2×121	2×151	
Жесткая заделка $x = 0,0$; $\theta = 0,0$	σ_{xx}^{in}	348,2	356,2	352,3	359,9	-
	σ_{xx}^{out}	-348,8	-356,4	-352,7	-359,7	-
	$\sigma_{\theta\theta}^{in}$	140,8	146,4	148,6	151,3	-
	$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	-146,5	-148,7	-157,0	-149,1	-
Свободный торец $x = 2,4$; $\theta = 0,0$	σ_{xx}^{in}	0,033	0,036	0,041	0,039	-
	σ_{xx}^{out}	0,049	0,047	0,048	0,044	-
	σ_{xx}^{midl}	0,028	0,028	0,027	0,028	0,000
	$\sigma_{\theta\theta}^{in}$	250,2	250,3	250,5	250,3	-
	$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	248,4	248,4	248,3	248,4	-
	$\sigma_{\theta\theta}^{midl}$	249,3	249,3	249,4	249,3	250,0

Далее была выполнена проверка сходимости вычислительного процесса при фиксированной сетке элементов дискретизации 2×121 при последовательном увеличении количества шагов нагружения. Результаты расчетов сведены в таблицу 5.5, структура которой практически идентична структуре предыдущей таблицы

Таблица 5.5 – Значения нормальных напряжений на опорном и свободном торцах цилиндра при сетке узлов 2×121

Координаты точек x , м; θ , рад	Напряжения, МПа	Количество шагов нагружения				Аналитическое решение
		22	32	42	52	
Жесткая заделка $x = 0,0$; $\theta = 0,0$	σ_{xx}^{in}	352,3	355,3	358,8	360,5	-
	σ_{xx}^{out}	-352,7	-355,7	-358,8	-360,9	-
	$\sigma_{\theta\theta}^{in}$	148,6	151,1	147,3	146,0	-
	$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	-157,0	-157,0	-152,2	-153,5	-
Свободный торец $x = 2,4$; $\theta = 0,0$	σ_{xx}^{in}	0,041	0,025	0,027	0,016	-
	σ_{xx}^{out}	0,048	0,032	0,031	0,022	-
	σ_{xx}^{midl}	0,027	0,007	-0,003	-0,002	0,000
	$\sigma_{\theta\theta}^{in}$	250,5	250,9	251,6	250,9	-
	$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	248,3	248,4	248,3	248,5	-
	$\sigma_{\theta\theta}^{midl}$	249,4	249,6	249,9	249,7	250,0

Анализ данных, приведенных в таблице 5.5, также фиксирует устойчивую сходимость вычислительного процесса по мере увеличения количества этапов последовательного нагружения и практическое совпадение численных значений нормальных напряжений со значениями, полученными аналитическим путем, исходя из условия статического равновесия.

5.7. Пример упруго-пластического расчета круговой цилиндрической панели

Как было отмечено ранее, предложенный трехпольный вариант МКЭ позволяет после решения глобальной системы линейных алгебраических уравнений одновременно получать поля перемещений, усилий и деформаций. Отмеченное преимущество трехпольного МКЭ может быть использовано для верификации разработанного алгоритма в плане соответствия внутренних силовых факторов, в данном случае изгибающего момента, моменту от действия приложенной внешней нагрузки. Была рассчитана цилиндрическая панель под внутренним давлением q (Рис.5.3). Левая образующая цилиндра жестко

защемлена, правая – не имеет закреплений. Панель имела следующие размеры: $L = 0,01$ м; $b = c = 1,0$ м; $h = 0,01$ м. Величина интенсивности давления $q = 6 \cdot 10^{-3}$ МПа.

Физические характеристики материала панели совпадают со значениями, использованными в предыдущем примере расчета.

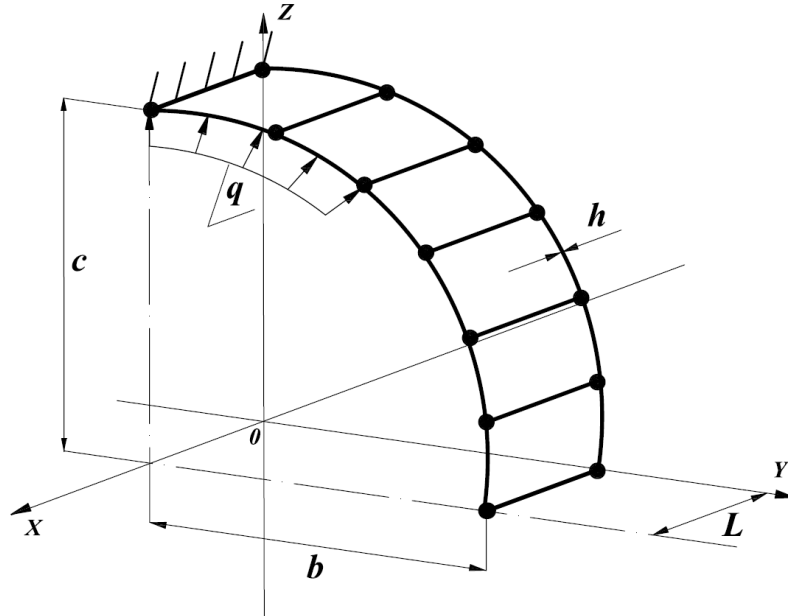


Рисунок 5.3 – Расчетная схема эллиптического цилиндра

Выбранная расчетная схема позволяет вычислить значение изгибающего момента от действия приложенной нагрузки (Рисунок 5.4) по формуле

$$M_{22} = \frac{q_{\Gamma} \cdot c^2}{2} + \frac{q_{\text{В}} \cdot b^2}{2} = q \cdot L \cdot R^2 = 6 \cdot 10^{-3} \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \cdot 10^{-2} \text{ м} \cdot (1 \text{ м})^2 = 60 \text{ Н} \cdot \text{м}. \quad (5.68)$$

Аналитическое значение изгибающего момента M_{22} можно сравнить с его численным значением, полученным в результате выполнения численного эксперимента, итоговые данные которого сведены в таблицу 5.6. В таблице приведены численные значения нормальных напряжений в жесткой заделке и на свободном конце, а также численные значения изгибающего момента в жесткой заделке в зависимости от количества этапов последовательного нагружения при сетке узлов 51×2 .

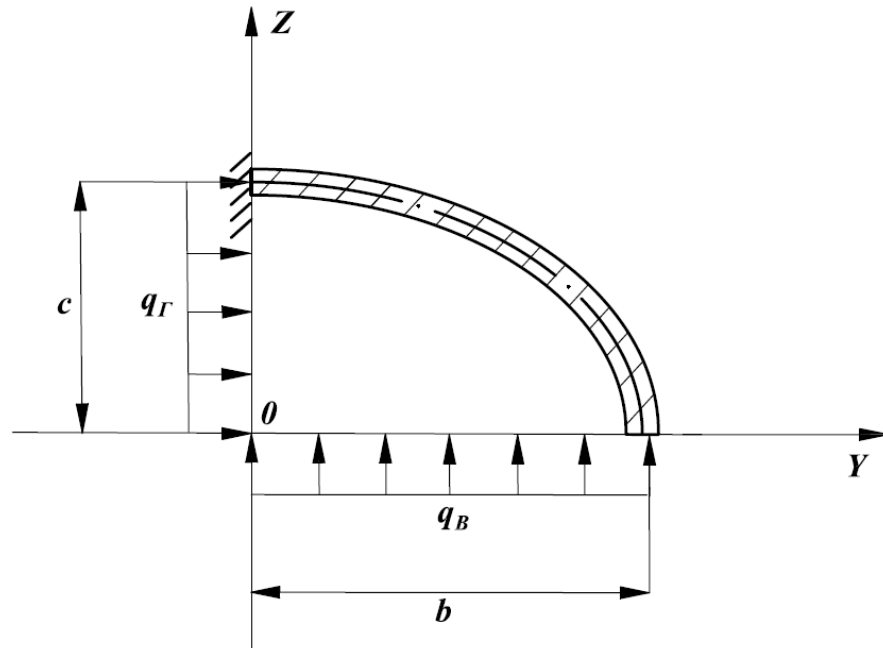


Рисунок 5.4 – Сечение оболочки плоскостью ZOY

Таблица 5.6 – Значения нормальных напряжений
в цилиндрической панели при сетке узлов 51×2

Координаты точек у, м; z, м	Напряжения, σ МПа; момент M_{22} , Н · м	Количество этапов нагружения				Аналитическое решение
		22	52	82	102	
0,0 м; 1,0 м;	σ_{22}^{in}	297,7	297,8	297,9	297,9	-
	σ_{22}^{out}	-295,2	-295,5	-295,7	-295,7	-
	M_{22}	60,39	60,24	60,09	60,016	60,00
1,0 м; 0,0м	σ_{22}^{in}	-0,03	-0,03	-0,03	-0,03	-
	σ_{22}^{out}	0,029	0,029	0,029	0,029	-
	σ_{22}^{midl}	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,000
	M_{22}	0,0049	0,0049	0,0049	0,0049	0,000

Анализ данных, представленных в таблице 5.6, показывает высокую скорость сходимости вычислительного процесса по мере увеличения количества этапов последовательного нагружения. Изгибающий момент M_{22} , полученный в ходе выполнения численного эксперимента, практически совпадает с его значением, вычисленным по аналитической формуле (5.68) при количестве этапов последовательного нагружения, равным 102. Численные значения

нормальных напряжений σ_{22} и изгибающего момента M_{22} на свободном конце цилиндрической панели достаточно близки к нулевым значениям, что соответствует условию статического равновесия.

Таким образом, можно констатировать корректность и высокую точность разработанного трехпольного варианта МКЭ при упруго-пластическом анализе НДС оболочечных конструкций.

5.8. Пример упруго-пластического расчёта эллиптической панели

С целью выполнения сопоставительного анализа эффективности разработанного трехпольного варианта смешанного МКЭ в физически нелинейной постановке по сравнению с традиционным вариантом МКЭ в формулировке метода перемещений был рассчитан фрагмент эллиптического цилиндра с соотношением параметров эллипса поперечного сечения равного 5 $b/c=5$, расчетная схема которого совпадает с расчетной схемой кругового цилиндра из предыдущего примера расчета. Были использованы следующие исходные данные: $b = 1,5$ м; $c = 0,3$ м; $h = 0,01$ м; $L = 0,01$ м; $q = 6 \cdot 10^{-3}$ МПа.

Результаты расчетов представлены в табличной форме, структура таблиц совпадает со структурой таблицы 5.6 из предыдущего примера.

В таблицах 5.7, 5.8 и 5.9 представлены результаты расчетов при использовании трехпольного варианта смешанного МКЭ при последовательном сгущении сетки узлов 41×2 , 51×2 и 61×2 в зависимости от количества этапов последовательного нагружения.

Выбранная расчетная схема позволяет вычислить значения изгибающего момента в жесткой заделке

$$M_{22} = (q_b b^2 / 2 + q_c c^2 / 2) L = (q / 2) (b^2 + c^2) L = 3 \cdot 10^3 \text{ Н/м}^2 \cdot \\ \cdot ((1,5 \text{ м})^2 + (0,3 \text{ м})^2) \cdot 10^{-2} \text{ м} = 3 \cdot 10 \cdot 2,34 \text{ Н} \cdot \text{м} = 70,2 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Также очевидно, что изгибающий момент M_{22} на свободном конце эллиптического цилиндра, как и напряжения, должны быть равны 0.

В крайней правой колонке таблиц 5.7, 5.8 и 5.9 приведены вышеуказанные аналитические значения контролируемых прочностных параметров НДС оболочки.

Как следует из анализа данных, приведенных в таблицах 5.7, 5.8 и 5.9 трехпольный вариант смешанного МКЭ в физически нелинейной постановке демонстрирует устойчивую сходимость вычислительного процесса, как при измельчении сетки дискретизации, так и при увеличении количества этапов последовательного нагружения. Кроме того, численное значение изгибающего момента M_{22} в жесткой заделке и на свободном конце практически совпадают с их аналитическими значениями, что также является доказательством корректности и высокой степени точности конечноэлементных решений, получаемых при использовании разработанного трехпольного смешанного МКЭ в физически нелинейной постановке.

Если же к решению данной задачи привлечь классическую формулировку МКЭ метода перемещений, то результаты конечноэлементных решений будут весьма существенно отличаться от вышеприведенных.

Таблица 5.7 – Значения контролируемых параметров НДС при сетке узлов 41×2

Координаты точек, $y, \text{м};$ $z, \text{м}$	Напряжения, $\sigma, \text{МПа}$ момент, $M_{22},$ Н·м,	Количество шагов нагружения				Аналитическое решение
		22	52	82	102	
0.0; 0.3	σ_{22}^{in}	347.3	347.5	347.6	347.6	-
	σ_{22}^{out}	-346.7	-347.1	-347.1	-347.1	-
	M_{22}	70.74	70.55	70.22	70.16	70.20
1.5; 0.0	σ_{22}^{in}	-0.192	-0.190	-0.190	-0.191	-
	σ_{22}^{out}	-0.137	-0.136	-0.136	-0.136	-
	σ_{22}^{midl}	0.0687	0.0681	0.0681	0.0685	0.000
	M_{22}	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.000

Таблица 5.8 – Значения контролируемых параметров НДС при сетке узлов 51×2

Координаты точек, $y, \text{м};$ $z, \text{м}$	Напряжения, $\sigma, \text{МПа}$ момент, $M_{22}, \text{Н} \cdot \text{м},$	Количество шагов нагружения				Аналитическое решение
		22	52	82	102	
0.0; 0.3	σ_{22}^{in}	347.4	347.6	347.6	347.6	-
	σ_{22}^{out}	-346.7	-347.1	-347.2	-347.2	-
	M_{22}	70.87	70.36	70.32	70.29	70.20
1.5; 0.0	σ_{22}^{in}	-0.0708	-0.0682	-0.0679	-0.0683	-
	σ_{22}^{out}	-0.0533	-0.0514	-0.0511	-0.0515	-
	σ_{22}^{midl}	0.0273	0.0266	0.0265	0.0266	0.000
	M_{22}	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.000

Таблица 5.9 – Значения контролируемых параметров НДС при сетке узлов 61×2

Координаты точек, $y, \text{м};$ $z, \text{м}$	Напряжения, $\sigma, \text{МПа}$ момент, $M_{22}, \text{Н} \cdot \text{м},$	Количество шагов нагружения				Аналитическое решение
		22	52	82	102	
0.0; 0.3	σ_{22}^{in}	347.5	347.6	347.7	347.7	-
	σ_{22}^{out}	-346.7	-347.1	-347.2	-347.2	-
	M_{22}	71.03	70.50	70.37	70.33	70.20
1.5; 0.0	σ_{22}^{in}	-0.0295	-0.0298	-0.0299	-0.0297	-
	σ_{22}^{out}	-0.0223	-0.0225	-0.0225	-0.0224	-
	σ_{22}^{midl}	0.0119	0.0120	0.0120	0.0120	0.000
	M_{22}	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.000

Так, например, в таблице 5.10 представлены результаты расчета эллиптического цилиндра МКЭ в форме метода перемещений при сетке узлов 61×2.

Как следует из анализа таблицы 5.10, сходимость вычислительного процесса при увеличении количества шагов последовательного нагружения отсутствует. Кроме того, на свободном конце оболочки напряжения достигают неприемлемо больших значений, хотя должны быть равны нулю.

Таблица 5.10 – Значения напряжений эллиптического цилиндра МКЭ в форме метода перемещений при сетке узлов 61×2

Координаты точек, $y, \text{ м};$ $z, \text{ м}$	Напряжения, $\sigma_{22}, \text{ МПа}$	Количество шагов нагружения				Аналитическое решение
		22	52	82	102	
0.0; 0.3	σ_{22}^{in}	304.1	274.6	120.3	276.0	-
	σ_{22}^{out}	-303.8	-274.3	-112.7	-275.8	-
1.5; 0.0	σ_{22}^{in}	-76.44	-66.17	-140.8	-62.41	-
	σ_{22}^{out}	358.4	323.2	330.2	319.4	-
	σ_{22}^{midl}	270.7	250.8	246.4	248.9	0.000

Очевидно, что при использовании МКЭ в формулировке метода перемещений в физически нелинейных расчетах оболочек со значительной кривизной срединной поверхности требуется гораздо более существенное измельчение сетки дискретизации. В таблицах 5.11 - 5.13 приведены результаты расчетов эллиптического цилиндра при сетке узлов 81×2 , 101×2 и 121×2 соответственно.

Таблица 5.11 – Значения напряжений эллиптического цилиндра МКЭ в форме метода перемещений при сетке узлов 81×2

Координаты точек, $y, \text{ м};$ $z, \text{ м}$	Напряжения, $\sigma_{22}, \text{ МПа}$	Количество шагов нагружения				Аналити- ческое решение
		22	52	82	102	
0.0; 0.3	σ_{22}^{in}	343.9	302.9	369.0	264.1	-
	σ_{22}^{out}	-343.4	-302.2	-370.4	-263.0	-
1.5; 0.0	σ_{22}^{in}	-66.74	-59.54	-32.91	-56.99	-
	σ_{22}^{out}	278.5	259.7	253.6	248.7	-
	σ_{22}^{midl}	213.8	178.8	176.7	156.3	0.000

Таблица 5.12 – Значения напряжений эллиптического цилиндра МКЭ в форме метода перемещений при сетке узлов 101×2

Координаты точек, y, m ; z, m	Напряжения, σ_{22}, MPa	Количество шагов нагружения				Аналитическое решение
		22	52	82	102	
0.0; 0.3	σ_{22}^{in}	345.0	345.2	344.2	341.6	-
	σ_{22}^{out}	-344.5	-344.8	-343.8	-341.2	-
1.5; 0.0	σ_{22}^{in}	-47.34	-47.49	-47.21	-46.41	-
	σ_{22}^{out}	227.5	227.7	227.2	225.6	-
	σ_{22}^{midl}	114.9	115.2	114.6	112.9	0.000

Таблица 5.13 – Значения напряжений эллиптического цилиндра МКЭ в форме метода перемещений при сетке узлов 121×2

Координаты точек, y, m ; z, m	Напряжения, σ_{22}, MPa	Количество шагов нагружения				Аналитическое решение
		22	52	82	102	
0.0; 0.3	σ_{22}^{in}	346.3	346.6	346.6	346.6	-
	σ_{22}^{out}	-345.8	-346.1	-346.1	-346.1	-
1.5; 0.0	σ_{22}^{in}	-37.30	-37.41	-37.43	-37.44	-
	σ_{22}^{out}	145.1	145.6	145.7	145.8	-
	σ_{22}^{midl}	69.49	69.74	69.80	69.81	0.000

Анализ табличных значений нормальных напряжений в таблице 5.11 показывает, что при сетке узлов 81×2 также отсутствует сходимость вычислительного процесса по мере увеличения количества этапов последовательного нагружения, а напряжения на свободном конце имеют недопустимо высокие значения.

При сетке узлов 101×2 в жесткой заделке (таблица 5.12) наблюдается удовлетворительная сходимость вычислительного процесса. Однако, на свободном конце напряжения имеют неприемлемо завышенные значения.

При сетке узлов 121×2 (таблица 5.13) значения напряжений в жесткой заделке остаются практически неизменными и совпадающими со значениями

напряжений в жесткой заделке, полученными при использовании трехпольного варианта смешанного МКЭ (таблицы 5.7 - 5.9). Однако, на свободном конце нормальные напряжения по-прежнему остаются весьма далеки от нулевых значений, что требует дальнейшего измельчения сетки дискретизации.

В таблице 5.14 представлены результаты расчета эллиптического цилиндра при сетке узлов 201×2 . Как следует из анализа табличных данных, в жесткой заделке наблюдается устойчивая сходимость вычислительного процесса по мере увеличения количества этапов последовательного нагружения. На свободном же конце оболочки значения напряжений уменьшились, однако все еще остаются достаточно далекими от нулевых значений.

Таблица 5.14 – Значения напряжений эллиптического цилиндра МКЭ в форме метода перемещений при сетке узлов 201×2

Координаты точек, у, м; z, м	Напряжения, σ_{22} , МПа	Количество шагов нагружения				Аналитическое решение
		22	52	82	102	
0.0; 0.3	σ_{22}^{in}	347.2	347.5	347.6	347.6	-
	σ_{22}^{out}	-346.8	-347.0	-347.1	-347.1	-
1.5; 0.0	σ_{22}^{in}	-17.44	-17.49	-17.50	-17.51	-
	σ_{22}^{out}	40.28	40.41	40.44	40.45	-
	σ_{22}^{midl}	16.31	16.37	16.38	16.38	0.000

Кроме того, следует отметить, что при использовании традиционной формулировки МКЭ в форме метода перемещений возникает проблема получения численного значения изгибающего момента в жесткой заделке. Для решения указанной проблемы можно применить графический метод вычисления значения изгибающего момента по эпюре нормального напряжения в жесткой заделке, построенной по фиксированным точкам вертикальной координаты вдоль нормали к срединной поверхности оболочки.

На рисунке 5.5 изображена эпюра нормального напряжения в жесткой заделке при сетке узлов 201×2 , построенная по 9 узловым точкам вдоль нормали

к поверхности. Для удобства дальнейших вычислений эпюра была разделена на элементарные фигуры и найдены центры тяжести в каждой из фигур. Затем были вычислены силы $\vec{T}_i$ ($i=1,\dots,10$) как площади каждой из фигур. Моменты были вычислены как произведения сил на соответствующие плечи $\vec{M}_i = \vec{T}_i \cdot d_i$ ($i=1,\dots,10$).

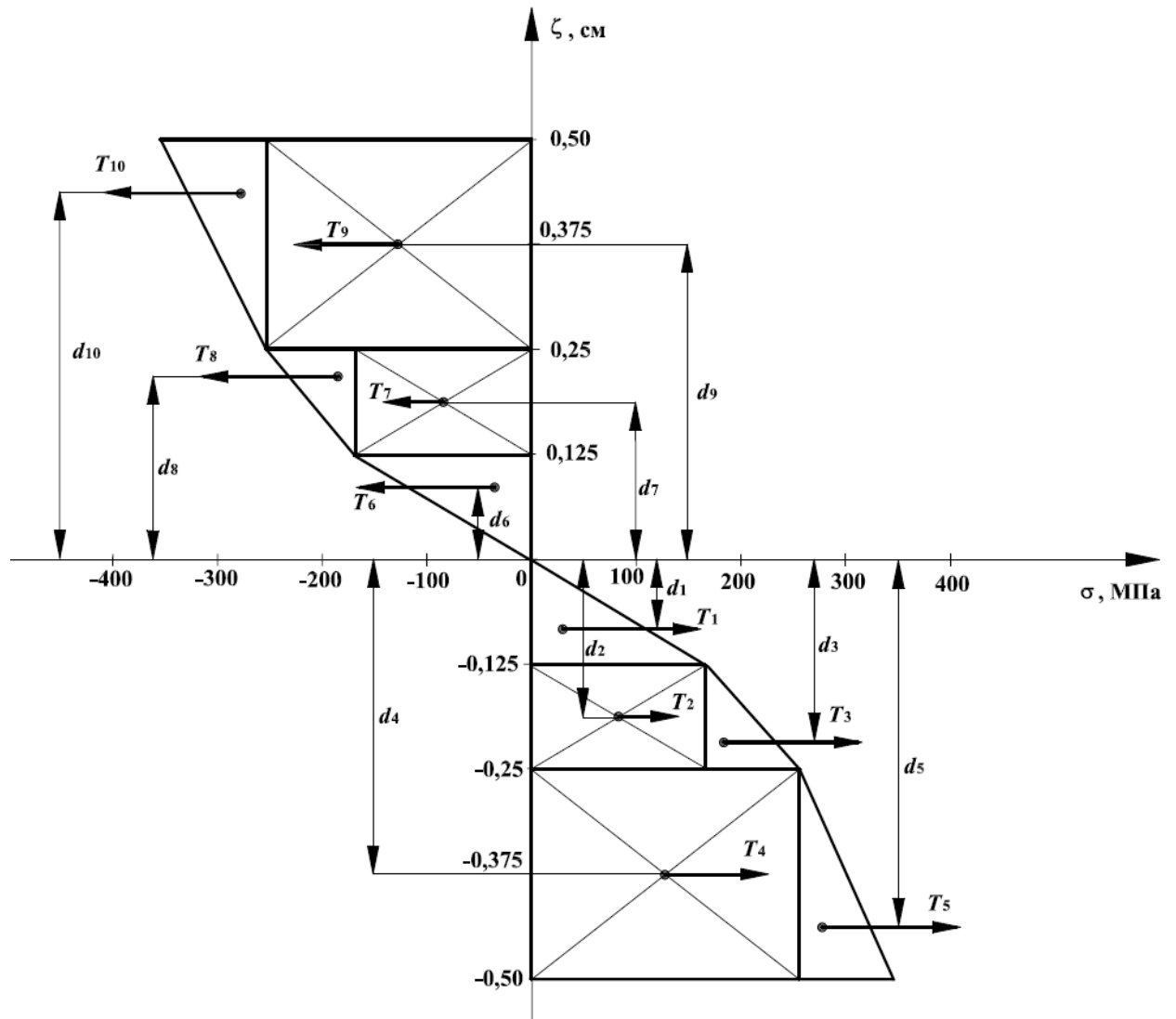


Рисунок 5.5 – Эпюра нормального напряжения в жесткой заделке

Результирующий момент может быть получен суммированием моментов $\vec{M}_i$

$$M_{22} = \sum_{i=1}^{10} |\vec{M}_i|.$$

После выполнения описанных выше вычислений, был получен результирующий момент, равный

$$M_{22} = 69.554 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Погрешность вычислений составила

$$\delta = \frac{70.2 - 69.554}{70.2} \cdot 100\% = 0.92\%.$$

Очевидно, что при построении более подробной эпюры напряжений, например, с разбиением ее по высоте на 17 точек, погрешность вычисления может быть снижена. Однако, полученная при разбиении эпюры напряжений на 9 точек по высоте сечения погрешность, равная 0.92%, является вполне приемлемой для инженерных расчетов.

5.9. Пример упруго-пластического расчёта эллиптического кольца

Был выполнен расчет фрагмента эллиптического кольца с соотношением параметров эллипса $a/b = 6$, загруженного справа равномерно распределенной вдоль образующей линейной нагрузкой интенсивности $q = 25 \text{ кН/м}$ и имеющего слева шарнирное опирание (рисунок 5.6). Были использованы следующие исходные данные: $a = 1.2 \text{ м}$; $b = 0.2 \text{ м}$; $h = 0.008 \text{ м}$; $L = 0.01 \text{ м}$. Физические характеристики материала и диаграмма деформирования были взяты из предыдущего примера расчета. В точках шарнирного опирания возникает реактивная сила, равная приложенной узловой нагрузке $R = Q$. Таким образом, нормальные напряжения σ_{22} в точках K и M должны быть одинаковыми. Равенство нормальных напряжений σ_{22} в точках K и M может служить дополнительным критерием корректности полученных в результате решения численных значений нормальных напряжений.

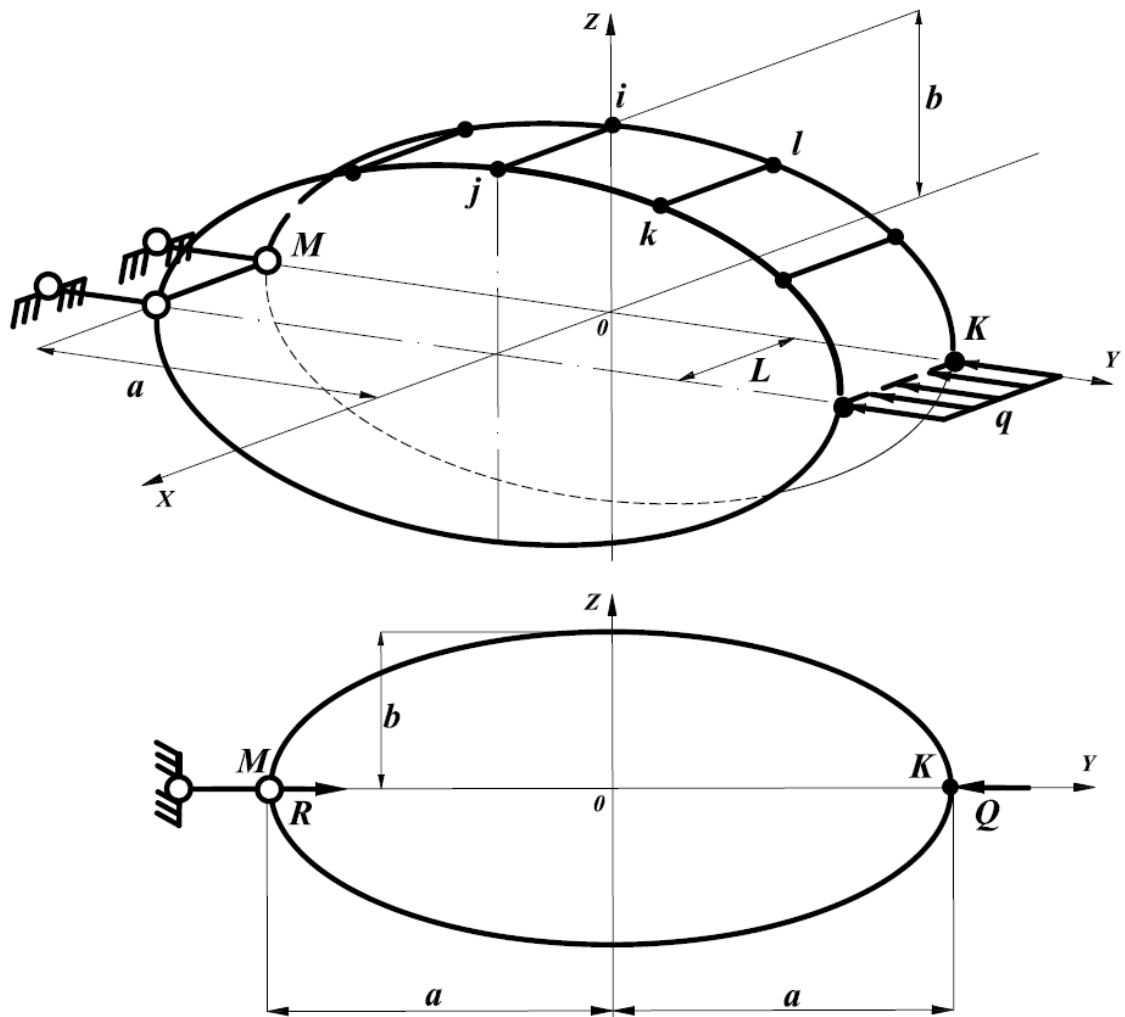


Рисунок 5.6 – Расчетная схема эллиптического кольца

Расчеты выполнялись на основе скомпонованного в п 5.5 трехпольного ЧЭД (1-ый вариант расчета) и при использовании элемента дискретизации, матрица жесткости которого была скомпонована в формулировке метода перемещений (второй вариант). Данные, полученные по первому варианту расчета сведены в таблицы 5.15 и 5.16. В таблице 5.15 приведены значения нормальных напряжений на внутренней и наружной поверхностях оболочки в точках приложения заданной нагрузки и в точках шарнирного опирания в зависимости от степени сгущения сетки узлов при фиксированном количестве шагов нагружения, равном 22.

Таблица 5.15 – Значения напряжений по первому варианту расчета

Координаты точек, y , м; t , м	Напряжения, σ_{22} , МПа	Сетка дискретизации			
		51×2	61×2	81×2	101×2
1.2; $\pi/2$	σ_{22}^{in}	303.5	304.0	305.2	305.5
	σ_{22}^{out}	-270.1	-270.4	-271.0	-271.2
-1.2; $\pi/2$	σ_{22}^{in}	303.0	304.0	305.2	305.5
	σ_{22}^{out}	-269.6	-270.3	-271.0	-271.1

Анализ данных таблицы 5.15 позволяет констатировать факт сходимости численных значений напряжений и зафиксировать их совпадения в точках К и М, чего и следовало ожидать исходя из схемы расчета (Рис. 5.6).

В таблице 5.16 представлены результаты расчета оболочки при фиксированной сетке дискретизации 61×2 и последовательном увеличении количества этапов последовательного нагружения.

Таблица 5.16 – Значения напряжений первого варианта в зависимости от количества шагов нагружения

Координаты точек, y , м; t , м	Напряжения, σ_{22} , МПа	Количество шагов нагружения			
		22	52	82	102
1.2; $\pi/2$	σ_{22}^{in}	304.0	304.7	304.8	304.8
	σ_{22}^{out}	-270.4	-270.5	-270.6	-270.55
-1.2; $\pi/2$	σ_{22}^{in}	304.0	304.7	304.8	304.8
	σ_{22}^{out}	-270.3	-270.4	-270.4	-270.4

Как следует из анализа данных таблицы 5.16, наблюдается устойчивая сходимость вычислительного процесса. Численные значения нормальных напряжений изменяются весьма незначительно при увеличении количества шагов нагружения с 22 до 102, что также является необходимым условием достоверности полученных результатов.

Итоги вычислений при реализации МКЭ по методу перемещений показаны в таблицах 5.17 и 5.18. В первой из упомянутых таблиц приведены результаты при фиксированном количестве шагов нагружения равным 22 и последовательном сгущении сетки дискретизации с 61×2 до 201×2 .

Таблица 5.17 – Значения напряжений второго варианта расчета в зависимости от размеров сетки дискретизации

Координаты точек, $y, \text{ м}; t, \text{ м}$	Напряжения, $\sigma_{22}, \text{ МПа}$	Сетка дискретизации					
		61×2	81×2	101×2	121×2	151×2	201×2
1.2; $\pi/2$	σ_{22}^{in}	711.6	528.7	442.5	394.8	357.8	334.4
	σ_{22}^{out}	-284.7	-320.9	-319.0	-309.5	-297.7	-287.5
-1.2; $\pi/2$	σ_{22}^{in}	276.9	301.7	301.1	302.9	305.9	305.7
	σ_{22}^{out}	-250.1	-269.1	-268.1	-269.5	-271.6	-271.4

Анализ таблицы 5.17 показывает весьма медленную сходимость вычислительного процесса по мере сгущения сетки дискретизации рассчитываемой оболочки. Также можно отметить несовпадение значений нормальных напряжений σ_{22} в точках приложения нагрузки q и точках шарнирного опирания. На рисунке 5.6 представлен график изменений отношения напряжений $k = (\sigma_{22}^{in})_K / (\sigma_{22}^{in})_M$ в точках K и M оболочки в зависимости от густоты сетки дискретизации в двух рассчитываемых формулировках МКЭ.

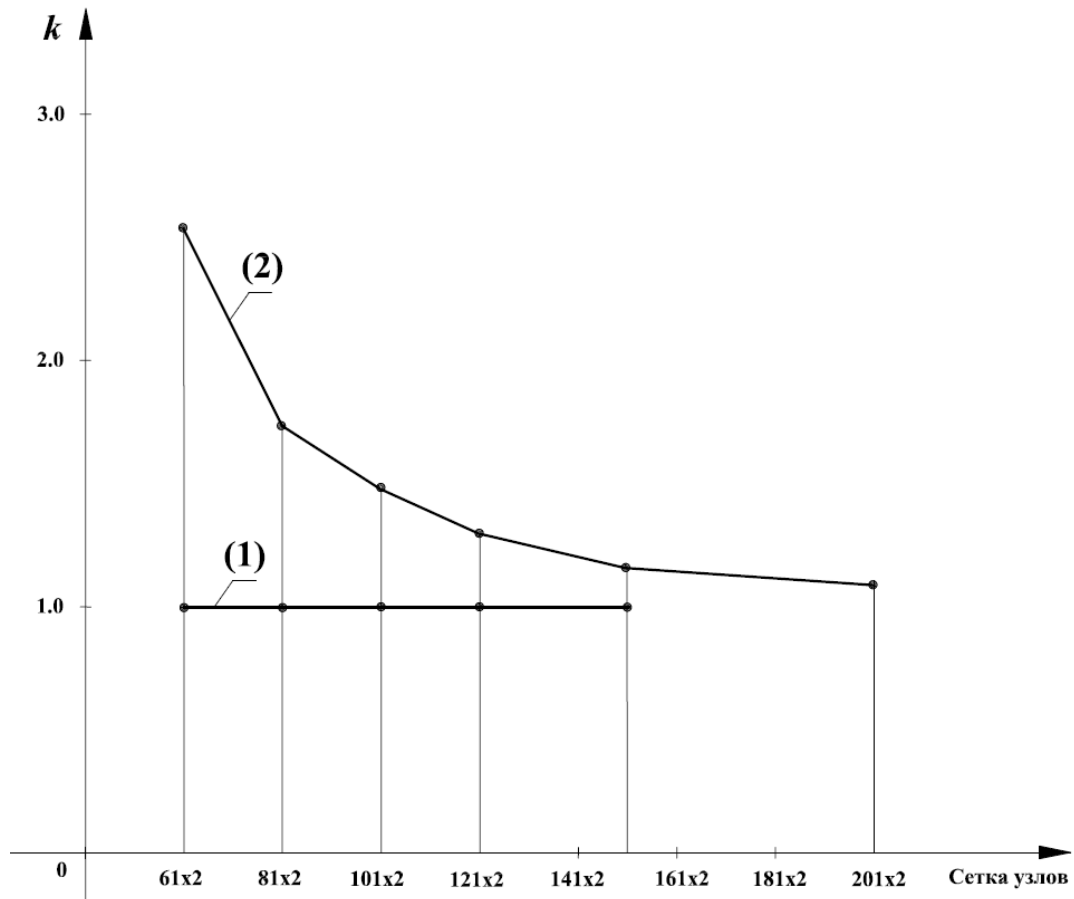


Рисунок 5.7 – Повариантные графики изменения коэффициента k в зависимости от степени измельчения сетки узлов

Анализируя выше приведенные графики можно отметить, что применение трехпольного ЧЭД позволило иметь значения $k=1$ независимо от степени измельчения сетки узлов, тогда как МКЭ в формулировке метода перемещений не позволяет достичь такого результата, несмотря на весьма существенное сгущение сетки дискретизации. Дальнейшее сгущение сетки также не является целесообразным, так как при этом происходит накопление ошибок округления при размере элемента дискретизации сопоставительного с его толщиной, что уже не отвечает критериям тонкой оболочки.

В таблице 5.18 представлены результаты второго варианта расчета при фиксированной сетке дискретизации 201×2 в зависимости от количества этапов последовательного нагружения.

Таблица 5.18 – Значения напряжений второго варианта в зависимости от количества шагов нагружения

Координаты точек, $y, m; t, m$	Напряжения, $\sigma_{22}, \text{МПа}$	Количество шагов нагружения			
		22	52	82	102
1.2; $\pi/2$	σ_{22}^{in}	334.4	313.1	318.5	311.7
	σ_{22}^{out}	-287.5	-271.6	-276.4	-271.1
-1.2; $\pi/2$	σ_{22}^{in}	305.7	295.1	285.7	282.4
	σ_{22}^{out}	-271.4	-263.4	-256.6	-254.1

Как следует из анализа данных таблицы 5.18, наблюдается удовлетворительная сходимость вычислительного процесса, однако разница между значениями напряжений в точках K и M остается практически неизменной в пределах 10%, чего не должно быть при выбранной расчетной схеме.

5.10. Выводы по пятой главе

1. Предложен нелинейный смешанный функционал с двумя полями шаговых неизвестных: кинематических (приращения компонент вектора перемещения и их первые производные) и деформационных (приращения деформаций и искривлений срединной поверхности).
2. На основе предложенного нелинейного смешанного функционала разработан алгоритм компоновки матрицы жесткости ЧЭД на шаге нагружения.
3. При использовании разработанного смешанного четырехузлового элемента дискретизации был выполнен ряд численных экспериментов по расчету оболочек в физически нелинейной постановке, которые доказали корректность и высокую точность вычисления прочностных параметров НДС оболочек при их упруго-пластическом деформировании.
4. Предложен нелинейный смешанный функционал с тремя полями шаговых неизвестных: кинематических, силовых и деформационных.

5. На основе предложенного нелинейного смешанного функционала с тремя полями шаговых искомых параметров скомпонована матрица жесткости четырехузлового элемента дискретизации на шаге нагружения.
6. Выполнен сопоставительный анализ конечно-элементных решений по физически нелинейному расчету оболочек, полученных при использовании разработанного трехпольного алгоритма смешанного МКЭ и решений, полученных на основе однопольного МКЭ в формулировке метода перемещений.
7. Анализ результатов сопоставительного анализа доказал существенные преимущества разработанного трехпольного МКЭ в задачах расчета оболочек при их упруго-пластическом деформировании по сравнению с МКЭ в форме метода перемещений.

Основные результаты и выводы

1. Разработан алгоритм формирования матрицы жесткости двупольного смешанного четырехузлового элемента дискретизации с кинематическими (перемещения и их производные первого порядка) и вариативными силовыми (продольные силы и изгибающие моменты или деформации и искривления срединной поверхности) искомыми прочностными параметрами.
2. На основе предложенного модифицированного смешанного функционала разработан новый алгоритм формирования матрицы жесткости трехпольного четырехузлового элемента дискретизации с искомыми неизвестными в виде компонент вектора перемещений и их первых производных, продольных сил и изгибающих моментов, а также деформаций и искривлений срединной поверхности.
3. Разработан новый вариант тензорной формы интерполяционной процедуры для силовых (продольные силы и изгибающие моменты) и деформационных (деформаций и искривлений срединной поверхности) искомых варьируемых параметров с реализацией данной формы интерполяции в дву- и трехпольном вариантах смешанного МКЭ.

4. На основе сравнительного анализа конечноэлементных решений по расчету упругих оболочек доказаны существенные преимущества разработанных смешанных элементов дискретизации, в том числе с тензорно-векторной формой интерполяционной процедуры по сравнению с конечными элементами, полученными в формулировке метода перемещений.
5. На основе предложенного двупольного и трехпольного смешанного нелинейного функционала разработан новый алгоритм формирования матриц жесткостей четырехузловых элементов дискретизации на шаге нагружения при реализации деформационной теории пластичности с использованием процедуры дифференцирования компонент тензора деформаций по компонентам тензора напряжений при получении матрицы пластичности.
6. Выполненный анализ конечноэлементных решений по расчету оболочек в физически нелинейной постановке выявил существенные преимущества разработанного алгоритма трехпольного смешанного МКЭ в сравнении с результатами расчетов, полученных при использовании МКЭ в формулировке метода перемещений.
7. Разработанные вычислительные алгоритмы расчета тонких оболочек на основе смешанной двухпольной и трехпольной формулировок МКЭ с тензорно-векторной интерполяционной процедурой в линейной и физически нелинейной постановках реализованы в пакетах прикладных программ по расчету на прочность оболочечных конструкций, в том числе с учетом физической нелинейности материала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агапов, В. П. Разработка и реализация восьмиузлового конечного элемента для расчета массивных конструкций с учетом пластических деформаций [Текст] / В. П. Агапов, В. П. Васильев, А. В. Соснин // Строительная механика и расчет сооружений. 2013. № 4. С. 71-73.
2. Агапов, В. П. Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости пространственных тонкостенных подкрепленных конструкций [Текст] / В. П. Агапов - М.: Издательство АСВ, 2000. -152 с.
3. Акимов, П. А. Вейвлет-реализация дискретно-континуального метода конечных элементов на основе В-сплайнов для локального решения двумерной задачи теории упругости [Текст] / П. А. Акимов, М. Л. Мозгалева // Вестник МГСУ. – 2022. – Т. 17, № 1. – С. 32-41. – DOI: 10.22227/1997-0935.2022.1.32-41.
4. Аргирис, Дж. Геометрическая нелинейность и метод конечных элементов в варианте метода перемещений [Текст] / Дж. Аргирис. - М.: Мир, 1981. - 120 с.
5. Баженов, В. Г. Численное моделирование процессов деформирования и потери устойчивости многослойных оболочек вращения при комбинированных квазистатических и динамических осесимметричных нагружениях с кручением [Текст] / В. Г. Баженов, Е. Ю. Линник, Е. В. Нагорных, Д. А. Самсонова// Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. - 2024. – Т. 24. - № 1. - С. 14-27.
6. Баженов, В. Г. Вариационно-разностное решение задач деформирования и потери устойчивости упругопластических оболочек вращения с упругим заполнителем при комбинированных квазистатических и динамических осесимметричных нагружениях [Текст] / В. Г. Баженов, Ю. А. Калинина, Е. В. Нагорных, Д. А. Самсонова// Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. - 2024. - № 1. - С. 45-57.

7. Баженов, В. Г. Численные и экспериментальные исследования динамического деформирования и разрушения при соударении прямоугольных пластин [Текст] / В. Г. Баженов, А. А. Рябов, С. С. Куканов, С. О. Птицын // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. - 2024. - № 3. - С. 85-96.

8. Бакулин, В. Н. Блочно-послойный подход для анализа напряженно-деформированного состояния трехслойных нерегулярных цилиндрических оболочек вращения / В. Н. Бакулин // Прикладная математика и механика. - 2021. - Т. 85. - № 3. - С. 383-395.

9. Бакулин, В. Н. Модель для анализа напряженно-деформированного состояния трехслойных цилиндрических оболочек с прямоугольными вырезами [Текст] / В. Н. Бакулин // Известия российской академии наук. Механика твердого тела. - 2022. - № 1. - С. 122-132.

10. Бакулин, В. Н. Влияние размеров прямоугольных в плане вырезов и модуля упругости подкрепляющих закладных элементов на напряженно-деформированное состояние трехслойных отсеков [Текст] / В. Н. Бакулин // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. - 2023. - № 2. - С. 11-21.

11. Бакулин, В. Н. Влияние угла раствора прямоугольных в плане вырезов на напряженно-деформированное состояние трехслойных цилиндрических отсеков [Текст] / В. Н. Бакулин // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. - 2024. - № 1. - С. 21-29.

12. Бакулин, В. Н. Влияние толщины несущего слоя на напряженно-деформированное состояние в слоях трехслойных цилиндрических отсеков с прямоугольными в плане вырезами [Текст] / В. Н. Бакулин // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. - 2024. - № 3. - С. 13-19.

13. Бакулин, В. Н. Эффективная трехмерная оболочечная модель для послойного исследования напряженно-деформированного состояния трехслойных нерегулярных цилиндрических [Текст] / В. Н. Бакулин // Вестник

московского университета. Серия 1: Математика. Механика. - 2024. - № 3. - С. 64-70.

14. Бакулин, В. Н. Послойный анализ напряженно-деформированного состояния трехслойных цилиндрических оболочек, ослабленных прямоугольными в плане вырезами [Текст] / В. Н. Бакулин // Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки. - 2024. - Т. 519. - № 1. - С. 47-53.

15. Бате, К. Численные методы анализа и метод конечных элементов [Текст]. / К. Бате, Е. Вилсон. – М.: Книга по требованию, 2012. – 445 с.

16. Бережной, Д. В. Универсальный конечный элемент для расчета многослойных тонкостенных конструкций сложной геометрии [Текст] / Д. В. Бережной, Л. Р. Фахрутдинов, А. К. Габибова// Материалы Десятой Международной конференции «Сеточные методы для краевых задач и приложения». – 2014. - С. 139-147

17. Беляев, Н. М. Соппротивление материалов [Текст] / Н. М. Беляев. – М.: Наука, 1976. – 607 с.

18. Бидерман, В. Л. Механика тонкостенных конструкций: Статика. Изд. 3, стереотип [Текст]. / В. Л. Бидерман. – М.: URRS, 2021. – 496 с.

19. Борисенко, А. И. Векторный анализ и начала тензорного исчисления [Текст] / А. И. Борисенко, И. Е. Тарапов. -3-е изд., перераб. и доп. - М.: Изд-во «Высшая школа», 1966. - 252 с.

20. Векуа, И. Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек [Текст] / И. Н. Векуа. - М.: Наука, 1982. - 288 с.

21. Власов, В. З. Общая теория оболочек и ее приложение в технике [Текст] / В. З. Власов. - М.: Гостехиздат, 1949. - 784 с.

22. Вольмир, А. С. Гибкие пластинки и оболочки [Текст] / А. С. Вольмир. – М.: Гостехиздат, 1956. - 420 с.

23. Галлагер, Р. Метод конечных элементов. Основы [Текст] / Р. Галагер. – М.: Мир, 1984. – 428 с.

24. Галимов, К. З. Основы нелинейной теории тонких оболочек [Текст] / К. З. Галимов // - Казань: Изд. Казан. гос. ун-та, 1975. – 326с.

25. Галишникова, В. В. Об особенностях использования коротационного балочного элемента для расчета устойчивости рам при больших перемещениях [Текст] / В. В. Галишникова // Моделирование и механика конструкций – 2015. №1 (1). С. 7-10.

26. Голованов, А. И. Численное моделирование больших деформаций упругопластических тел в терминах логарифмов главных удлинений [Текст] / А. И. Голованов // Вычислительная механика сплошных сред. - 2011. - Т. 4. - № 1. - С. 25-35.

27. Голованов, А. И. Современные конечно-элементные модели и методы исследования тонкостенных конструкций [Текст] / А.И. Голованов, А. В. Песошин, О. Н. Тюленева. – Казань: Изд-во КГУ, 2005. – 442 с.

28. Голованов, А. И. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций [Текст] / А. И. Голованов, О. Н. Тюленева, А. Ф. Шигабутдинов. - М.: Физматлит, - 2006. - 392 с.

29. Голованов, А. И. Численное исследование конечных деформаций гиперупругих тел. IV. Конечноэлементная реализация. Примеры решения задач [Текст] / А. И. Голованов, Ю. Г. Коноплев, Л. У. Султанов // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. - 2010. - Т. 152. - № 4. - С. 115-126.

30. Голованов, А. И. Численное моделирование больших упругопластических деформаций в терминах главных удлинений. II. Физические соотношения, алгоритм расчета [Текст] / А. И. Голованов // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. - 2010. № 3. С. 3-6.

31. Гольденвейзер, А. А. Теория упругих тонких оболочек [Текст] / А. А. Гольденвейзер. – М.: Наука, 1976. – 512 с.

32. Григолюк, Э. Н. Нелинейное деформирование тонкостенных конструкций [Текст] / Э. Н. Григолюк, В. И. Мамай. – М.: Наука, 1997. – 272 с.

33. Григоренко, Я. М. К расчету оболочечных конструкций методом конечного элемента [Текст] / Я. М. Григоренко, С. С. Кокошин // Прикладная механика. – 1979. – Т. 15. - № 7. – С. 3-10.

34. Губайдуллин, Д. А. Моделирование пластинок из бимодульного материала с учетом упругопластических деформаций [Электронный ресурс] / Д. А. Губайдуллин, А. В. Крысько, А. Д. Тебякин, Т. В. Яковлева, В. А. Крысько // Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки. - 2024. - Т. 518. - № 1. - С. 43-50. – URL: <https://doi.org/10.31857/S2686740024050073>.

35. Гуреева, Н. А. Определяющие соотношения для нелинейно упругих тел и их реализация в расчете осесимметрично нагруженных оболочек вращения на основе смешанного МКЭ [Текст] / Н. А. Гуреева, Ю. В. Клочков, А. П. Николаев // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. - 2015. – Т. 157. - № 2. - С. 28-39.

36. Гуреева, Н. А. Напряженно-деформированное состояние оболочки вращения при использовании различных формулировок трехмерных конечных элементов [Текст] / Н. А. Гуреева, Ю. В. Клочков, А. П. Николаев, В. Н. Юшкин // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. - 2020. – Т. 16. - № 5. - С. 361-379.

37. Гуреева, Н. А. Объемный элемент с векторной аппроксимацией искомых величин для нелинейного расчета оболочки вращения [Текст] / Н. А. Гуреева, Р. З. Киселёва, А. П. Киселев, А. П. Николаев, Ю. В. Клочков // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. - 2022. – Т. 18. - № 3. - С. 228-241.

38. Деклу, Ж. Метод конечных элементов [Текст] / Ж. Деклу. – М.: Мир, 1976. – 96 с.

39. Джабраилов, А. Ш. Конечно-элементный алгоритм расчета эллипсоидальной оболочки при учете смещения как жесткого целого [Текст] / А. Ш. Джабраилов, А. П. Николаев, Ю. В. Клочков, Н. А. Гуреева, Т. Р. Ищанов // Прикладная математика и механика. – 2022. - Т. 86. - № 2. - С. 251-262.

40. Джабраилов, А. Ш. Учет смещения как твердого тела в алгоритме МКЭ при расчете оболочек вращения [Текст] / А. Ш. Джабраилов, А. П. Николаев, Ю. В. Ключков, Н. А. Гуреева // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2023 - № 6. - С. 23-38.

41. Железнов, Л. П. Нелинейное деформирование и устойчивость дискретно подкрепленных эллиптических цилиндрических оболочек при поперечном изгибе и внутреннем давлении [Текст] / Л. П. Железнов, В. В. Кабанов, Д. В. Бойко // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника.-2014.-№ 2.-С. 8-13.

42. Железнов, Л. П. Нелинейное деформирование и устойчивость дискретно подкрепленных эллиптических цилиндрических композитных оболочек при кручении и внутреннем давлении [Текст] / Л. П. Железнов, В. В. Кабанов, Д. В. Бойко // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. - 2018. - № 2. - С. 27-34.

43. Железнов, Л. П. Исследование нелинейного деформирования и устойчивости композитной оболочки при чистом изгибе и внутреннем давлении [Текст] / Л. П. Железнов, А. Н. Серьезнов // Прикладная механика и техническая физика. – 2022. - Т. 63. - № 2 (372).- С. 207-216.

44. Железнов, Л. П. Нелинейное деформирование и устойчивость композитной цилиндрической оболочки при комбинированном нагружении крутящим и изгибающим моментами [Текст] / Л. П. Железнов // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. - 2022. - № 4. - С. 44-50.

45. Железнов, Л. П. Исследование нелинейного деформирования и устойчивости композитной цилиндрической оболочки при комбинированном нагружении крутящим моментом, краевой поперечной силой и внутренним давлением [Текст] / Л. П. Железнов // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. - 2023. - № 10 (763). - С. 114-125.

46. Железнов, Л. П. Исследование нелинейного деформирования и устойчивости композитной цилиндрической оболочки при комбинированном нагружении крутящим и изгибающим моментами и внутренним давлением

[Текст] / Л. П. Железнов // Прикладная механика и техническая физика. – 2023. – Т. 64. – № 2 (378). – С. 182-192.

47. Железнов, Л. П. Нелинейное деформирование и устойчивость анизотропных круговых цилиндрических оболочек при чистом изгибе и внутреннем давлении [Текст] / Л. П. Железнов // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. – 2024. – № 1. – С. 3-15.

48. Железнов, Л. П. Исследование нелинейного деформирования и устойчивости композитной некруговой цилиндрической оболочки при нагружении изгибающим моментом [Текст] / Л. П. Железнов // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. – 2024. – № 6 (771). – С. 108-116.

49. Железнов, Л. П. Устойчивости некруговой композитной цилиндрической оболочки при внешнем давлении [Текст] / Л. П. Железнов // Вестник Московского авиационного института. – 2024. – Т. 31. – № 2. – С. 75-84.

50. Железнов, Л. П. Устойчивость некруговой композитной оболочки при осевом сжатии в условиях нелинейного деформирования [Текст] / Л. П. Железнов // Прикладная механика и техническая физика. – 2025. – № 1 (389). – С. 153-162.

51. Зенкевич, О. С. Метод конечных элементов в технике [Текст] / О. М. Зенкевич. – М.: Мир, 1975. – 542 с.

52. Иванов, В. Н. Сравнительный анализ параметров напряженно-деформированного состояния торса с направляющим эллипсом с помощью трех методов расчета [Электронный ресурс] / В. Н. Иванов, О. О. Алешина // Строительная механика и расчет сооружений. – 2020. – № 3(290). – С. 37-46. – URL: <https://doi.org/10.37538/0039-2383.2020.3.37.46>.

53. Игнатъев, В. А. Расчет стержневых пластинок и оболочек. Метод дискретных конечных элементов [Текст] / В. А. Игнатъев. – Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1988. – 160 с.

54. Игнатъев, В. А. Метод конечных элементов в форме классического смешанного метода строительной механики (теория, математические модели и

алгоритмы) [Текст] / В. А. Игнатъев, А. В. Игнатъев. – Москва: ООО "Издательство АСВ", 2022. – 306 с. – ISBN 978-5-4323-0431-5.

55. Игнатъев, А. В. Алгоритм редуцирования систем уравнений МКЭ высоких порядков с использованием полиномиальной интерполяции основных смешанных неизвестных [Электронный ресурс] / А. В. Игнатъев, И. С. Завьялов, М. И. Бочков // Известия высших учебных заведений. Строительство. – 2024. – № 7(787). – С. 5-18. – URL: <https://doi.org/10.32683/0536-1052-2024-787-7-5-18>.

56. Игнатъев, А. В. Расчет изгибаемых пластин, имеющих отверстия, с использованием полиномиальной интерполяции основных смешанных неизвестных [Электронный ресурс] / А. В. Игнатъев, И. С. Завьялов, М. И. Бочков // Строительная механика и расчет сооружений. – 2024. – № 4(315). – С. 11-19. – URL: <https://doi.org/10.37538/0039-2383.2024.4.11.19>.

57. Кантин, Г. Смещение криволинейных элементов как жесткого целого [Текст] / Г. Кантин // Ракетная техника и космонавтика. – 1970. - № 7. – С. 84-88.

58. Кантин, Г. Искривленный дискретный элемент цилиндрической оболочки [Текст] / Г. Кантин, Р. Клауф // Ракетная техника и космонавтика. – 1968. - № 6. – С. 82-87.

59. Карпов, В. В. Методика расчета сферических куполов на прочность и устойчивость [Электронный ресурс] / В. В. Карпов, А. А. Семенов // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2023. – № 6. – С. 57-67. – URL: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2023.6.06>.

60. Каюмов, Р. А. Большие прогибы, потеря устойчивости и закритическое поведение панелей и арок переменной толщины на упругом основании [Текст] / Р. А. Каюмов // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. - 2024. - № 2. - С. 33-41.

61. Киричевский, Р. В. Влияние аппроксимирующих функций при построении матрицы жесткости конечного элемента на скорость сходимости

метода конечных элементов [Электронный ресурс] / Р. В. Киричевский, А. В. Скринникова // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2019. – № 57. – С. 26-37. – URL: <https://doi.org/10.17223/19988621/57/2>.

62. Клочков, М. Ю. Упругопластическое деформирование тонкостенных конструкций в двумерной постановке на основе смешанного МКЭ [Электронный ресурс] / М. Ю. Клочков, А. П. Николаев, Ю. В. Клочков [и др.] // Проблемы прочности и пластичности. – 2025. – Т. 87, № 1. – С. 113-121. – URL: <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2025-87-1-113-121>.

63. Клочков, М. Ю. Трехпольный МКЭ в расчетах оболочек с вариантами интерполяции искомых величин [Электронный ресурс] / М. Ю. Клочков, В. А. Пшеничкина, А. П. Николаев [и др.] // Прикладная математика и механика. – 2024. – Т. 88, № 5. – С. 797-820. – URL: <https://doi.org/10.31857/S0032823524050109>.

64. Клочков, М. Ю. Использование различных формулировок МКЭ в расчетах тонкостенных конструкций [Электронный ресурс] / М. Ю. Клочков // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2024. – Т. 20, № 6. – С. 526-538. – URL: <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-6-526-538>.

65. Клочков, Ю. В. Совершенствование расчетов тонких оболочек вращения на основе высокоточного треугольного конечного элемента дискретизации с корректирующими множителями Лагранжа [Текст] / Ю. В. Клочков, А. П. Николаев, О. В. Вахнина // Вестник машиностроения. - 2015. - № 2. - С. 33-36.

66. Клочков, Ю. В. Сравнительная оценка скалярной и векторной аппроксимаций искомых неизвестных в МКЭ при расчете произвольных оболочек [Текст] / Ю. В. Клочков, А. П. Николаев, Т. А. Киселева // Проблемы машиностроения и надежности машин. - 2015. - № 2. - С. 69-75.

67. Клочков, Ю. В. Анализ напряженно-деформированного состояния фрагмента фюзеляжа в форме тонкой оболочки с использованием треугольного

конечного элемента с множителями Лагранжа [Текст] / Ю.В. Клочков, А. П. Николаев, О. В. Вахнина, Т. А. Киселева // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. - 2016. - № 3. - С. 20-26.

68. Клочков, Ю. В. Сравнение скалярной и векторной форм метода конечных элементов на примере эллиптического цилиндра [Текст] / Ю. В. Клочков, А. П. Николаев, Т. А. Киселева // Математическое моделирование. - 2016. – Т. 28. - № 1. - С. 65-77.

69. Клочков, Ю. В. Расчет оболочки вращения на основе треугольного конечного элемента с множителями Лагранжа при вариативной аппроксимации перемещений [Текст] / Ю. В. Клочков, А. П. Николаев, О. В. Вахнина // Проблемы машиностроения и надежности машин. - 2016. - № 1. - С. 59-66.

70. Клочков, Ю. В. Сравнительный анализ результатов конечно-элементных расчетов на примере эллипсоидальной оболочки [Текст] / Ю. В. Клочков, А. П. Николаев, Т. А. Киселева, С.С. Марченко // Проблемы машиностроения и надежности машин. - 2016. - № 4. - С. 44-53.

71. Клочков, Ю. В. Конечно-элементный анализ оболочек вращения при использовании высокоточного треугольного элемента дискретизации с корректирующими множителями Лагранжа [Текст] / Ю. В. Клочков, А. П. Николаев, О. В. Вахнина // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. - 2016. - № 5. - С. 59-63.

72. Клочков, Ю. В. Использование множителей Лагранжа в треугольном элементе непологой оболочки при вариативной интерполяции перемещений [Текст] / Ю. В. Клочков, А. П. Николаев, О. В. Вахнина, Т. А. Киселева // Сибирский журнал индустриальной математики. - 2017. – Т. 20. - № 4 (72). - С. 44-54.

73. Клочков, Ю. В. Сравнительный анализ эффективности использования конечных элементов различной мерности при анализе НДС тонких оболочек [Текст] / Ю. В. Клочков, А. П. Николаев, Т. А. Соболевская, М. Ю. Клочков // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. - 2018. – Т. 14. - № 6. - С. 459-466.

74. Клочков, Ю. В. Расчет тонкой оболочки в форме эллипсоида на основе совместного треугольного элемента дискретизации с инвариантной интерполяционной процедурой [Текст] / Ю. В. Клочков, Н. А. Гуреева, О. В. Вахнина, Т. А. Соболевская, М. Ю. Клочков // Проблемы машиностроения и надежности машин. - 2022. - № 3. - С. 29-44.

75. Клочков, Ю.В. Конечно-элементный расчет эллиптического цилиндра в геометрически нелинейной постановке при использовании векторной формы интерполяционной процедуры [Текст] / Ю.В. Клочков, А.Ш. Джабраилов, Т.Р. Ищанов, С.С. Марченко, А.С.Андреев, М.Ю. Клочков // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. - 2022. - № 1. - С. 58-71.

76. Клочков, Ю. В. Вариативная параметризация эллипсоидальной тонкой оболочки с реализацией на основе МКЭ [Текст] / Ю. В. Клочков, А. П. Николаев, О. В. Вахнина, Т. А. Соболевская, А. Ш. Джабраилов, М. Ю. Клочков // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2023 – Т. 165. - № 1. - С. 49-67.

77. Клочков, Ю. В. Четырехугольный конечный элемент в смешанной формулировке МКЭ для расчета тонких оболочек вращения [Текст] / Ю. В. Клочков, В. А. Пшеничкина, А. П. Николаев, О. В. Вахнина, М. Ю. Клочков // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. - 2023. - № 1. - С. 64-72.

78. Козлов, В. А. Экспериментальное исследование конических некруговых жёстко защемлённых стержней [Текст] / В.А. Козлов // Строительная механика и конструкции. - 2018. - Т. 4. - № 19. - С. 58-63.

79. Козлов, В. А. Напряженно-деформированное состояние элементов мостовых конструкций с переменной толщиной стенок вдоль длины [Текст] / В. А. Козлов // Научный журнал строительства и архитектуры. - 2017. - № 4 - (48). - С. 71-82.

80. Корнишин, М. С. Нелинейные задачи теории пластин и пологих оболочек и методы их решения [Текст] / М. С. Корнишин. – М.: Наука, 1964. – 192 с.

81. Косицын, С. Б. Численный анализ НДС ортогонально пересекающихся цилиндрических оболочек, взаимодействующих с основанием, с учетом изменения расчетной модели во времени [Электронный ресурс] / С. Б. Косицын, В. Ю. Акулич // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2024. – Т. 20, № 4. – С. 303-310. – URL: <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-4-303-310>.

82. Крысько, В. А. Нелинейная статика и динамика неоднородных оболочек [Текст] / В. А. Крысько. – Саратов: Изд. Саратовск. гос. ун-та, 1976. – 213 с.

83. Малинин, Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести [Текст] / Н. Н. Малинин. -2-е изд., испр. и доп. – М.: Машиностроения, 1975. – 400 с.

84. Мануйлов, Г. А. Геометрически нелинейный расчет на устойчивость подкрепленной пластины с учетом взаимодействия собственных форм выпучивания [Электронный ресурс] / Г. А. Мануйлов, С. Б. Косицын, И. Е. Грудцына // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2021. – Т. 17, № 1. – С. 3-18. – URL: <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-1-3-18>.

85. Матвеев, А. Д. Построение многосеточных конечных элементов для расчета оболочек, пластин и балок на основе образующих конечных элементов [Электронный ресурс] / А. Д. Матвеев // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2019. – № 3. – С. 48-57. – URL: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2019.3.05>.

86. Митенков, Ф. М. Нелинейная статика и динамика неоднородных оболочек [Текст] / Ф. М. Митенков, И. А. Волков, Л. А. Игумнов, А. В. Каплиенко, Ю. Г. Коротких, В. А. Панов. – М.: Физматлит, 2015. – 282 с.

87.Немировский, Ю. В. Предельное состояние круглых и кольцевых пластин из разносопротивляющихся материалов [Текст] / Ю. В. Немировский // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. - 2018. - № 1 (35). - С. 3-11.

88.Немировский, Ю. В. Предельное состояние балок на упругом основании [Текст] / Ю. В. Немировский // Известия высших учебных заведений. Строительство.- 2017. -№ 2 (698). -С. 21-28.

89. Новожилов, В. В. Теория тонких оболочек [Текст] / В. В. Новожилов. СПб.: С.-Петербург. ун-та, - 2010. - 380 с.

90. Новожилов, В. В. Основы нелинейной теории упругости [Текст] / В.В. Новожилов. - М.: Едиториал УРСС, 2003. - 214 с.

91. Огибалов, П. М. Оболочки и пластины [Текст] / П. М. Огибалов, М. А.. Колтунов.– М.: Изд-во МГУ, 1969. – 695 с.

92. Оден, Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред: перев. с англ. [Текст] / Дж. Оден. – М.: Мир, 1976. - 464 с.

93. Паймушин, В. Н. Комплексные собственные частоты колебаний и демпфирующие свойства удлиненной пластины с интегральным демпфирующим покрытием [Электронный ресурс] / В. Н. Паймушин, В. А. Фирсов, В. М. Шишкин // Прикладная механика и техническая физика. – 2020. – Т. 61, № 4(362). – С. 114-127. – URL: <https://doi.org/10.15372/PMTF20200414>.

94. Паймушин, В. Н. О специфике работы композитного несущего слоя трехслойной пластины при локальном нагружении [Электронный ресурс] / В. Н. Паймушин, Р. А. Каюмов, Ф. Р. Шакирзянов, С. А. Холмогоров // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2020. – № 4. – С. 152-164. – URL: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2020.4.13>.

95. Петров, В. В. Нелинейная инкрементальная строительная механика [Текст] / В. В. Петров. – М.: Инфра-Инженерия, 2014. - 480 с.

96. Петров, В. В. Модифицированный метод последовательных нагружений в нелинейной строительной механике [Текст] / В. В. Петров, Р. В.

Мищенко, О. А. Горбачева // Фундаментальные, поисковые и прикладные исследования РААСН по научному обеспечению развития архитектуры, градостроительства и строительной отрасли Российской Федерации в 2021 году: Сборник научных трудов РААСН / Российская академия архитектуры и строительных наук. Том 2. – М.: Издательство АСВ, 2022. – С. 339-349.

97. Пикуль, В. В. Механика оболочек [Текст] / В. В. Пикуль. – Владивосток: Дальнаука, 2009. – 536 с.

98. Постнов, В. А. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций [Текст] / В. А. Постнов, И. Я. Хархурим. – Л.: Судостроение, 1974. – 344 с.

99. Постнов, В. А. Численные методы расчета судовых конструкций [Текст] / В. А. Постнов. – Л.: Судостроение, 1977. – 280 с.

100. Постнов, В. А. Учет физической и геометрической нелинейности в задачах изгиба оболочек вращения [Текст] / В. А. Постнов, М. Г. Слезина // Изв. АН СССР, МТТ. – 1979. - № 6. – С. 78-85.

101. Рикардс, Р. Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин [Текст] / Р. Б. Рикардс. – Рига: Зинатне, 1988. – 248 с.

102. Розин, Л. А. Расчет гидротехнических сооружений на ЭЦВМ: метод конечных элементов [Текст] / Л. А. Розин. – М.: Энергия, 1971. – 214 с.

103. Сахаров, А. С. Метод конечных элементов в механике твердых тел [Текст] / А. С. Сахаров, В. Н. Кислокий, В. В. Киричевский и др. // – Киев: Вища школа; Лейпциг: ФЭБ Фахбухферпаг, 1982. – 479 с.

104. Сидоров, В. Н. Численное моделирование колебаний композитных рамных конструкций с учетом демпфирования, нелокального во времени [Текст] / В. Н. Сидоров, Е. С. Бадьина, Е. П. Детина // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2022. – Т. 28, № 4. – С. 543-552.

105. Седов, Л.И. Механика сплошной среды [Текст] / Л.И. Седов – М.: Наука, 1976. – Т. 1. – 536 с.; 1976. – Т. 2. – 574 с.

106. Секулович, М. Метод конечных элементов [Текст] / М. Секулович // Пер. с серб. Ю.Н. Зуева; Под ред. В.Ш. Барбакадзе. – М.: Стройиздат, 1993.– 664 С.

107. Серазутдинов, М. Н. Расчет стержневых конструкций из упрочняющихся и идеально упругопластических материалов [Текст] / М. Н. Серазутдинов, М. Н. Убайдуллоев // Известия Казанского государственного архитектурно-строительного университета. 2017. - № 2 (40). - С. 124-130.

108. Скопинский, В. Н. Упругопластическое деформирование сосуда давления с нерадиальным патрубком и определение предельной нагрузки [Текст] / В. Н. Скопинский, Н. А. Берков, Н. А. Столярова // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2018. – № 6. – С. 34-43. – DOI: 10.31857/S023571190002559-5.

109. Станкевич, И. В. Численное решение задачи теории упругости с односторонними связями с использованием метода конечных элементов в смешанной формулировке [Текст] / И. В. Станкевич // Вестник машиностроения. – 2019. – № 2. – С. 3-9.

110. Султанов, Л. У. Исследование конечных упругопластических деформаций: алгоритм решения, численные примеры [Текст] / Л. У. Султанов // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2017. – Т. 159. № 4. – С. 509-517.

111. Сьярле, Д. Метод конечных элементов для эллиптических задач [Текст] / Д. Сьярле. – М.: Мир, 1980. - 512 с.

112. Тимошенко, С.П. Пластины и оболочки [Текст] / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер – М.: Либроком, 2009. – 640 с.

113. Тимошенко, С.П. Механика материалов [Текст] / С.П. Тимошенко, Д.М. Гере – М.: Лань, 2002. – 672 с.

114. Хайруллин, Ф. С. Вариационные методы расчета тонкостенных конструкций сложной формы на основе аппроксимирующих функций произвольного порядка с конечными носителями [Текст] / Ф. С. Хайруллин //

Автореф. на соиск. уч. степ. докт. физ.-мат. наук. Казан. гос. ун-т, Казань - 2007. – 31 с.

115. Чекмарев, Д. Т. Об одном способе аппроксимации производных в гексаэдрических 8-узловых конечных элементах [Электронный ресурс] / Д. Т. Чекмарев, Е. Г. Глазова, Я. Абу Даввас // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2024. – № 6. – С. 72-80. – URL: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2024.6.07>.

116. Черных, К. Ф. Общая нелинейная теория упругих оболочек [Монография] / К. Ф. Черных, С. А. Кабриц, Е. И. Михайловский и др. — СПб. : Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2002. — 385 с.

117. Чехов, В. В. Применение неинкрементального подхода для осесимметричного расчета больших деформаций методом конечных элементов в тензорно-матричной форме [Электронный ресурс] / В. В. Чехов // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2024. – № 5. – С. 164-186. – URL: <https://doi.org/10.31857/S1026351924050106>.

118. Шалашилин, В. И. Расчет нелинейного деформирования методом конечных элементов с использованием метода продолжения по наилучшему параметру [Текст] / В. И. Шалашилин, Э. Н. Князев, Н. Н. Зуев // Изв. Вузов. Сер. Машиностроение. – 1997. – №3-1. – С. 23-29.

119. Яковлева, Т. В. Математические модели нелинейной динамики функционально-градиентных нано/микро/макромасштабных пористых замкнутых цилиндрических оболочек Кирхгофа-Лява [Электронный ресурс] / Т. В. Яковлева, В. А. Крысько // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. Науки. – 2024. – Т. 28, № 1. – С. 96-116. – URL: <https://doi.org/10.14498/vsgtu2046>.

120. Якупов, Н. М. Расчет упругих тонкостенных конструкций сложной геометрии [Текст] / Н. М. Якупов, М. Н. Серазутдинов. – Казань: ИМН РАН, 1993. – 206 с.

121. Akimov, P. A. About the National Software System for Structural Analysis [Электронный ресурс] / P. A. Akimov, A. M. Belostotsky, O. V. Kahantsev [et al.] // International Journal for Computational Civil and Structural

Engineering. – 2022. – Vol. 18, No. 1. – P. 151-155. – URL: <https://doi.org/10.22337/2587-9618-2022-18-1-151-155>.

122. Badriev, I. B. Refined Models of Contact Interaction of a Thin Plate with Positioned on Both Sides Deformable Foundations [Text] / I. B. Badriev, V. N. Paimushin // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2017. – 38(5). – Pp. 779-793.

123. Belostotsky, A. Numerical simulation of the stress-strain state of a large-span structure with joints with gap under the seismic loads in a transient dynamic [Электронный ресурс] / A. Belostotsky, A. Pavlov, A. Nagibovich // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2023. – Vol. 19, No. 3. – P. 165-172. – URL: <https://doi.org/10.22337/2587-9618-2023-19-3-165-172>.

124. Bilotta, A, A composite mixed finite element model for the elasto-plastic analysis of 3D structural problems [Электронный ресурс] / A. Bilotta, G. Garcea, and L. Leonetti // Finite Elcm. Anal. Des., 113 – 2016. - P. 43-53. – URL: <https://doi.org/10.1016/j.finel.2016.01.002>.

125. Çalık-Karaköse, Ü. H. Finite element implementation of gradient elasticity theory on thin and thick plates [Электронный ресурс] / Ü. H. Çalık-Karaköse // Acta Mechanica. – 2023. – Vol. 234, No. 2. – P. 511-531. – URL: <https://doi.org/10.1007/s00707-022-03410-4>.

126. CayInk I., Stabilized mixed triangular elements with area bubble functions at small and large deformations, [Электронный ресурс] / Comput. Struct., I. CayInk and R. Mahnken // 138 (1) – 2014. - P. 172-182. – URL: <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2014.01.006>.

127. Carrera, E. Carrera unified formulation (CUF) for shells of revolution. I. Higher-order theory [Электронный ресурс] / E. Carrera, V. V. Zozulya // Acta Mechanica. – 2023. – Vol. 234, No. 1. – P. 109-136. – URL: <https://doi.org/10.1007/s00707-022-03372-7>.

128. Cavalcante E., A pseudo-equilibrium finite element for limit analysis of Reissner-Mindlin plates [Электронный ресурс] / E. Cavalcante, and E.L. Neto // Appl Math Model. 96 - 2021. - P. 336-354– URL: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2021.03.004>.

129. Chi H., A paradigm for higher order polygonal elements in finite elasticity, [Text] / Chi, C. Talischi, O. Lopez-Pamies, G.H. Paulino // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 306 – 2016. - P. 216–251.

130. Daghighi S., Bend-free design of super ellipsoids of revolution composite pressure vessels, [Электронный ресурс] / S. Daghighi, G. Zucco, M. Rouhi, P.M., and Weaver // Compos Struct - 2020. – URL: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.112283>.

131. Klochkov, Yu. Three-field FEM for analysis of thin elastic shells [Электронный ресурс] / Yu. Klochkov, A. Nikolaev, V. Pshenichkina, O. Vakhnina, M. Klochkov // Magazine of Civil Engineering. – 2024. – Vol. 17, No. 3(127). – URL: <https://doi.org/10.34910/MCE.127.10>.

132. Krabbenhoft K., A. V. Lyamin, S W. Sloan, and P. Wriggers, An interior-point algorithm for elastoplasticity [Электронный ресурс] / Int. J. Numer. Methods Eng., 69(3) (2007) 592-626. – URL: <https://doi.org/10.1002/nme.1771>.

133. Krysko, A. V. Nonlinear deformations of size-dependent porous functionally graded plates in a temperature field [Электронный ресурс] / A. V. Krysko, D. A. Gubaidullin, L. A. Kalutsky, V. A. Krysko // International Journal of Solids and Structures. – 2024. – Vol. 293. – P. 112759. – URL: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2024.112759>.

134. Krysko-Jr, V. A. Mathematical model of physically non-linear Kirchhoff plates: Investigation and analysis of effective computational iterative methods [Электронный ресурс] / V. A. Krysko-Jr, A. D. Tebyakin, M. V. Zhigalov [et al.] // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2023. – Vol. 150. – P. 104346. – URL: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2022.104346>.

135. Krysl, P. Mean-strain 8-node hexahedron with optimized energy-sampling stabilization [Text] / P. Krysl // Finite Elements in Analysis and Design. – 2016.– Vol. 108. – Pp. 41-53,

136. Kryvenko, O. P. Modeling of Nonlinear Deformation, Buckling, and Vibration Processes of Elastic Shells in Inhomogeneous Structure [Электронный ресурс] / O. P. Kryvenko, P. P. Lizunov, Yu. V. Vorona, O. B. Kalashnikov //

International Applied Mechanics. – 2024. – Vol. 60, No. 4. – P. 464-478. – URL: <https://doi.org/10.1007/s10778-024-01298-2>.

137. Kulikov, G. M. Exact geometry SaS-based solid-shell element for coupled thermoelectroelastic analysis of smart structures with temperature-dependent material properties [Электронный ресурс] / G. M. Kulikov, S. V. Plotnikova // Acta Mechanica. – 2021. – URL: <https://doi.org/10.1007/s00707-021-03086-2>.

138. Kulikov, G. M. Hybrid-Mixed Quadrilateral Element for Laminated Plates Composed of Functionally Graded Materials [Электронный ресурс] / G. M. Kulikov, E. Carrera, S. V. Plotnikova // Advanced Materials and Technologies. – 2017. – No. 1. – P. 44-55. – URL: <https://doi.org/10.17277/amt.2017.01.pp.044-055>.

139. Lalin, V. V. Application of the finite element method for the solution of stability problems of the Timoshenko beam with exact shape functions [Text] / V. V. Lalin, A. V. Yavarov, E. S. Orlova, A. R. Gulov // Power Technology and Engineering - 2019. - 4 (53). - P. 449-454.

140. Li, Shiqiang. Finite element simulation of metallic cylindrical sandwich shells with graded aluminum tabular cores subjected to internal blast loading [Text] / Li Shiqiang, Lu Guoxing, Wang Zhihua, Zhao Longmao, Wu Guiying. // Int. J. Mech. Sci. - 2015. 96-97, pp. 1-12.

141. Liguori, F. S. A mixed finite-element formulation for the elasto-plastic analysis of shell structures [Электронный ресурс] / F. S. Liguori, A. Madeo, and G. Garcea // Theoretical and Applied Mechanics. 26(2023). - 227-232. – URL: <https://doi.org/10.21741/9781644902431-37>.

142. Liguori, F. S. A corotational mixed flat shell finite element for the efficient geometrically nonlinear analysis of laminated composite structures [Электронный ресурс] / F. S. Liguori, and A. Madeo // Int J Numer Methods Eng. 122(17) – 2021.- 4575-4608. – URL: <https://doi.org/10.1002/nme.6714>.

143. Madeo, A. An efficient isostatic mixed shell element for coarse mesh solution [Электронный ресурс] / A. Madeo, F. S. Liguori , G. Zucco, and S. Fiore // Int J Numer Methods Eng. 122(1) - 2021. - P. 82-121. – URL: <https://doi.org/10.1002/nme.6526>.

144. Magisano, D. How to improve efficiency and robustness of the newton method in geometrically nonlinear structural problem discretized via displacement-based finite elements [Электронный ресурс] / D. Magisano, L. Leonetti, G. Garcea // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering – 2017; 313:986–1005. – URL: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2016.10.023>.

145. Magisano, D. Limit fire analysis of 3D frame structures [Электронный ресурс] / D. Magisano, and G. Garcea // Eng Struct. 233 – 2021. – 111762. – URL: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2020.111762>.

146. Nodargi, N. A. A novel high-performance mixed membrane finite element for the analysis of inelastic structures [Электронный ресурс] / N. A. Nodargi and P. Bisegna // Comput. Struct., 182 (2017) 337-353. – URL: <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2016.10.002>.

147. Nodargi, N. A. A mixed finite element for the nonlinear analysis of in-plane loaded masonry walls [Электронный ресурс] / N. A. Nodargi, and P. Bisegna // Int J Numer Methods Eng. 120(11) – 2019. - 1227-1248. – URL: <https://doi.org/10.1002/nme.6179>.

148. Paimushin, V. N. Free and Forced Bending-Torsional Oscillations of an Anisotropic Elongated Plate Fixed on a Spherical Hinge [Электронный ресурс] / V. N. Paimushin, A. N. Nuriev, M. V. Makarov // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2024. – Vol. 45, No. 2. – P. 750-761. – URL: <https://doi.org/10.1134/S1995080224600420>.

149. Pascon, J. P. Finite Element Analysis of Hyperelastoplastic Mixed-Hardening Materials Under Plane Stresses [Электронный ресурс] / J. P. Pascon // International Applied Mechanics. – 2024. – Vol. 60, No. 1. – P. 101-121. – URL: <https://doi.org/10.1007/s10778-024-01266-w>.

150. Rogovoy, A. A. Mathematical Modeling of Finite Deformations in Shape Memory Materials [Электронный ресурс] / A. A. Rogovoy, O. S. Stolbova // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2021. – Vol. 42, No. 8. – P. 2037-2046. – URL: <https://doi.org/10.1134/S1995080221080278>.

151. Shlyannikov, V. Generalization of crack growth mechanisms under isothermal and thermomechanical fatigue by COD and ERR parameters [Электронный ресурс] / V. Shlyannikov, A. Sulamanidze, D. Kosov // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2024. – Vol. 131. – P. 104392. – URL: <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2024.104392>.

152. Skopinskii, V. N. An approximate method of determining the load of plastic failure in pressure vessels with nozzles [Text] / V. N. Skopinskii, N. A. Berkov // Chemical and Petroleum Engineering. – 2019. – T. 54. – № 11-12. – С. 926-934.

153. Tyukalov, Yu. Ya. Method of Plates Stability Analysis Based on the Moments Approximations [Электронный ресурс] / Yu. Ya. Tyukalov // Magazine of Civil Engineering. - 2020. – No. 3 (95). – P. 90-103. – URL: <https://doi.org/10.18720/MCE.95.9>.

154. Tyukalov, Yu. Ya. Quadrilateral Finite Element for Thin and Thick Plates [Электронный ресурс] / Yu. Ya. Tyukalov // Construction of Unique Buildings and Structures. - 2021. - No. 5 (98). - Pp. 9802. – URL: <https://doi.org/10.4123/CUBS.98.2>.

155. Tyukalov, Yu. Y. Bulk Theory Elasticity Finite Element Based on Piecewise Constant Approximations of Stresses [Электронный ресурс] / Yu. Y. Tyukalov // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2023. - Vol. 19. - No. 1. - P. 168-177. – URL: <https://doi.org/10.22337/2587-9618-2023-19-1-168-177>.

156. Tyukalov, Yu. Triangular Prism Finite Element Based on Piecewise Constant Stress Approximations [Электронный ресурс] / Yu. Tyukalov // Magazine of Civil Engineering. - 2023. - No. 5 (121). - Pp. 12105. — URL: <https://doi.org/10.34910/MCE.121.5>.

157. Xiao B, Construction of generalized shape functions over arbitrary polytopes based on scaled boundary finite element method's solution of Poisson's equation [Электронный ресурс] / B Xiao, S Natarajan, C Birk, EH Ooi, C Song, ET Ooi// Int J Numer Methods Eng – 2023. - V. 124. - P. 3603-3636. – URL: <https://doi.org/10.1002/nme.7287>.

158. Yakupov, N. M. Calculation of the Fragments Toroidal Shell With Local Internal Deepening [Электронный ресурс] / N. M. Yakupov, H. G. Kiyamov, I.Z. Mukhamedova // Lobachevskii Journal of Mathematics. - 2021. - Vol. 42. - No. 9. - P. 2257-2262. – URL: <https://doi.org/10.1134/S1995080221090304>.

159. Yakupov, S. N. Modeling a Synthesized Element of Complex Geometry Based Upon Three-Dimensional and Two-Dimensional Finite Elements [Электронный ресурс] / S. N. Yakupov, H. G. Kiyamov, N. M. Yakupov // Lobachevskii Journal of Mathematics. - 2021. - Vol. 42. - No. 9. - P. 2263-2271. – URL: <https://doi.org/10.1134/S1995080221090316>.

160. Yakupov, N. M. Calculation of Two-Layer Cylindrical Shells Based on the Spline Variant of the Finite Element Method [Электронный ресурс] / N. M. Yakupov, H. G. Kiyamov, I. Z. Mukhamedova // Lobachevskii Journal of Mathematics. - 2023. - Vol. 44. - No. 5. - P. 1813-1819. – URL: <https://doi.org/10.1134/S1995080223050566>.

161. Yakupov, S. N. To the Calculation of Reinforced Structural Elements of Complex Geometry [Электронный ресурс] / S. N. Yakupov, H. G. Kiyamov, N. M. Yakupov // Lobachevskii Journal of Mathematics. - 2023. - Vol. 44. - No. 5. - P. 1820-1825. – URL: <https://doi.org/10.1134/S1995080223050578>.

162. Zhao M. Ju. Development of new thermoelastic Petrov–Galerkin finite elements with enhanced precision and distortion tolerance [Электронный ресурс] / M. Ju. Zhao, S. Cen, Ya. Shang, Ch. F. Li // Acta Mechanica. – 2025. – Vol. 236, No. 3. – P. 2233-2268. – URL: <https://doi.org/10.1007/s00707-025-04260-6>.

163. Zienkiewicz, O. C. The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics [Text] / O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor. - Oxford: Elsevier, 2005.-648 p.

Приложение А. Свидетельства о регистрации программ для ЭВМ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2023611748

**Программа дискретизации тонкой оболочки в форме
эллипсоида вращения четырехузловыми элементами
дискретизации с силовыми и кинематическими
узловыми неизвестными**

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Волгоградский государственный технический
университет» (RU)*

Авторы: *Клочков Михаил Юрьевич (RU), Пшеничкина Валерия
Александровна (RU)*



Заявка № 2023610902

Дата поступления 24 января 2023 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 24 января 2023 г.

*Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
Сертификат 68b80077e14c40f0a94e0bd24145d5c7
Владелец **Зубов Юрий Сергеевич**
Действителен с 20.03.2022 по 26.05.2023

Ю.С. Зубов

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2023611750

**Программа формирования матрицы податливости
четырехузлового элемента дискретизации в виде фрагмента
срединной поверхности эллипсоида вращения с искомыми
неизвестными в виде продольных сил, моментов и
перемещений**

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Волгоградский государственный технический университет»
(RU)*

Авторы: *Клочков Михаил Юрьевич (RU), Пшеничкина Валерия
Александровна (RU)*



Заявка № 2023610910

Дата поступления 24 января 2023 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 24 января 2023 г.

*Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
Сертификат 68b80077e14e40f0a94e6bd24145d5c7
Владелец: **Зубов Юрий Сергеевич**
Действителен с 2.03.2022 по 26.05.2023

Ю.С. Зубов

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2023611751

**Программа вычислений напряжений в узловых точках
эллипсоида вращения на внешней, внутренней и
срединной поверхностях эллипсоида**

Правообладатель: **Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Волгоградский государственный технический
университет» (RU)**

Авторы: **Клочков Михаил Юрьевич (RU), Пиеничкина
Валерия Александровна (RU)**



Заявка № 2023610912

Дата поступления 24 января 2023 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 24 января 2023 г.

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
Сертификат 68b80077e14e40f0a94e6bd24145d5c7
Владелец: **Зубов Юрий Сергеевич**
Действителен с 2.03.2022 по 26.05.2023

Ю.С. Зубов

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2023667609

**Программа формирования матрицы податливости
четырёхузлового конечного элемента в виде фрагмента
эллиптического цилиндра при интерполяции компонент
тензора деформаций и вектора перемещений как скалярных
величин**

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Волгоградский государственный технический университет»
(RU)*

Авторы: *Клочков Михаил Юрьевич (RU), Пшеничкина Валерия
Александровна (RU)*



Заявка № 2023667040

Дата поступления 16 августа 2023 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 16 августа 2023 г.

*Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
Сертификат 429b6a0fe3953164baf96f83b73b4aa7
Владелец **Зубов Юрий Сергеевич**
Действителен с 10.05.2023 по 02.06.2024

Ю.С. Зубов

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2023667614

**Программа формирования матрицы податливости
четырехугольного конечного элемента в виде фрагмента
эллиптического цилиндра при тензорно-векторной
интерполяции искомых величин**

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Волгоградский государственный технический
университет» (RU)*

Авторы: *Клочков Михаил Юрьевич (RU), Пиеничкина Валерия
Александровна (RU)*

Заявка № 2023667043

Дата поступления 16 августа 2023 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 16 августа 2023 г.



*Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
Сертификат 429b6a0fe3953164baf96f83b73b4aa7
Владелец **Зубов Юрий Сергеевич**
Действителен с 10.05.2023 по 02.06.2024

Ю.С. Зубов

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2023667615

Программа вычислений напряжений, усилий и моментов в узловых точках эллиптического цилиндра

Правообладатель: **Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Волгоградский государственный технический университет» (RU)**

Авторы: **Клочков Михаил Юрьевич (RU), Пшеничкина Валерия Александровна (RU)**

Заявка № 2023667044

Дата поступления 16 августа 2023 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 16 августа 2023 г.



Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
Сертификат 429b6a0fe3953164baf96f83b73b4aa7
Владелец **Зубов Юрий Сергеевич**
Действителен с 10.05.2023 по 02.06.2024

Ю.С. Зубов

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2024680111

**Программа формирования матрицы жесткости
четырёхузлового конечного элемента при реализации
трехпольного варианта МКЭ с интерполяцией компонент
тензоров усилий, моментов, деформаций и вектора
перемещений как скалярных величин.**

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Волгоградский государственный технический университет»
(RU)*

Авторы: *Клочков Михаил Юрьевич (RU), Пшеничкина Валерия
Александровна (RU)*

Заявка № 2024669664

Дата поступления 26 августа 2024 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 26 августа 2024 г.



*Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
Сертификат 0692e7e1a63005f54f240f670bca2026
Владелец **Зубов Юрий Сергеевич**
Действителен с 10.07.2024 по 03.10.2025

Ю.С. Зубов

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2024680112

**Программа формирования матрицы жесткости
четырёхугольного конечного элемента при реализации
трехпольного варианта МКЭ с тензорно-векторной
формой интерполяции искомых величин.**

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Волгоградский государственный технический
университет» (RU)*

Авторы: *Клочков Михаил Юрьевич (RU), Пиеничкина Валерия
Александровна (RU)*

Заявка № 2024669669

Дата поступления 26 августа 2024 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 26 августа 2024 г.



*Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
Сертификат 0692e7e1a63005f54f240f670bca2026
Владелец **Зубов Юрий Сергеевич**
Действителен с 10.07.2024 по 03.10.2025

Ю.С. Зубов

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2024680113

**Программа вычислений усилий и моментов,
деформаций и напряжений в узловых точках
оболочечной конструкции при реализации трехпольного
варианта МКЭ**

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Волгоградский государственный технический
университет» (RU)*

Авторы: *Клочков Михаил Юрьевич (RU), Пиеничкина Валерия
Александровна (RU)*



Заявка № 2024669672

Дата поступления 26 августа 2024 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 26 августа 2024 г.

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
Сертификат 0692e7e1a63005f54f240f670bca2026
Владелец **Зубов Юрий Сергеевич**
Действителен с 10.07.2024 по 03.10.2025

Ю.С. Зубов