

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Волгоградский государственный технический университет»

На правах рукописи



Завьялов Иван Сергеевич

**СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ РЕДУКЦИОННЫХ
АЛГОРИТМОВ РАСЧЕТА ПЛАСТИН ПРИ СТАТИЧЕСКИХ И
ДИНАМИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ С ПОМОЩЬЮ МКЭ В
ФОРМЕ КЛАССИЧЕСКОГО СМЕШАННОГО МЕТОДА**

2.1.9. Строительная механика

Диссертация на соискание ученой степени

кандидата технических наук

Научный руководитель

доктор технических наук, доцент

Игнатьев Александр Владимирович

Волгоград – 2025

Светлой памяти нашего учителя,
Игнатьева Владимира Александровича
посвящается

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	6
ГЛАВА 1. КРАТКИЙ ОБЗОР РАБОТ ПО ТЕОРИИ И МЕТОДАМ РЕШЕНИЯ БОЛЬШИХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПРИ РАСЧЕТЕ ЗДАНИЙ, СООРУЖЕНИЙ И ИХ КОНСТРУКЦИЙ.....	15
1.1 Обзор работ по методам решения задач статики.....	16
1.2 Обзор работ по методам решения задач динамики	22
1.3 Выводы по главе 1.....	26
ГЛАВА 2. АЛГОРИТМЫ РЕДУЦИРОВАНИЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА ОСНОВЕ МКЭ В ФОРМЕ КЛАССИЧЕСКОГО СМЕШАННОГО МЕТОДА	28
2.1 Разрешающая система уравнений МКЭ в форме классического смешанного метода	28
2.2 Базовый алгоритм редуцирования СЛАУ на основе МКЭ в форме классического смешанного метода.....	32
2.3 Частные алгоритмы редуцирования СЛАУ на основе МКЭ в форме классического смешанного метода.....	34
2.4 Примеры расчета пластин при статических нагрузках и анализ эффективности разработанных алгоритмов	39
2.4.1 Граничные условия при расчете пластин	39
2.4.2 Расчёт изгибаемой шарнирно опертой пластины.....	44
2.4.3 Расчёт изгибаемой жестко защемленной пластины	53
2.4.4 Расчет изгибаемой пластины с отверстием.....	63
2.5 Выводы по главе 2.....	73

ГЛАВА 3. КОМПЛЕКСНЫЙ ПОДХОД К РАСЧЕТУ ПЛИТ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ С ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ ЖЕСТКОСТЬЮ	75
3.1 Алгоритм расчета плит на упругом основании с изменяющейся жесткостью на основе МКЭ в форме классического смешанного метода.....	75
3.2 Расчет ростверка с различными вариантами загрузки.....	79
3.2.1 Расчет ростверка, загруженного равномерно распределенной нагрузкой.....	82
3.2.2 Расчет ростверка с нагрузкой от стен	89
3.3 Выводы по главе 3.....	97
ГЛАВА 4. АЛГОРИТМЫ РЕДУЦИРОВАНИЯ СИСТЕМЫ ЧАСТОТНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ОСНОВЕ МКЭ В ФОРМЕ КЛАССИЧЕСКОГО СМЕШАННОГО МЕТОДА	99
4.1 Построение динамической матрицы масс	99
4.2 Модификация алгоритма редуцирования системы частотных уравнений МКЭ в форме классического смешанного метода с использованием интерполяции основных неизвестных.....	100
4.2.1 Алгоритм редуцирования системы частотных уравнений МКЭ в форме классического смешанного метода с использованием интерполяции основных неизвестных.....	100
4.2.2 Процедура редуцирования матрицы масс	102
4.2.3 Частные алгоритмы редуцирования системы частотных уравнений с использованием интерполяции основных неизвестных.....	104
4.3 Комбинированные алгоритмы редуцирования частотных уравнений МКЭ в форме классического смешанного метода с использованием интерполяции основных неизвестных и конденсационных методов	106

4.3.1 Комбинированный алгоритм редуцирования системы частотных уравнений на основе интерполяции основных неизвестных и статической конденсации.....	106
4.3.2 Комбинированный алгоритм редуцирования системы частотных уравнений на основе интерполяции основных неизвестных и частотно-динамической конденсации.	109
4.3.3. Комбинированный алгоритм редуцирования системы частотных уравнений на основе интерполяции основных неизвестных и последовательной частотно-динамической конденсации.....	111
4.4 Анализ результатов динамического расчета пластины с применением разработанных алгоритмов	113
4.4.1 Расчет шарнирно опертой по контуру пластины.....	113
4.4.2 Расчет жестко заземленной по контуру пластины.....	132
4.4.3 Расчет пластины на упруго-податливых опорах	140
4.5 Выводы по главе 4.....	143
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	144
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	146
Приложение А. Свидетельства о регистрации программ для ЭВМ	161
Приложение Б. Акт о внедрении результатов диссертационной работы.....	164

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. Расчет конструкций современных зданий и сооружений с использованием метода конечных элементов (МКЭ) неизбежно требует решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). В последнее время наблюдается устойчивая тенденция к увеличению количества неизвестных в расчетных моделях МКЭ. Это ведет к росту размерности систем уравнений и, как следствие, к ресурсоемким вычислениям, что требует применения специализированных алгоритмов и высокопроизводительных вычислительных систем.

Сложность решения задач усугубляется тем, что матрицы коэффициентов часто сильно разрежены. Это вызвано наличием конечных элементов с различной жесткостью, стыковкой различных типов элементов и другими факторами. В условиях плохо обусловленных систем традиционные методы решения СЛАУ оказываются крайне неэффективными, что может привести к медленной сходимости решения и значительно увеличить время расчета, делая его непрактичным.

Важно также отметить, что в рамках одного проекта задачи могут решаться многократно. Например, это может касаться оценки прочности конструкции под разными нагрузками, анализа поведения конструкции при изменении геометрических параметров или динамических нагрузок и т.д.

Следует также отметить, что решение задач динамики конструкций также связано со значительным возрастанием вычислительной сложности. Исследование динамических характеристик конструкций требует применения адекватного математического аппарата, в частности, эффективных алгоритмов решения задачи на собственные значения (СЗ) и соответствующие им собственные вектора (СВ).

Традиционные методы решения СЛАУ в таких случаях оказываются неэффективными. Поэтому существует острая необходимость разработки и

внедрения в расчетные программные комплексы высокоэффективных алгоритмов решения систем уравнений МКЭ высоких порядков.

Степень разработанности проблемы. Вопросами разработки методов решения больших размерных задач, возникающих при моделировании зданий и сооружений, занимались многие отечественные и зарубежные исследователи. К настоящему времени наметились и используются несколько групп решений или обхода данной проблемы.

В развитие методов, связанных с непосредственным решением больших СЛАУ, которые включают в себя различные варианты упорядочения и преобразования матрицы коэффициентов, а также использование итерационных процедур, большой вклад внесли С.Ю. Фиалко, Д.К. Фаддеев, В.Н. Фаддеева, Г.И. Марчук, А.А. Самарский, А.Б. Золотов, В.В. Фрадкин, Benzi M., Tuma M., Scott J., Chen Q.

Разработке физических моделей сложных конструкций с поэтапным переходом от простой модели к более сложной посвящены работы таких авторов, как И.С. Пржеминский, Г. Крон, Н.Н. Шапошников, В.А. Постнов, И.Я. Хархурим, В.А. Игнатьев, О.М. Игнатьева, А.И. Сапожников, Ю.И. Немчинов, Л.А. Розин, Г.И. Пшеничнов.

При решении проблемы СЗ традиционные итерационные методы оказываются неэффективными. Одним из способов решения данной проблемы является использование редуционных и конденсационных методов.

Анализ методов и алгоритмов решения задачи определения СЗ и СВ изложены в работах Зу-Квинг-Ку (Zu-Qing Qu), Дж. Х. Уилкинсона и А. Ф. Бертолини.

В работах К. Бате, Е. Вилсон, А. Дженнингс предложена идея о разделении всех алгоритмов решения проблемы собственных значений на четыре большие группы:

- метод обратных итераций;
- методы преобразования исходных матриц, основанные на свойстве ортогональности векторов;

- методы, использующие свойство последовательности Штурма обобщённой собственной проблемы;
- методы вычисления собственных значений с помощью характеристических полиномов.

Помимо этих применяются методы приведения исходной задачи высокого порядка к задаче существенно меньшей размерности (методы редукции). Среди наиболее значимых публикаций, посвященных этой теме, следует отметить работы С.Я. Землянухина, Я.Л. Нудельмана, Л.С. Ляховича, Р.Р. Матевосяна, Р. Гайана, В.И. Ивантеева, В.Д. Чубаня, Н.И. Гриненко, В.В. Мокеева, С.Ю. Фиалко.

Игнатьевым В.А. и Игнатьевой О.М. был разработан оптимизированный алгоритм частотно-динамической конденсации. Предлагаемый метод предполагает редукцию размерности системы посредством последовательного исключения вспомогательных степеней свободы, основываясь на определенных собственных значениях отдельных парциальных систем. Этот метод получил дальнейшее развитие в работах В.А. Игнатьева и А.В. Игнатьева.

В работе П.А. Акимова и М.Л. Мозгалевой проведен обзор современных методов решения СЛАУ, возникающих при решении задач строительной механики с применением МКЭ. Следует отметить, что этот обзор преимущественно посвящен анализу методов формирования и решения СЛАУ, возникающих при использовании МКЭ в форме метода перемещений.

При этом методы формирования и решения СЛАУ, связанные с применением смешанных и гибридных формулировок, до сих пор остаются мало изученными в рамках современной строительной механики. Учитывая растущий интерес к использованию смешанных и гибридных формулировок МКЭ, разработка алгоритмов редуцирования систем уравнений МКЭ высокого порядка, получаемых с использованием таких вариантов МКЭ при моделировании сложных конструкций, является актуальной проблемой.

Целью диссертационной работы является разработка и совершенствование алгоритмов редуцирования СЛАУ высокого порядка,

получаемых при расчете пластин на статическое и динамическое воздействие с использованием МКЭ в форме классического смешанного метода.

Задачи исследования:

1. Разработка базового алгоритма редукции СЛАУ, получаемых на основе МКЭ в форме классического смешанного метода (КСМ) при расчете пластин на статическое и динамическое воздействие.

2. Разработка специализированных и комбинированных алгоритмов редукции СЛАУ, получаемых на основе МКЭ в форме КСМ при расчете пластин на статическое и динамическое воздействие.

3. Разработка комплексного подхода к расчету плит на упругом основании с изменяющейся жесткостью, находящихся под статическими нагрузками, основанного на редукции основных неизвестных и методе компенсирующих нагрузок.

4. Анализ эффективности разработанных алгоритмов по сравнению с алгоритмами, реализующими подходы и методы других исследователей.

Методология и методы исследования

В диссертации использовались теория и основанные на ней методы строительной механики, общепринятые в ней гипотезы и допущения, методы линейной алгебры, результаты исследований по формированию и решению СЛАУ высокого порядка, а также результаты изучения методов решения алгебраической проблемы СЗ для таких СЛАУ. Вычисления производились с использованием современных ПЭВМ, пакета прикладных математических программ SciLab, и математических библиотек языка Python. Выполнялось сравнение результатов с решением в ПК ЛИРА.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Базовый алгоритм редукции СЛАУ, получаемых на основе МКЭ в форме КСМ при расчете пластин на статическое и динамическое воздействие, являющийся общей платформой для реализации специализированных частных алгоритмов расчета для каждого из видов нагрузок.

2. Специализированные частные и комплексные алгоритмы редукции СЛАУ, получаемых на основе МКЭ в форме КСМ при расчете пластин на статическое и динамическое воздействие.

3. Комплексный подход к расчету плит на упругом основании с изменяющейся жесткостью, находящихся под статическими нагрузками, основанного на редукции основных неизвестных и методе компенсирующих нагрузок.

4. Результаты сопоставительного анализа эффективности разработанных алгоритмов в сравнении с алгоритмами расчета пластин на статическое и динамическое воздействие, основанными на других подходах и методах.

Научная новизна полученных в диссертации результатов заключается в следующем:

1. Разработан и впервые предложен базовый алгоритм редуцирования СЛАУ, получаемых на основе МКЭ в форме КСМ при расчете пластин на статическое и динамическое воздействие, в основе которого лежит идея интерполяции основных неизвестных.

2. На основе базового алгоритма разработаны специализированные частные алгоритмы редуцирования СЛАУ, получаемых при расчете пластин на статическое и динамическое воздействие на основе МКЭ в форме КСМ, в которых для интерполяции основных неизвестных используется билинейная интерполяция, или используется неполный бикубический полином.

3. Разработаны и впервые предложены комбинированные алгоритмы редуцирования частотных уравнений, сочетающие в себе преимущества алгоритма на основе интерполяции основных неизвестных и методов статической и последовательной частотно-динамической конденсации в форме классического смешанного метода.

4. Впервые на основе МКЭ в форме классического смешанного метода разработан комплексный подход к расчету плит на упругом основании с изменяющейся жесткостью, находящихся под статическими нагрузками,

сочетающий преимущества разработанных редуционных алгоритмов и метода компенсирующих нагрузок.

5. Доказана эффективность впервые разработанных редуционных алгоритмов в расчетах изгибаемых пластин при статических и динамических нагрузках. Для ряда задач установлены количественные характеристики эффективности, заключающиеся в уменьшении порядка решаемой СЛАУ, приводящей к достоверному результату расчета.

Теоретическая значимость работы заключается в разработке и теоретическом обосновании новых алгоритмов редуцирования СЛАУ, получаемых на основе МКЭ в форме классического смешанного метода. Данные алгоритмы расширяют теоретические основы этой формы МКЭ для решения задач, связанных с расчетом пластин под статическими и динамическими нагрузками.

Практическая значимость работы состоит в том, что впервые разработанные в диссертации алгоритмы редуцирования СЛАУ могут быть использованы как для создания новых расчетных программ, так и для расширения уже существующих, реализующих МКЭ в форме КСМ. Разработанные программы могут быть рекомендованы для применения в проектных и научно-исследовательских организациях, а также материалы исследования могут быть включены в учебные пособия и учебники курса строительной механики для студентов и магистрантов по направлению «Строительство».

Соответствие диссертации паспорту научной специальности

Диссертационные исследования соответствуют паспорту специальности 2.1.9. Строительная механика: п. 4 (Численные и численно-аналитические методы расчета зданий, сооружений и их элементов на прочность, жесткость, устойчивость при статических, динамических, температурных нагрузках и других воздействиях).

Достоверность полученных результатов обеспечивается корректным использованием основных гипотез и допущений строительной механики, обоснованных численных методов решения СЛАУ и подтверждается сравнением

результатов решения задач с имеющимися аналитическим решением, принимаемым за точное, а также решениями, полученными другими методами.

Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на конференциях: 5 международная научно-практическая конференция «Актуальные проблемы и перспективы развития строительного комплекса» (Волгоград, 2023); XIII Международный научный форум молодых ученых, студентов и школьников «Потенциал интеллектуально-одаренной молодежи – развитию науки и образования» (Астрахань, 2024); Международная научно-техническая конференция «Строительство, архитектура и техносферная безопасность» (Сочи, 2023); Заседание секции строительной механики и надежности конструкций имени профессора Н. К. Снитко» (Санкт-Петербург, 2024); 59-я внутривузовская научная конференция (Волгоград, 2022); 60-я внутривузовская научная конференция (Волгоград, 2023); 61-я внутривузовская научная конференция (Волгоград, 2024).

Публикации. По материалам диссертации опубликовано 12 работ. Из них 7 статей в журналах, рекомендованных ВАК, 2 статьи в журналах, индексируемых в базах данных SCOPUS, 3 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ.

Личный вклад автора состоит в разработке унифицированного алгоритма редуцирования СЛАУ, полученных на основе МКЭ в форме классического смешанного метода, который является базовой платформой для разработанных специализированных частных алгоритмов расчета пластин на статическое и динамическое воздействие, и специализированных частных алгоритмов, которые в свою очередь, отражают особенности применения различных вариантов аппроксимирующего полинома. В разработке и применении комплексного подхода к расчету плит на упругом основании с изменяющейся жесткостью, находящихся под статическими нагрузками, основанного на редукции основных неизвестных и методе компенсирующих нагрузок.

Структура и объём работы.

Диссертация состоит из: введения, четырех глав, заключения, списка литературы (142 наименования источников) приложений (копии свидетельств о регистрации программ для ЭВМ и акта о внедрении результатов исследования в учебный процесс). Работа изложена на 164 страницах, содержит 65 рисунков и 17 таблиц.

Структура и работы

Во **введении** представлено обоснование актуальности выбранного направления исследований, сформулированы цели и задачи научного исследования, отмечается новизна и практическая значимость работы, приводится общая характеристика работы и основные положения, которые автор выносит на защиту.

В **первой главе** выполнен обзор работ по теории методов решения больших СЛАУ в статическом и динамическом анализе строительных конструкций. Описаны проблемы, возникающие при обработке СЛАУ высокой размерности, а также методы решения алгебраической проблемы собственных значений для таких систем уравнений. Обоснована актуальность разработки алгоритмов, которые способны быстро и точно решать сложные задачи в инженерной практике.

В **главе 2** рассматриваются алгоритмы редуцирования систем уравнений МКЭ в форме классического смешанного метода (КСМ) с использованием интерполяции основных неизвестных для расчета пластин на статическое воздействие. С использованием этих алгоритмов были выполнены численные расчеты тонких изгибаемых пластин с различными типами закрепления на статическое воздействие, и проведен анализ полученных результатов.

В **главе 3** рассмотрен комплексный подход к расчету плит на упругом основании с изменяющейся жесткостью, находящихся под статическими нагрузками, основанного на редукции основных неизвестных и методе компенсирующих нагрузок.

В главе 4 рассматриваются алгоритмы редуцирования системы частотных уравнений МКЭ в форме классического смешанного метода для задач динамического расчета пластин.

Приведен алгоритм редуцирования системы частотных уравнений МКЭ в форме КСМ с использованием интерполяции основных неизвестных, который получен путем модификации представленного во второй главе базового алгоритма, предназначенного для численного расчета пластин на динамическое воздействие. В этой модификации алгоритма помимо редуцирования матрицы откликов выполняется редуцирование матрицы масс, причем для её редуцирования путем приведения масс к узлам крупной КЭ-сетки используется отдельная процедура.

Рассмотрены комбинированные алгоритмы редуцирования частотных уравнений МКЭ в форме КСМ с использованием интерполяции основных неизвестных и конденсационных методов.

С использованием этих алгоритмов был выполнен расчет нижней части спектра собственных частот колебаний для тонких изгибаемых пластин с различными типами закрепления и проведен анализ полученных результатов.

Дополнительно была решена задача определения собственных частот и собственных форм колебаний для плиты на упруго-податливых опорах. Рассмотрен вариант нагружения такой плиты нагрузкой, приложенной по контуру плиты и вдоль линии симметрии по оси Y , а также нагрузкой от собственного веса. Проведен анализ полученных результатов.

В заключении сформулированы основные результаты диссертационной работы.

ГЛАВА 1. КРАТКИЙ ОБЗОР РАБОТ ПО ТЕОРИИ И МЕТОДАМ РЕШЕНИЯ БОЛЬШИХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПРИ РАСЧЕТЕ ЗДАНИЙ, СООРУЖЕНИЙ И ИХ КОНСТРУКЦИЙ

МКЭ является универсальным численным методом, который широко используется при решении задач расчета зданий, сооружений и их конструкций при различных видах воздействий. Одна из главных особенностей этого метода заключается в дискретизации моделируемого объекта на конечные элементы, что ведет к значительному увеличению количества конечных элементов и, соответственно, числа неизвестных в задаче. Это создает необходимость одновременной обработки больших объемов данных. Несмотря на постоянное увеличение скорости и объема памяти компьютеров, анализ напряженно-деформированного состояния конструкций с использованием МКЭ демонстрирует феноменальное превышение потребностей инженерной практики над текущими возможностями электронно-вычислительных машин.

Сгущение сетки конечных элементов в МКЭ повышает точность решения, но также увеличивает размерность матриц, что в свою очередь создает сложности при их обработке. Вычислительные ошибки, возникающие при работе с матрицами высокого порядка, могут вызвать нестабильность результатов. Решение СЛАУ высокой размерности является наиболее трудоемким этапом в процессе расчетов МКЭ. Проблемы с большой размерностью возникают по различным причинам, например, при исследовании совместного поведения здания и основания или изучении локальных эффектов рядом с концентраторами напряжений [59].

При этом тенденция к увеличению размерности задач является устойчивой, что подчеркивает важность разработки алгоритмов, способных быстро и точно решать СЛАУ высокой размерности. В настоящее время как отечественные, так и зарубежные исследователи активно работают над различными редукционными подходами для решения задач большой размерности в строительной механике.

Редукционные методы, используемые при расчете зданий, сооружений и их конструкций при статическом и динамическом воздействии, можно условно разделить на две основные группы:

Первая группа – «методы прямого решения». Данные методы и реализующие их алгоритмы направлены на непосредственное решение больших СЛАУ и включает в себя различные подходы к упорядочиванию и преобразованию матрицы коэффициентов при неизвестных, а также использование итерационных методов и других техник [81-129].

Вторая группа – «методы поэтапного усложнения расчетной модели». Здесь основная концепция заключается в создании физических моделей сложных конструкций с последовательным переходом от простой модели к более сложной. В данной группе можно выделить метод суперэлементов (подконструкций) [38, 39, 117-128], интерполяционные методы (сеточные методы) [136], а также сплайн-методы [39, 118].

1.1 Обзор работ по методам решения задач статики

Среди методов решения задач статики **в первой группе** можно выделить **прямые и итерационные методы**.

Прямые методы. В зависимости от того, как используется разреженность матрицы коэффициентов, прямые методы решения СЛАУ подразделяются на ленточные и итерационные.

К традиционным методам, приводящим структуру системы уравнений к ленточному виду, относят исключение по Гауссу (факторизации Холецкого) и метод прогонки. Эти методы существенно сокращают объем вычислений и потребление памяти по сравнению с обычными методами, которые обрабатывают всю матрицу. Большинство методов, реализованных в программных пакетах МКЭ, основаны на модификациях ленточных методов. Подробное описание прямых методов и соответствующих алгоритмов для разреженных матриц можно найти, например, в работах [23, 60, 68].

Фиалко С.Ю. в своих исследованиях подробно рассматривает профильный метод (основывающийся на Гауссовом исключении или факторизации Холецкого [23]) и фронтальный метод (тоже основанный на Гауссовом исключении [73]), анализирует их достоинства и недостатки, а также предлагает модификации этих методов для решения специфических задач. Для оптимизации процесса упорядочивания исключений уравнений (профильный метод) и подачи элементов на сборку (фронтальный метод) часто применяется обратный алгоритм Катхилла-Макки [23].

В работе Б. Айронсона [117] предложен вариант фронтального метода, в котором сборка и исключение уравнений выполняются одновременно в параллельном режиме.

Итерационные методы. Для успешного применения итерационных методов к СЛАУ необходимо выполнение определенных требований, предъявляемых к системе уравнений [8, 22, 66, 73, 55]. Традиционные итерационные алгоритмы, получаемые на основе МКЭ, имеют ограниченную область применения. Их эффективность снижается при моделировании конструкций со сложной геометрией и сложными граничными условиями.

Для повышения эффективности итерационных методов и преодоления ограничений их применения проведены исследования, направленные на разработку модификаций. Одной из таких модификаций является метод сопряженных градиентов с предобуславливанием [83, 84, 115].

Наибольшее практическое применение получили симметричный предобуславливатель Гаусса-Зейделя [59], методы незавершенной факторизации Холецкого [83-84], а также предобуславливатель типа "элемент за элементом" [10].

Среди методов **второй группы** следует отметить метод суперэлементов (подконструкций), предложенный в работах И.С. Пржеминичского и получивший дальнейшее развитие в работах В.А. Постнова и И.Я. Хархурима, Г. Крона, Н.Н. Шапошникова [64, 61, 62, 77], метод конечных полос (МКП) и метод пространственных конечных элементов (МПКЭ), разработке которых посвящены

работы А.И. Лантух-Лященко, Н.Н. Леонтьева, Ю. Ченга, И.И. Немчинова, М. Миколы, Дж. Пааволы и др.[48, 49, 89, 58], интерполяционные методы (сеточные методы), а также сплайн-методы.

Метод суперэлементов. Для улучшения обусловленности задач и более эффективного использования оперативной памяти ЭВМ в работе [14] Е.Я. Вороненка и С.В. Сочинского предложен подход, который позволяет сократить число граничных узловых перемещений суперэлемента, что, в свою очередь, существенно (в несколько раз) понижает порядок решаемых систем уравнений без значительного уменьшения точности.

В работах В.А. Игнатьева и С.Ф. Горелова [28] разработана методика расчета коробчатых конструкций с использованием сплайн-интерполяций перемещений. Эта методика значительно сокращает затраты времени ЭВМ на обратный ход суперэлементной процедуры и не требует хранения матриц жесткости суперэлементов промежуточных уровней. Описанная методика была далее развита в работах И.В. Блохиной и О.М. Игнатьевой [11] для расчетов коробчатых систем с пластинами переменной жесткости и для динамических задач.

Одним из возможных путей решения задач расчета систем с большим числом степеней свободы является приближенный метод суперэлементов [52, 65], в котором в отличие от точного метода [13] условия равновесия на границах суперэлементов выполняются приближенно.

Современные научные исследования посвящены разработке новых типов оболочечных суперэлементов для проведения линейного и нелинейного статического анализа, а также анализа свободных колебаний сферических конструкций с частично или полностью сферической геометрией [134]. В работе [126] описана эффективность, верификация, апробация и оценка суперэлементной методики моделирования динамических характеристик крупногабаритных комбинированных систем "фундамент – железобетонные конструкции – металлоконструкции". Исследованию работы конструкций для сейсмически активных районов методом суперэлементов посвящена работа [94]. В работе [114]

проведено исследование эффективности метода суперэлементов для динамических расчетов.

В рамках суперэлементной аппроксимации подсистем анализируемых конструкций был разработан численный метод определения характеристик суперэлементов произвольного типа. Примеры имитационных моделей с двухузловыми суперэлементами продемонстрировали эффективность метода при анализе упругих систем, что показано в работе [135].

Метод контурных и расчетных точек. Упрощение и унификация метода построения суперэлементов (СЭ) могут быть достигнуты с помощью метода контурных точек (КТ) и метода расчетных точек, предложенных А.И. Сапожниковым [67]. Эти методы направлены на улучшение процесса создания и анализа суперэлементов, что позволяет значительно упростить процедуру расчета и повысить его эффективность. Метод контурных точек позволяет оптимально определять границы суперэлементов, а метод расчетных точек используется для уточнения расчетных характеристик. Это способствует более точному моделированию поведения конструкций и упрощает весь процесс вычислительного анализа.

Метод конечных полос. Необходимость повышения экономичности расчетов с использованием МКЭ из-за сокращения затрат машинного времени привела к разработке МКП и МПКЭ. МКП, как полуаналитический вариант МКЭ, активно применяется для решения различных задач, связанных с теорией, пластинами и оболочками [2, 50, 51, 90, 121].

Использование сплайнов при построении системы разрешающих функций МКП существенно расширяет его возможности, приближая его по функциональности к МКЭ, при этом сохраняя положительные качества, характерные для рассматриваемого метода [91, 92, 96].

В статье [118] рассматриваются работы, посвященные численному решению различных типов краевых задач методом, основанным на сплайн-интерполяции. В работе [141] представлен вариант МКП, использующий для интерполяции кубические сплайны вместо традиционно используемых тригонометрических

рядов. Преимуществом данного подхода является возможность решения задач в нерегулярных областях со сложной геометрией.

С.Ц. Фан и Ю.К. Ченг применяют кубические базисные сплайны (В-сплайны) в качестве аппроксимирующих функций в МКП [99].

Работы В.Ю. Ли, Ю.К. Ченга и С.Ц. Фана [121, 92] представляют оригинальную модификацию МКП для анализа изгиба пластин, выступающую в роли альтернативы известной полуаналитической формулировке.

В настоящее время также проводятся исследования по динамическому расчету конструкций методом субструктур [140]. В работе [137] рассматривается применение метода подструктур к расчету конструкций судов.

В целом, МКП демонстрирует высокий потенциал для применения в задачах строительной механики, обеспечивая оптимальные решения при значительном снижении вычислительных затрат.

В работе [105] представлена модификация метода подконструкций (BSMFM). Метод вложенных подконструкций, предложенный С.Ю. Фиалко [73], обеспечивает эффективное решение задач МКЭ за счет минимизации количества операций заполнения при автоматическом разбиении исходной конструкции на группы смежных подконструкций. Это разбиение осуществляется с использованием метода вложенных сечений [23], что позволяет автоматизировать процесс сборки конструкции.

Автоматизация процесса сборки конструкций активно применяется в блочном многофронтальном методе подконструкций [9]. Эта реализация способствует ускорению расчета и возможности добиться более эффективного управления сложными задачами в рамках МКЭ, что позволяет значительно сокращать время на подготовку модели и улучшает интеграцию различных элементов конструкции.

Многоуровневые (многосеточные) итерационные методы. Многоуровневые методы, активно развивающиеся, начиная с работ Р.П. Федоренко, представляют собой эффективный подход к решению задач, основанных на МКЭ [72]. Ключевая идея этих методов заключается в

использовании модели "грубого уровня", содержащей значительно меньше степеней свободы, для предсказания нижних форм вектора решения. Комбинация этой идеи с методом сопряженных градиентов с предобуславливанием приводит к созданию многоуровневых предобуславливателей [59].

Следует отметить агрегатный многоуровневый предобуславливатель [74, 100-101], в котором последовательность моделей грубого уровня строится на основе чисто механической концепции, связанной с наложением на соседние узлы конечно-элементной модели неперекрывающихся локальных звезд абсолютно жестких связей [5]. Это позволяет значительно улучшить сходимость итерационных методов.

Задачи строительной механики обычно являются плохо обусловленными из-за большого разброса значений жесткостей, сопряжения разнотипных конечных элементов, сложности геометрии контуров и, как следствие, нерегулярных сеток. Плохая обусловленность приводит к низкой сходимости большинства итерационных методов. Для решения данной проблемы предлагается метод сопряженных градиентов с агрегатным многоуровневым поэлементным предобуславливанием AMIS [75, 102].

Одним из методов редукции СЛАУ является метод обобщенных неизвестных, предложенный В.А. Игнатьевым [35]. В работе [136] разработаны методы, состоящие из нескольких предпроцессов.

Также проводятся исследования и модификации многосеточных методов (AMG) для решения симметричных положительно определенных СЛАУ с разреженными матрицами высокого порядка [78]. В работе [119] представлена разработка эффективного параллельного алгоритма для решения дифференциальных уравнений в частных производных МКЭ, использующего специальный способ хранения только ненулевых элементов матрицы жесткости.

К числу частных редукционных методов можно отнести метод декомпозиции, предложенный Г.И. Пшеничным, метод расщепления дифференциальных операторов Л.А. Розина и вариант комбинации этих методов, предложенный В.А. Игнатьевым в его докторской диссертации [35]. Эти подходы

способствуют улучшению точности и эффективности расчетов в рамках МКЭ, позволяя более эффективно управлять вычислительными ресурсами и улучшать сходимость итерационных методов.

1.2 Обзор работ по методам решения задач динамики

Решение задач динамики сводится к полной алгебраической проблеме СЗ и СВ, при которой необходимо определить все СЗ и соответствующие им СВ, или к неполной (частичной) проблеме, при которой находится определенная и необходимая для практических целей часть СЗ и соответствующие им СВ.

Традиционные алгоритмы, такие как QZ-алгоритм, которые хорошо зарекомендовали себя при решении задач с полными матрицами, оказываются малоэффективными для решения обобщенной проблемы собственных значений в МКЭ. Это связано со спецификой конечно-элементных задач, которые характеризуются высокой размерностью и разреженностью матриц. Поэтому для эффективного решения данной задачи требуются специализированные алгоритмы, учитывающие особенности МКЭ. [1].

Наиболее полно методы решения алгебраической проблемы собственных значений изложены в монографии Дж. Х. Уилкинсона [70] и работе А. Ф. Бертолини [81], в которой выполнен анализ наиболее актуальных методов решения проблемы СЗ.

В монографии Зу-Квинг-Ку (Zu-Qing Qu) [142] предложена классификация и выполнен обзор большого количества существующих методов редуцирования.

К. Бате, Е. Вилсон, А. Дженнингс [6, 7] предложили подразделить все алгоритмы решения проблемы собственных значений на четыре большие группы:

К первой группе относится метод обратных итераций и разработанные на его основе модификации данного метода. В связи с тем, что алгоритм требует положительной определённости матрицы жёсткости, в работе [93] предложено с помощью процедуры сдвигов Релея смягчить данное ограничение.

Идея синтеза конструкции из подсистем, заключающаяся в представлении сложной конструкции при помощи сокращенного числа степеней свободы, берет своё начало от работ Харти [76].

Одним из наиболее эффективных итерационных методов является метод итераций в подпространстве, предложенный в работе Рутисхаузера [131] основанный на векторных итерациях, свойстве последовательности штурма и алгоритме метода Релея-Ритца.

Большое количество работ посвящены решению неполной проблемы СЗ и СВ методом подструктур или методом синтеза конструкции из подсистем [20, 24, 25, 27, 29 и др.].

Методика покомпонентного синтеза форм, заключающаяся в независимом расчете ряда подсистем, на которые разбивается сложная конструкция, и учете их взаимного влияния в составе целой системы, предложена в работе В.А. Смирнова, А.В. Александрова, Б.Я. Лященко, Н.Н. Шапошникова [3] и является вариантом метода Релея-Ритца.

В современных программных комплексах для инженерных расчетов, в основе которых лежит МКЭ, ключевым инструментом для решения большеразмерных задач стали метод итераций подпространства [47, 79, 138], метод Ланцоша [79, 116, 128, 129], и более совершенная блочная версия метода Ланцоша с использованием сдвигов [97, 110].

Разработанный обобщённый метод сопряжённых градиентов, основанный на агрегатном многоуровневом предобуславливании [103], сочетает в себе преимущества метода сопряжённых градиентов [128], агрегатного предобуславливания и стратегии сдвигов [59]. Также была установлена связь между Ритц-градиентом этого метода и методом Ланцоша [59]. Данный метод обеспечивает необходимую точность и высокую скорость вычислений, а также может быть использован для быстрого анализа, что делает его полезным инструментом для различных инженерных задач.

С.Ю. Фиалко в своей диссертации и статьях приводит численные результаты расчетов задач строительной механики высокой размерности по предлагаемому и развиваемому им алгоритму [104].

Широкое распространение среди **второй группы методов** нашел алгоритм последовательного приведения матриц, разработанный Якоби. Данный метод позволяет привести матрицу к диагональному виду, последовательно, исключая все элементы, стоящие вне главной диагонали, однако область применения ограничена матрицами невысокого порядка. Позднее этот алгоритм усовершенствовался в работе Джорджа Форсайта [106]: метод Якоби с преградами, обобщённый метод Якоби [98].

Алгоритм QR - Хаусхолдера в работах Октеги и Хайзера [127] позволяет решать неполную проблему СЗ стандартной задачи. Этот алгоритм основан на преобразованиях Хаусхолдера и обратных итерациях и позволяет вычислять наименьшие собственные пары СЗ - СВ.

К третьей группе методов можно отнести методы, использующие свойство последовательности Штурма обобщённой собственной проблемы и соответствующих ей усечённых задач в работах Гивенса, Гупты [109, 111, 112].

К четвёртой группе относятся методы вычисления собственных значений с помощью характеристических полиномов. Здесь используется разложение матриц на произведение нижней треугольной, диагональной и верхней треугольной матриц для вычисления определителя и метод хорд или метод Ньютона для вычисления СЗ.

Помимо этих традиционных методов применяются **методы приведения исходной задачи высокого порядка к задаче существенно меньшей размерности (методы редукции)**.

В рамках методов решения частичной проблемы собственных значений (СЗ) и собственных векторов (СВ) выделяется класс редукционных методов, основанных на понижении порядка систем уравнений путем преобразования исходной системы в систему с меньшим числом степеней свободы, сохраняя при этом эквивалентность динамических характеристик исходной и редуцированной

модели. Для приближенного решения используют метод переноса приведенных масс (метод наложения), предложенный Донкерлеем, метод приведения масс, на основе которого впервые была решена задача о колебаниях многоступенчатого вала С.Я. Землянухиным.

В настоящее время предложены и используются на практике следующие редуциционные методы:

- 1) метод статической конденсации;
- 2) метод динамической конденсации;
- 3) метод частотно-динамической конденсации.

Предложенный Р. Дж. Гайаном [16] метод статического редуцирования [17, 18, 19, 139] основан на допущении о том, что силы инерции, соответствующие второстепенным степеням свободы, равны нулю. Однако для сложных конструкций с большим числом степеней свободы применение традиционной трактовки этого метода приводит к медленной сходимости к точному решению.

Модификации метода статической конденсации посвящены расчеты, выполненные Бенфилдом [79].

Применение идеи метода статической конденсации представлены в работах [124, 120]. Данные работы демонстрируют различные аспекты развития и применения метода к решению больших задач на основе МКЭ. Особое внимание уделяется сочетанию статической конденсации с другими подходами.

Более точные результаты обеспечивает метод динамической конденсации, в работах В.И. Ивантеева, В.Д. Чубаня [26].

В дальнейших работах по развитию метода динамической конденсации предложено использовать многоуровневую динамическую конденсацию в сочетании с методом одновременных итераций в подпространстве, однако данный алгоритм довольно сложен в реализации и применением только к уравнениям МКЭ в форме метода перемещений.

В работах Н.И. Гриненко и В.В. Мокеева [18, 19] предложен метод частотно-динамической конденсации, в котором понижение порядка матриц коэффициентов при неизвестных возможно выполнять пошагового.

В работе С.С. Гусева, Б.А. Куранова [21] предлагается иной способ уточнения частот, который также может быть использован в методе частотно-динамической конденсации.

В работах В.А. Игнатьева [30] и О.М. Игнатьевой [31, 32] предложен более удобный и экономичный вариант частотно-динамической конденсации. Этот метод получил дальнейшее развитие в работах В.А. Игнатьева и А.В. Игнатьева [33, 34, 53, 54].

Сравнительное исследование шести типичных методов динамической конденсации, используемых для решения проблем идентификации повреждений композитных пластин, изготовленных из функционально модифицированных материалов (FGM) и функционально модифицированных композитных материалов, армированных углеродными нанотрубками (FG-CNTRC) представлено в работе [95].

1.3 Выводы по главе 1

1. Многими исследователями отмечаются недостатки существующих методов решения больших СЛАУ в динамическом анализе, включая проблемы устойчивости вычислений и низкую эффективность при работе с высокоразмерными моделями. Это ставит перед научным сообществом задачу нахождения решений, которые обеспечат более надежное и быстрое выполнение расчетов.

2. Отмечается значительная потребность в разработке новых алгоритмов, которые могут адаптироваться к особенностям динамических задач, включая учет нелинейных эффектов и изменение параметров нагрузки. Такие алгоритмы могли бы существенно улучшить точность численных результатов.

3. Некоторые авторы подчеркивают важность применения адаптивных и редуccionных методов, что может существенно повысить скорость и точность решения, особенно в контексте сложных инженерных систем. Это подчеркивает

необходимость дальнейших исследований в этой области для нахождения оптимальных подходов к решению динамических задач.

4. Альтернативным подходом представляется использование МКЭ в форме КСМ, эффективность которого в решении широкого круга задач продемонстрирована в ряде известных публикаций В.А. Игнатьева, А.В. Игнатьева и их учеников. Использование данного метода может значительно расширить возможности анализа и повысить качество получаемых результатов.

Для дальнейшего развития этого метода и расширения области его применения требуется разработка и совершенствование алгоритмов решения больших систем алгебраических уравнений в задачах статического и динамического анализа.

ГЛАВА 2. АЛГОРИТМЫ РЕДУЦИРОВАНИЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА ОСНОВЕ МКЭ В ФОРМЕ КЛАССИЧЕСКОГО СМЕШАННОГО МЕТОДА

Данная глава посвящена разработке и исследованию эффективности новых алгоритмов редуцирования СЛАУ, возникающих при применении МКЭ в форме КСМ при расчете тонких изгибаемых пластин на статическое воздействие. Основной идеей предложенных алгоритмов является использование интерполяции между основными неизвестными системы уравнений МКЭ в форме КСМ, что позволяет получить редуцированную СЛАУ меньшей размерности. Разработанные алгоритмы обеспечивают снижение вычислительных затрат при сохранении достаточной точности численных результатов. В последующих разделах главы подробно описаны теоретические основы предложенных алгоритмов, их математическая реализация, а также результаты численных расчетов, подтверждающих их эффективность.

2.1 Разрешающая система уравнений МКЭ в форме классического смешанного метода

При проведении расчетов изгибаемых плоских пластин по МКЭ в форме КСМ используется пластинчатый конечный элемент с 12 степенями свободы в основной системе (рисунок 2.1). За основные узловые неизвестные приняты: вертикальные линейные смещения z и по два изгибающих момента по направлениям осей Ox и Oy , (M_x и M_y). Этот тип конечного элемента пластины впервые был предложен А.М. Масленниковым [56, 57].

Систему разрешающих уравнений МКЭ в форме КСМ можно представить в матричном виде (2.3).

$$\left[\begin{array}{c|c} r & \tilde{r} \\ \hline \tilde{\delta} & \delta \end{array} \right] \begin{Bmatrix} q \\ \tilde{q} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_F \\ \Delta_F \end{Bmatrix} = \{0\}, \quad (2.3)$$

где $[r]$ – подматрица жесткости;

$[\tilde{r}]$ – подматрица жесткости-податливости;

$[\tilde{\delta}] = -[\tilde{r}]^T$ – подматрица податливости-жесткости;

$[\delta]$ – подматрица податливости;

$\{R_F\}$ – вектор реакций во введенных связях от узловых нагрузок, к которым приведена нагрузка, распределенная по элементам основной системы;

$\{\Delta_F\}$ – вектор перемещений по направлению силовых неизвестных от нагрузки в основной системе;

$\begin{Bmatrix} q \\ \tilde{q} \end{Bmatrix}$ – вектор неизвестных смешанного метода.

Для матрицы $\left[\begin{array}{c|c} r & \tilde{r} \\ \hline \tilde{\delta} & \delta \end{array} \right] = [D]$ в рамках научной школы В.А. Игнатьева введено фундаментальное понятие-термин – «матрица откликов», которое является обобщением понятий матриц жесткости и податливости, и позволяющее придать явный физический смысл соответствующим смешанному методу основным системам для конечных элементов.

Наибольшей эффективности при формировании глобальной матрицы откликов и вектора воздействий достигает подход, основанный на их поблочном построении с использованием индексных матриц. Данный метод предполагает прямое формирование матричных элементов, аналогичное процессу построения матрицы жесткости в МКЭ в форме метода перемещений [63].

Для формирования глобальной матрицы откликов МКЭ в форме КСМ необходимо использовать индексную матрицу соответствия неизвестных

локальных перемещений глобальным $[S]$ и матрицу соответствия неизвестных локальных усилий глобальным $[W]$.

Для наглядности приведем пример формирования индексных матриц для формирования глобальной матрицы откликов при стыковке четырех КЭ.

Пронумеруем неизвестные в системе, состоящей из четырех конечных элементов (рисунок 2.2).

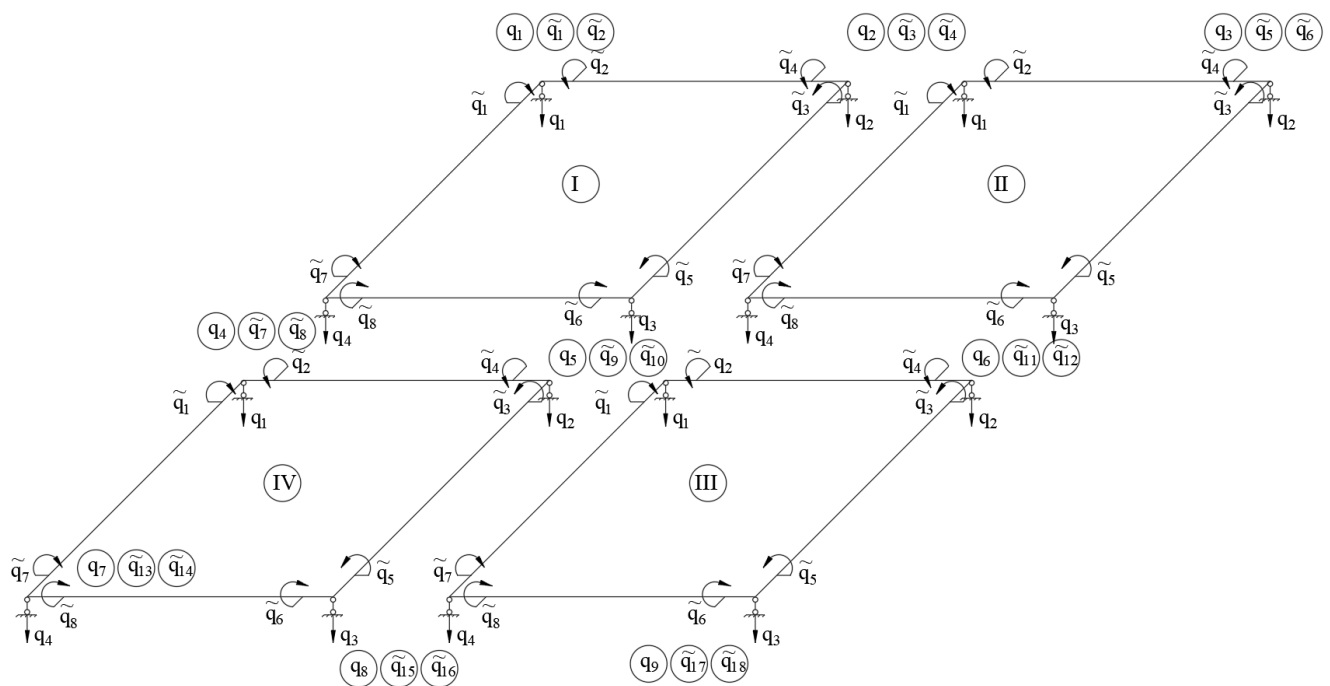


Рисунок 2.2 – Нумерация конечных элементов и узловых неизвестных

В таблице 2.1 приведена матрица соответствия неизвестных локальных перемещений глобальным (матрица $[S]$) для этой системы КЭ.

Таблица 2.1 – Матрица $[S]$

№ КЭ	$q_1^{\text{КЭ}}$	$q_2^{\text{КЭ}}$	$q_3^{\text{КЭ}}$	$q_4^{\text{КЭ}}$
1	1	2	5	4
2	2	3	5	6
3	4	5	8	7
4	5	6	9	8

В таблице 2.2 приведена матрица соответствия неизвестных локальных усилий глобальным (матрица $[W]$).

Таблица 2.2 – Матрица $[W]$

№ КЭ	$\tilde{q}_1^{КЭ}$	$\tilde{q}_2^{КЭ}$	$\tilde{q}_3^{КЭ}$	$\tilde{q}_4^{КЭ}$	$\tilde{q}_5^{КЭ}$	$\tilde{q}_6^{КЭ}$	$\tilde{q}_7^{КЭ}$	$\tilde{q}_8^{КЭ}$
1	1	2	3	4	9	10	7	8
2	3	4	5	6	11	12	9	10
3	7	8	9	10	15	16	13	14
4	9	10	11	12	17	18	15	16

Алгоритм формирования блоков глобальной матрицы откликов подробно описан в работах [42, 15, 36]

2.2 Базовый алгоритм редуцирования СЛАУ на основе МКЭ в форме классического смешанного метода

Базовый алгоритм редуцирования СЛАУ, получаемой при расчете пластин на статическое воздействие на основе МКЭ в форме КСМ, с использованием интерполяции основных неизвестных состоит из нескольких этапов:

1. Рассматриваемая пластина разбивается на две системы конечных элементов (рисунок 2.3). Первая представляется в виде конечно-элементной сетки с крупными ячейками и обозначением узлов I, J , а вторая в виде сетки с мелкими ячейками и обозначением узлов i, j . Узлы I, J принимаются за главные, а узлы i, j за второстепенные. При этом количество узлов мелкой конечно-элементной сетки является кратным по отношению к узлам крупной конечно-элементной сетки и оно является одинаковым для всех областей крупной сетки.

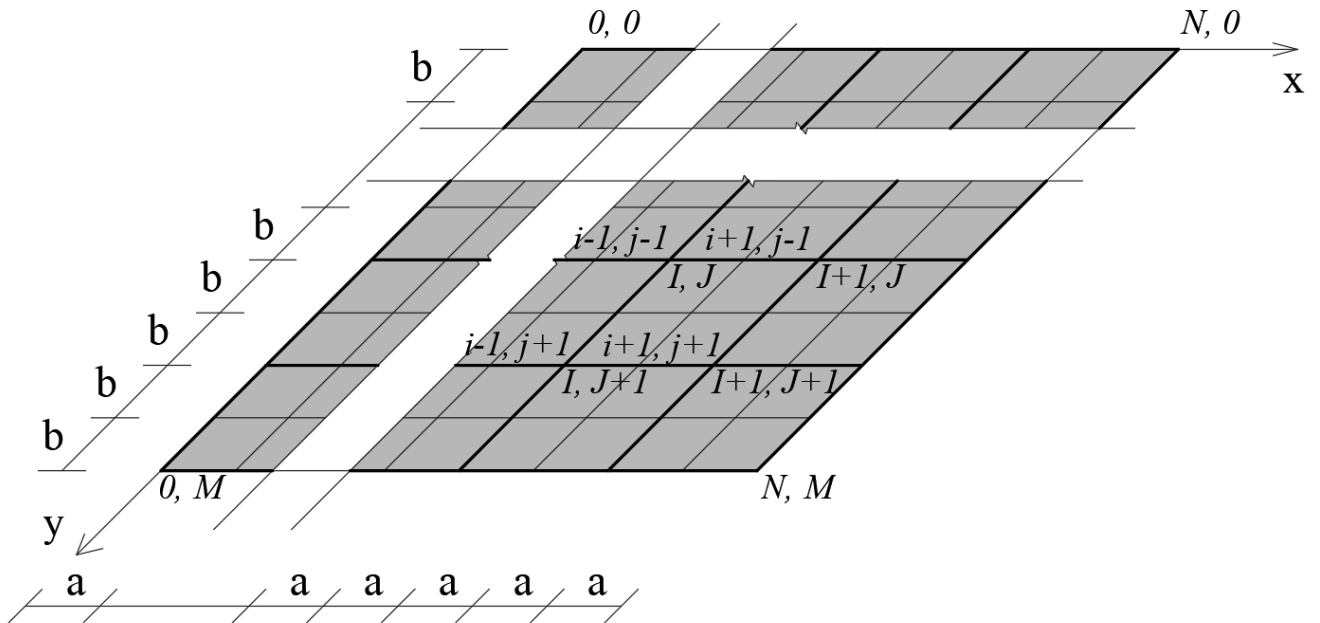


Рисунок 2.3 – Конечно-элементная модель пластины с разбиением на две системы областей

2. Для каждого из разбиений составляется система разрешающих уравнений.

3. Устанавливается связь между перемещениями и усилиями узлов i, j и I, J . Для установления связи между перемещениями и усилиями узлов i, j и I, J выбирается интерполяционный полином, после чего вычисляются его коэффициенты, позволяющие выразить значения основных неизвестных смешанного метода в узлах мелкой сетки через те же значения неизвестных в узлах крупной сетки для всех областей крупной сетки.

4. Значения основных неизвестных смешанного метода в узлах мелкой сетки, выраженные через значения тех же узловых неизвестных крупной сетки, вводятся в систему уравнений МКЭ в форме КСМ для каждой из рассматриваемых областей конструкции. Глобальная система разрешающих уравнений записывается в виде (2.4).

$$[D]^* \begin{Bmatrix} q^* \\ \tilde{q}^* \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_F \\ \Delta_F \end{Bmatrix} = \{0\}. \quad (2.4)$$

5. Получившаяся система уравнений относительно неизвестных крупной сетки (редуцированная система уравнений) решается любым из наиболее эффективных способов решения СЛАУ.

6. В обратном порядке вычисляются параметры, описывающие напряженно-деформированное состояние в конечных элементах рассматриваемой области.

7. На следующем этапе численного расчета выполняется уменьшение размеров ячейки сетки с узлами I, J .

2.3 Частные алгоритмы редуцирования СЛАУ на основе МКЭ в форме классического смешанного метода

На основе базового алгоритма были построены два алгоритма с использованием билинейной интерполяции (БЛИ интерполяция) и интерполяции с использованием неполного бикубического полинома (НБКП интерполяция), выбираемых на 3-м шаге базового алгоритма.

Алгоритм №1

В данном алгоритме для установления связи между смешанными неизвестными в узлах второстепенной и главной сетки используется билинейная интерполяция. Этот метод может быть особенно полезен в случаях, когда сложно подобрать более сложные нелинейные функции аппроксимации. Билинейная интерполяция позволяет эффективно аппроксимировать перемещения и усилия, используя значения из соседних узлов основных переменных (рисунок 2.4).

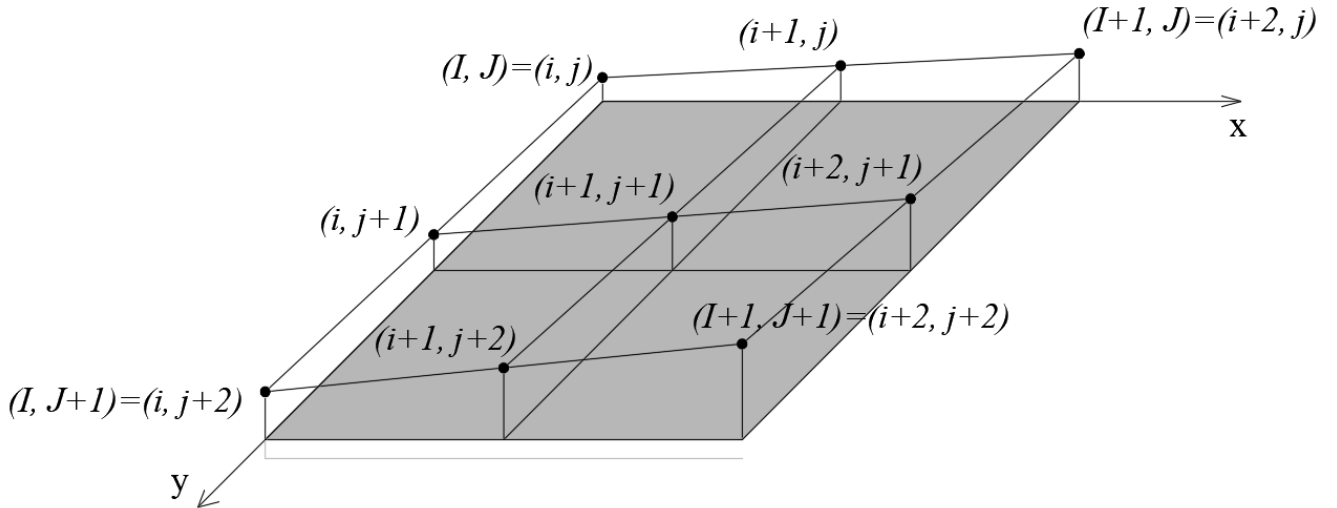


Рисунок 2.4 – Билинейная интерполяция в узлах второстепенной и главной сетки

Для задания связи между перемещениями и усилиями в узлах i, j и I, J вычисляются коэффициенты линейных интерполяционных полиномов, позволяющих выразить значения основных неизвестных во второстепенных узлах через те же значения неизвестных в главных узлах для всех областей крупной сетки.

Функция для аппроксимации основных неизвестных перемещений записывается в виде билинейного полинома (2.5).

$$w(i, j) = c_1 + c_2 \cdot i + c_3 \cdot j + c_4 \cdot i \cdot j \quad (2.5)$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 – коэффициенты билинейного полинома.

Для области размером $a \times b$, ограниченной узлами грубой сетки $(I-1, J-1), (I, J-1), (I-1, J), (I, J)$, и с шагом между узлами, равным m и n , перемещения в узлах мелкой сетки могут быть представлены через значения в узлах грубой сетки в виде (2.6).

$$w(i, j) = \frac{w(I-1, J-1)}{a \cdot b} (a - m \cdot i) \cdot (b - n \cdot j) + \frac{w(I, J-1)}{a \cdot b} (m \cdot i) \cdot (b - n \cdot j) + \frac{w(I-1, J)}{a \cdot b} (a - m \cdot i) \cdot (n \cdot j) + \frac{w(I, J)}{a \cdot b} (m \cdot i) \cdot (n \cdot j) \quad (2.6)$$

Связь между моментами в узлах i, j и I, J может быть установлена с использованием аналогичного подхода.

Функции для аппроксимации моментов записываются в виде полиномов (2.7) и (2.8).

$$M_x(i, j) = c_{1x} + c_{2x} \cdot i + c_{3x} \cdot j + c_{4x} \cdot i \cdot j \quad (2.7)$$

$$M_y(i, j) = c_{1y} + c_{2y} \cdot i + c_{3y} \cdot j + c_{4y} \cdot i \cdot j \quad (2.8)$$

Коэффициенты для полинома (2.7) записываются в виде (2.9).

$$\begin{aligned} c_{1x} &= M_x(I-1, J-1); \quad c_{2x} = M_x(I, J-1) - M_x(I-1, J-1); \\ c_{3x} &= M_x(I-1, J) - M_x(I-1, J-1); \quad c_{4x} = M_x(I, J) - (c_{1x} + c_{2x} + c_{3x}). \end{aligned} \quad (2.9)$$

После подстановки в полином (2.7) коэффициентов (2.9) он принимает окончательный вид (2.10).

$$\begin{aligned} M_x(i, j) &\approx \frac{M_x(I-1, J-1)}{a \cdot b} (a - m \cdot i)(b - n \cdot j) + \frac{M_x(I, J-1)}{a \cdot b} (m \cdot i)(b - n \cdot j) + \\ &+ \frac{M_x(I-1, J)}{a \cdot b} (a - m \cdot i)(n \cdot j) + \frac{M_x(I, J)}{a \cdot b} (m \cdot i)(n \cdot j) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Аналогично для момента $M_y(i, j)$:

$$\begin{aligned} M_y(i, j) &\approx \frac{M_y(I-1, J-1)}{a \cdot b} (a - m \cdot i)(b - n \cdot j) + \frac{M_y(I, J-1)}{a \cdot b} (m \cdot i)(b - n \cdot j) + \\ &+ \frac{M_y(I-1, J)}{a \cdot b} (a - m \cdot i)(n \cdot j) + \frac{M_y(I, J)}{a \cdot b} (m \cdot i)(n \cdot j) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Алгоритм №2

Для двумерной конструкции (рисунок 2.5) в качестве интерполяционного полинома может использоваться неполный бикубический полиномом (2.12).

$$\begin{aligned} w(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \\ &+ \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Этот полином обеспечивает гладкость (или непрерывность) до третьего порядка. То есть не только сами значения полинома, но и его первые и вторые производные будут непрерывными в узлах.

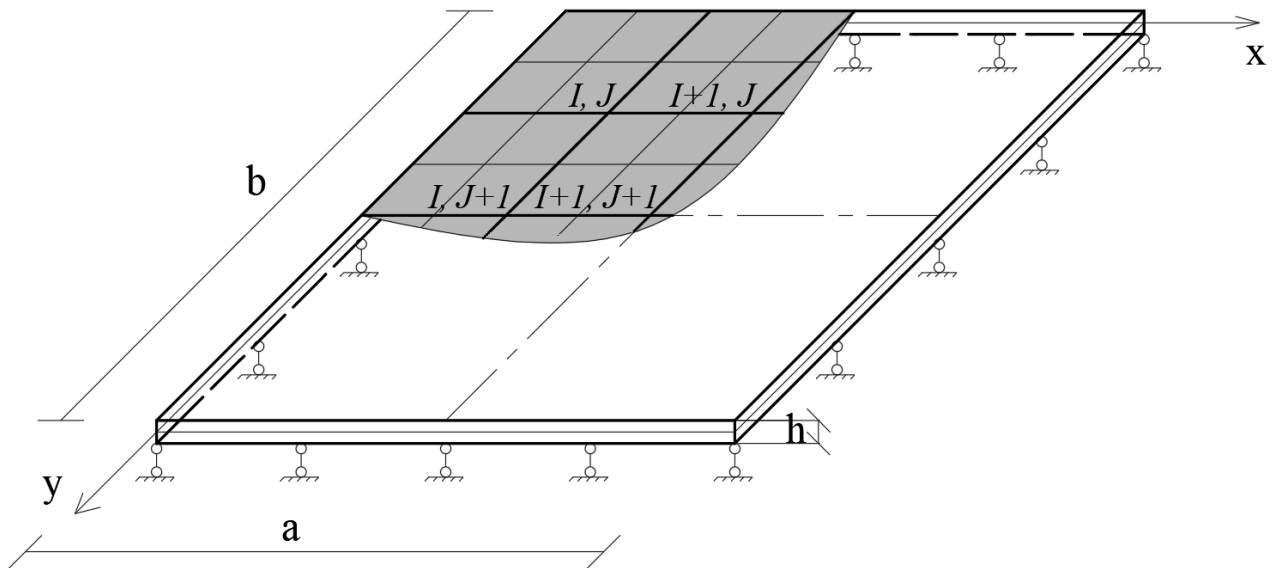


Рисунок 2.5 – Двумерная конструкция с двумя конечно-элементными сетками

Этой функции прогибов соответствуют значения изгибающих моментов по направлениям, осей x и y (2.13).

$$M_x = -D_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_y = -D_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right). \quad (2.13)$$

$$\text{где } D_x = \frac{E_x h^3}{12\nu};$$

$$D_y = \frac{E_y h^3}{12\nu};$$

$$\nu = 1 - \mu_x \mu_y;$$

h – толщина пластины.

Значения 12 коэффициентов интерполяционного полинома (2.12) могут быть найдены путем использования выражений для трех основных неизвестных в четырех угловых узлах области (рисунок 2.6).

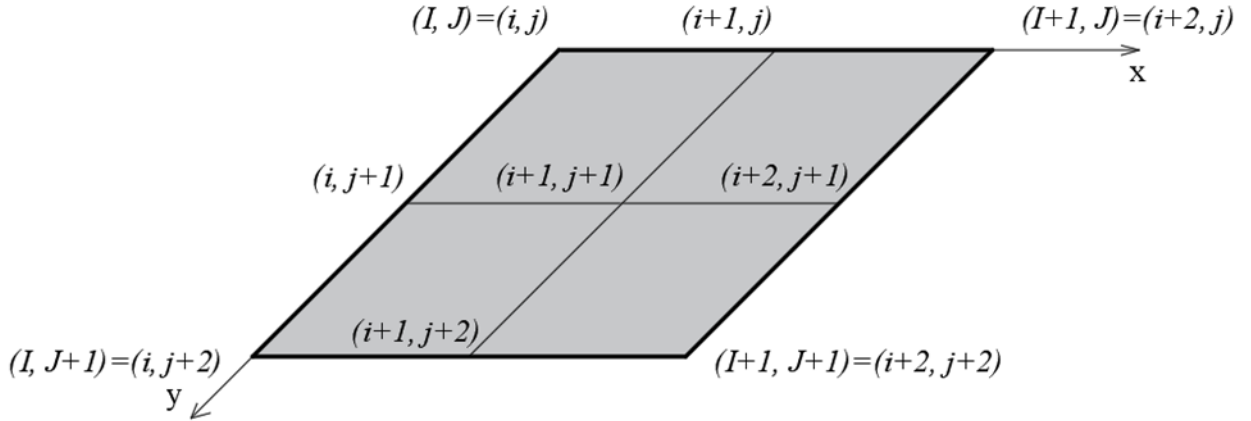


Рисунок 2.6 – Конечно-элементная область, составленная узлами крупной и мелкой конечно-элементной сетки

Полином (2.12) может быть представлен в матричном виде (2.14)

$$z = w(x, y) = [L(x, y)]\{\alpha\}, \quad (2.14)$$

где $[L(x, y)]$ – это вектор базисных функций;

$\{\alpha\}$ – вектор коэффициентов, предназначенный для определения полинома.

Напряженно-деформированное состояние пластины в произвольной точке может быть представлено в виде (2.15).

$$\{u\} = \{A\}[L(x, y)]\{\alpha\}. \quad (2.15)$$

Здесь $\{A\}$ представляет собой оператор, который связывает вектор неизвестных с полиномом $[L(x, y)]$ и параметрами $\{\alpha\}$. Этот оператор включает элементы, содержащие производные по координатам x и y , и играет ключевую роль в описании механических свойств пластины. В явном виде оператор задается следующим образом:

$$\{A\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -D_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} - D_\mu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ -D_y \frac{\partial^2}{\partial y^2} - D_\mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{Bmatrix}. \quad (2.16)$$

Связь между вектором неизвестных $\{q\}$ и коэффициентами интерполяционного полинома $\{\alpha\}$ определяется выражением: (2.17):

$$\{q\} = [V]\{\alpha\}. \quad (2.17)$$

$$\text{где } [V] = \begin{bmatrix} A & & & \\ & A & & \\ & & A & \\ & & & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L(x_i, y_i) \\ L(x_j, y_j) \\ L(x_k, y_k) \\ L(x_l, y_l) \end{bmatrix}.$$

Условия равенства основных неизвестных смешанного метода в угловых узлах области, показанной на рисунке 2.5 запишем в виде (2.18).

$$\begin{aligned} y_{(i-1,j-1)} &= y_{(I,J)}; M_{(i-1,j-1)}^x = M_{(I,J)}^x; M_{(i-1,j-1)}^y = M_{(I,J)}^y; \\ y_{(i+1,j-1)} &= y_{(I+1,J)}; M_{(i+1,j-1)}^x = M_{(I+1,J)}^x; M_{(i+1,j-1)}^y = M_{(I+1,J)}^y; \\ y_{(i-1,j+1)} &= y_{(I,J+1)}; M_{(i-1,j+1)}^x = M_{(I,J+1)}^x; M_{(i-1,j+1)}^y = M_{(I,J+1)}^y; \\ y_{(i+1,j+1)} &= y_{(I+1,J+1)}; M_{(i+1,j+1)}^x = M_{(I+1,J+1)}^x; M_{(i+1,j+1)}^y = M_{(I+1,J+1)}^y. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Подставив выражения (2.18) в (2.17), получаем коэффициенты матрицы $[V]$. После чего решив систему уравнений (2.19) находим коэффициенты интерполяционного полинома $\{\alpha\}$.

$$\{\alpha\} = [V]^{-1}\{q\}. \quad (2.19)$$

2.4 Примеры расчета пластин при статических нагрузках и анализ эффективности разработанных алгоритмов

2.4.1 Граничные условия при расчете пластин

При формировании разрешающей системы уравнений изгибаемой пластины необходимо учитывать граничные условия при различных вариантах её закрепления:

1. Свободное опирание по контуру (рисунок 2.7).

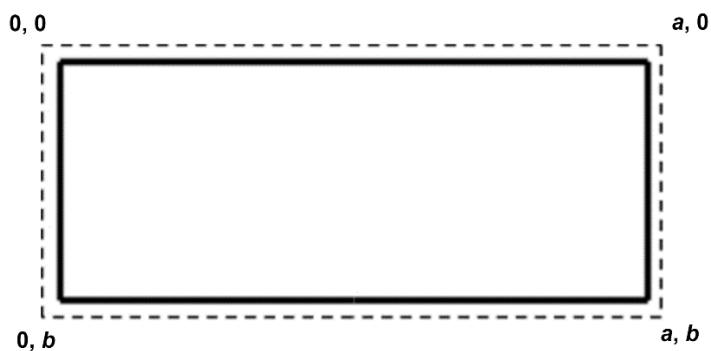


Рисунок 2.7 – Свободное опирание по контуру пластины

При данном условии опирания из глобальной системы уравнений исключаются следующие неизвестные:

Перемещения $w = 0$ во всех узлах на контуре пластины.

В узлах $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(0, b)$, (a, b) $M_x = M_y = 0$.

В узлах на кромке $0a$ и ba $M_y = 0$.

В узлах на кромке $0b$ и ab $M_x = 0$.

2. Жесткое защемление по контуру (рисунок 2.8).



Рисунок 2.8 – Жесткое защемление по контуру пластины

В этом случае прогиб пластины в узлах на контуре пластины равен нулю. Изгибающие моменты M_x и M_y подлежат определению.

Перемещения $w = 0$ во всех узлах по контуру пластины.

3. Два края свободно оперты, два остальных свободны от связей (рисунок 2.9).

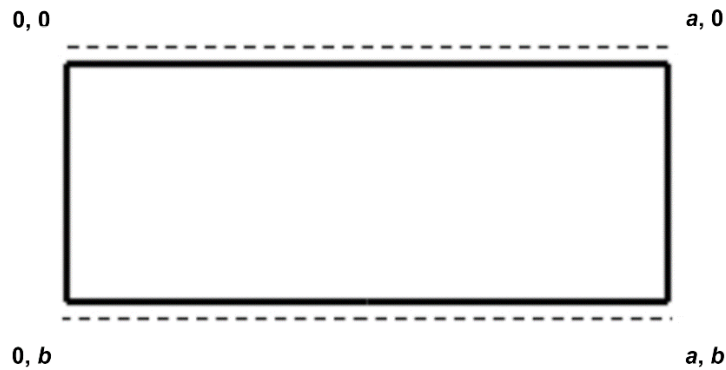


Рисунок 2.9 – Два края пластины свободно оперты, два остальных свободны от связей

При этом условии опирания при внешнем воздействии возникают прогибы по незакрепленным кромкам, прогиб пластины по контурным узлам с шарнирными связями равен нулю могут. Изгибающие моменты M_x и M_y на жестко защемленных краях могут быть определены как ненулевые значения.

Перемещения $w = 0$ в узлах на кромках $0a$ и ba .

В узлах на кромках $0a$ и ba $M_y = 0$.

В узлах на кромках $0b$ и ab $M_x = 0$.

4. Два края свободно оперты, два остальных жестко защемлены (рисунок 2.10).



Рисунок 2.10 – Два края пластины свободно оперты, два остальных жестко защемлены

В этом случае прогиб пластины в узлах, расположенных по контуру равен нулю. Изгибающие моменты M_x и M_y подлежат определению.

Перемещения $w = 0$ во всех узлах по всему контуру пластина.

В узлах на кромках $0a$ и ba $M_y = 0$.

5. Два края жестко защемлены, две остальные свободны от связей (рисунок 2.11)



Рисунок 2.11 – Два края пластины жестко защемлены, два остальных свободны от связей

При этом условии опирания при внешнем воздействии возникают прогибы по незакрепленным кромкам, прогиб пластины в узлах, расположенных на кромках с жесткими связями, равен нулю. Изгибающие моменты M_x и M_y на жестко закрепленных кромках подлежат определению. Изгибающие моменты M_x по незакрепленным кромкам необходимо исключить из глобальной системы уравнений.

Перемещения $w = 0$ в узлах на кромках $0a$ и ba .

В узлах на кромках $0b$ и ab $M_x = 0$.

6. Один край жестко защемлен, остальные свободны от связей (рисунок 2.12).

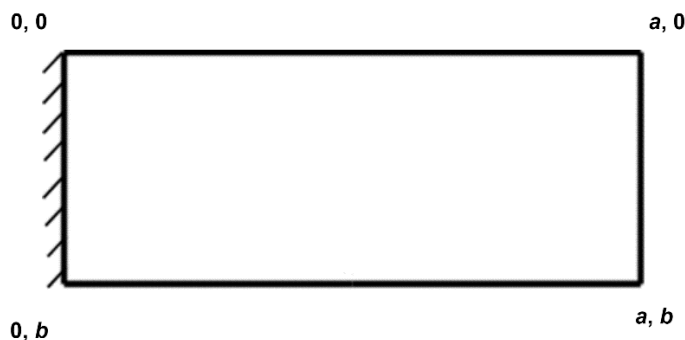


Рисунок 2.12 – Один край пластины жестко защемлен, остальные свободны от связей

Во всех узлах жестко защемленной кромки прогиб равен нулю, в то время как незакрепленные кромки могут иметь ненулевой прогиб. Изгибающие моменты M_x и M_y исключаются из глобальной системы уравнений по условиям:

Перемещения $w = 0$ на кромке $0b$.

На кромках $0a$ и ba $M_y = 0$.

В узлах на кромке ab $M_x = 0$.

7. Пластина имеет шарнирное опирание по 4 угловым точкам (рисунок 2.13)

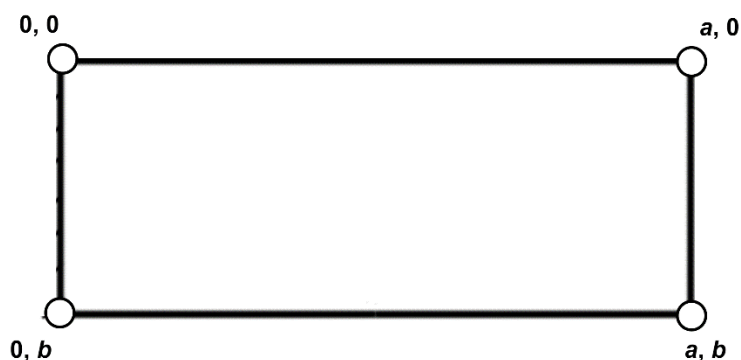


Рисунок 2.13 – Шарнирное опирание по 4 угловым точкам пластины

В этом случае прогибы могут возникать в узлах, расположенных по всему контуру пластины, за исключением узлов опирания. При этом моменты подлежат определению в зависимости от приложенных внешних сил.

В узлах $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(0, b)$, (a, b) $w = 0$.

В узлах $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(0, b)$, (a, b) $M_x = M_y = 0$.

На кромках $0a$ и ba $M_y = 0$. На кромках $0b$ и ab $M_x = 0$.

Каждое из этих условий имеет критическое значение при выполнении численных расчетов пластин по МКЭ в форме КСМ.

2.4.2 Расчёт изгибаемой шарнирно опертой пластины

В качестве первого примера выполнен численный расчет тонкой изгибаемой квадратной пластины, имеющей шарнирное опирание по контуру, на действие равномерно распределенной по площади нагрузки (рисунок 2.14). Расчет был выполнен с использованием предложенных алгоритмов при сгущении конечно-элементной сетки.

При выполнении численного расчета были приняты следующие исходные данные:

$$a=b=1\text{м}; h=0,0082\text{м}; \mu_x = \mu_y = 0,3; E=198\text{ ГПа}; q=9,80665\text{кН/м}^2$$

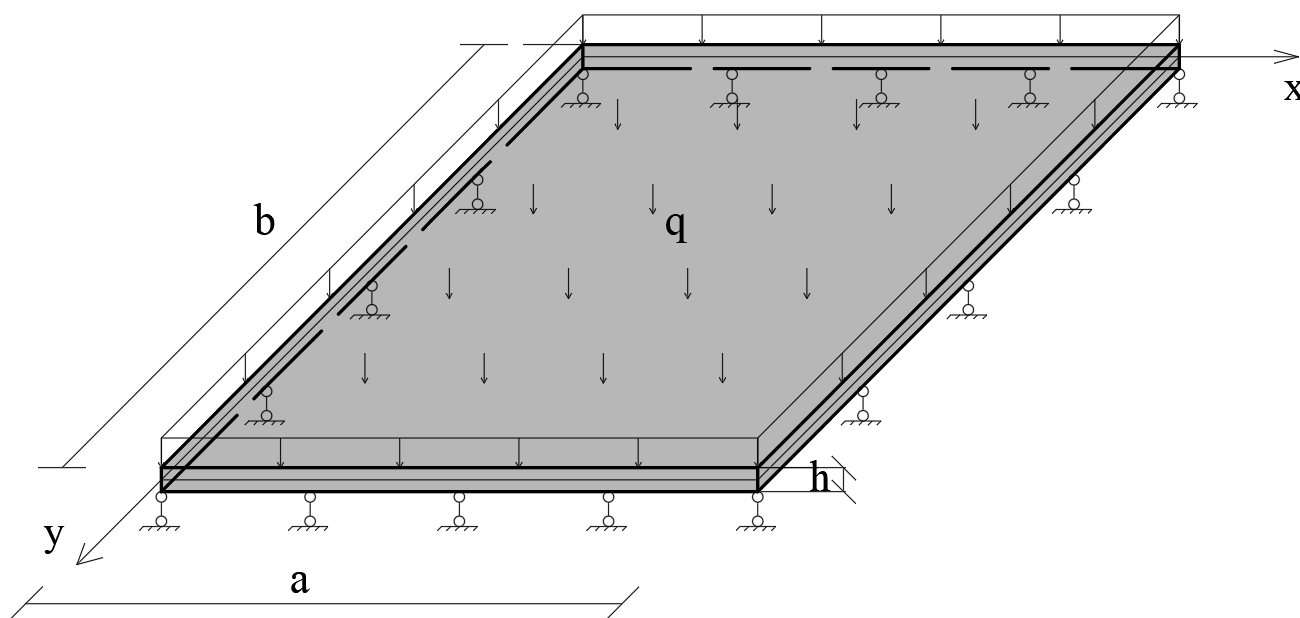


Рисунок 2.14 – Расчетная схема шарнирно опертой по контуру пластины

Численные расчеты были выполнены по МКЭ в форме КСМ в трех вариантах: без редукции основных неизвестных, и с использованием

предложенных редуционных алгоритмов с билинейной интерполяцией (БЛ интерполяция) и интерполяции с использованием неполного бикубического полинома (НБКП интерполяция).

Рассмотрим вариант, когда в качестве крупного разбиения используется КЭ-сетка 4×4 , а мелкого 8×8 .

В соответствии с общей физической моделью (рисунок 2.14) представлена расчетная схема пластины с нумерацией кинематических неизвестных w при крупном разбиении 4×4 и мелком разбиении сеткой 8×8 (рисунок 2.15).

Нумерация неизвестных производится в следующей последовательности: сначала нумеруются все перемещения в узлах, затем – все изгибающие моменты, в той же последовательности узлов.

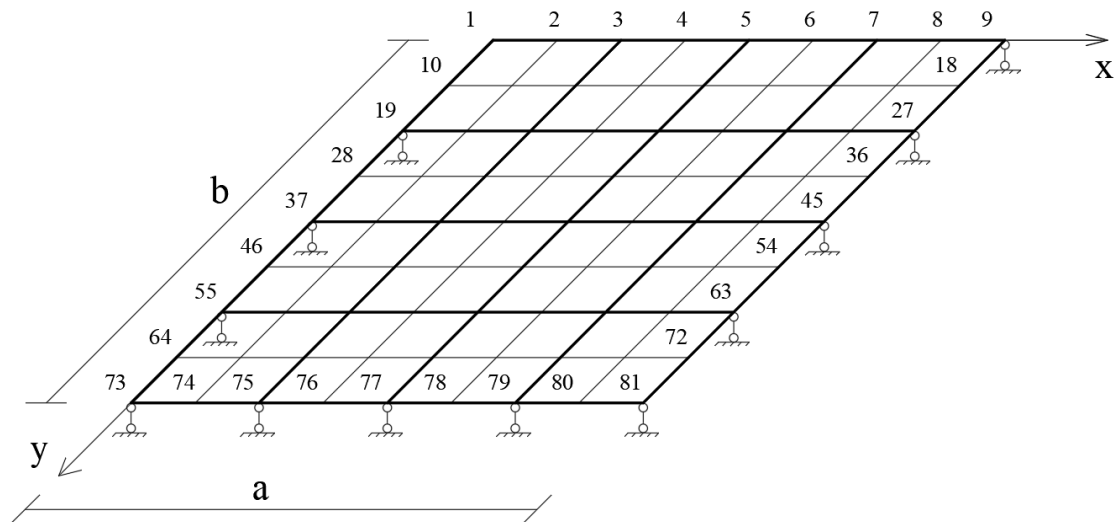


Рисунок 2.15 – Нумерация кинематических неизвестных

Глобальная система уравнений смешанного метода имеет при сетке 8×8 243 неизвестных: 81 неизвестных вертикальных перемещений $(q_1, \dots, q_{81})$, 162 неизвестных изгибающих моментов $M_x(x, y)$, $M_y(x, y)$, по два в каждом из узлов сетки $(\tilde{q}_{82}, \dots, \tilde{q}_{243})$.

Для их нахождения имеем систему из 243 разрешающих уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 R_1 = r_{1,1}q_1 + \dots + r_{1,j}q_j + \dots + r_{1,81}q_{81} + \tilde{\delta}_{1,82}\tilde{q}_{82} + \dots + \tilde{\delta}_{1,j}\tilde{q}_j + \dots + \tilde{\delta}_{1,243}\tilde{q}_{243}, \\
 \dots \\
 R_i = r_{i,1}q_1 + \dots + r_{i,j}q_j + \dots + r_{i,81}q_{81} + \tilde{\delta}_{i,82}\tilde{q}_{82} + \dots + \tilde{\delta}_{i,j}\tilde{q}_j + \dots + \tilde{\delta}_{i,243}\tilde{q}_{243}, \\
 \dots \\
 R_{81} = r_{81,1}q_1 + \dots + r_{81,j}q_j + \dots + r_{81,81}q_{81} + \tilde{\delta}_{81,82}\tilde{q}_{82} + \dots + \tilde{\delta}_{81,j}\tilde{q}_j + \\
 + \dots + \tilde{\delta}_{81,243}\tilde{q}_{243}, \\
 \dots \\
 \Delta_{82} = r_{82,1}q_1 + \dots + r_{82,j}q_j + \dots + r_{82,81}q_{81} + \tilde{\delta}_{82,82}\tilde{q}_{82} + \dots + \tilde{\delta}_{82,j}\tilde{q}_j + \\
 + \dots + \tilde{\delta}_{82,243}\tilde{q}_{243}, \\
 \dots \\
 \Delta_i = r_{i,1}q_1 + \dots + r_{i,j}q_j + \dots + r_{i,81}q_{81} + \tilde{\delta}_{i,82}\tilde{q}_{82} + \dots + \tilde{\delta}_{i,j}\tilde{q}_j + \dots + \tilde{\delta}_{i,243}\tilde{q}_{243}, \\
 \dots \\
 \Delta_{243} = r_{243,1}q_1 + \dots + r_{243,j}q_j + \dots + r_{243,81}q_{81} + \tilde{\delta}_{243,82}\tilde{q}_{82} + \dots + \tilde{\delta}_{243,j}\tilde{q}_j + \\
 + \dots + \tilde{\delta}_{243,243}\tilde{q}_{243}.
 \end{array} \right. \quad (2.20)$$

или в матричном виде:

$$\underset{243 \times 243}{[D]} \underset{243 \times 1}{\left\{ \begin{array}{c} q \\ \tilde{q} \end{array} \right\}} + \underset{243 \times 1}{\left\{ \begin{array}{c} R_F \\ \Delta_F \end{array} \right\}} = \{0\} \quad (2.21)$$

Учет граничных условий производится в соответствии с п 2.4.1.

Система разрешающих уравнений после учета граничных условий в соответствии с нумерацией узлов, представленной на рисунке 2.16, и соответствующих им уравнений имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{11} = r_{11,11}q_{11} + \dots + r_{11,j}q_j + \dots + r_{11,71}q_{71} + \tilde{\delta}_{11,102}\tilde{q}_{102} + \dots + \tilde{\delta}_{11,j}\tilde{q}_j + \\ + \dots + \tilde{\delta}_{11,223}\tilde{q}_{223}, \\ \dots \\ R_i = r_{i,11}q_{11} + \dots + r_{i,j}q_j + \dots + r_{i,71}q_{71} + \tilde{\delta}_{i,102}\tilde{q}_{102} + \dots + \tilde{\delta}_{i,j}\tilde{q}_j + \dots + \tilde{\delta}_{i,223}\tilde{q}_{223}, \\ \dots \\ R_{71} = r_{71,11}q_{11} + \dots + r_{71,j}q_j + \dots + r_{71,71}q_{71} + \tilde{\delta}_{71,102}\tilde{q}_{102} + \dots + \tilde{\delta}_{71,i}\tilde{q}_i + \\ + \dots + \tilde{\delta}_{71,223}\tilde{q}_{223}, \\ \dots \\ \Delta_{102} = r_{102,11}q_{11} + \dots + r_{102,j}q_j + \dots + r_{102,71}q_{71} + \tilde{\delta}_{102,102}\tilde{q}_{102} + \dots + \tilde{\delta}_{102,i}\tilde{q}_i + \\ + \dots + \tilde{\delta}_{102,223}\tilde{q}_{223}, \\ \dots \\ \Delta_i = r_{i,11}q_{11} + \dots + r_{i,j}q_j + \dots + r_{i,71}q_{71} + \tilde{\delta}_{i,102}\tilde{q}_{102} + \dots + \tilde{\delta}_{i,j}\tilde{q}_j + \\ + \dots + \tilde{\delta}_{i,223}\tilde{q}_{223}, \\ \dots \\ \Delta_{223} = r_{223,11}q_{11} + \dots + r_{223,j}q_j + \dots + r_{223,71}q_{71} + \tilde{\delta}_{223,102}\tilde{q}_{102} + \dots + \tilde{\delta}_{223,j}\tilde{q}_j + \\ + \dots + \tilde{\delta}_{223,223}\tilde{q}_{223}. \end{array} \right. \quad (2.22)$$

или в матричном виде:

$$\left[D \right]_{147 \times 147} \left\{ \begin{array}{c} q \\ \tilde{q} \end{array} \right\}_{147 \times 1} + \left\{ \begin{array}{c} R_F \\ \Delta_F \end{array} \right\}_{147 \times 1} = \{0\}. \quad (2.23)$$

В итоге после учета граничных условий глобальная система уравнений смешанного метода имеет при сетке 8x8 147 неизвестных. 49 неизвестных вертикальных перемещений $(q_1, \dots, q_{49})$, 98 неизвестных изгибающих моментов $M_x(x, y)$, $M_y(x, y)$, по два в каждом из внутриконтурных узлов сетки $(\tilde{q}_{50}, \dots, \tilde{q}_{147})$.

После нахождения коэффициентов интерполяционного полинома, связывающего основные неизвестные в узлах, значения в узлах мелкой сетки,

выраженные через значения тех же узловых неизвестных крупной сетки вводятся в систему уравнений МКЭ в форме КСМ.

Редуцированная глобальная система разрешающих уравнений записывается в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{21} = r_{21,21}q_{21} + \dots + r_{21,J}q_J + \dots + r_{21,61}q_{61} + \tilde{\delta}_{21,122}\tilde{q}_{122} + \dots + \tilde{\delta}_{21,J}\tilde{q}_J + \\ + \dots + \tilde{\delta}_{21,203}\tilde{q}_{203}, \\ \dots \\ R_I = r_{I,1}q_{21} + \dots + r_{I,J}q_J + \dots + r_{I,61}q_{61} + \tilde{\delta}_{I,122}\tilde{q}_{122} + \dots + \tilde{\delta}_{I,J}\tilde{q}_J + \dots + \tilde{\delta}_{I,203}\tilde{q}_{203}, \\ \dots \\ R_{61} = r_{61,1}q_{21} + \dots + r_{61,J}q_J + \dots + r_{61,61}q_{61} + \tilde{\delta}_{61,122}\tilde{q}_{122} + \dots + \tilde{\delta}_{61,J}\tilde{q}_J + \\ + \dots + \tilde{\delta}_{61,203}\tilde{q}_{203}, \\ \dots \\ \Delta_{122} = r_{122,1}q_{21} + \dots + r_{122,J}q_J + \dots + r_{122,61}q_{61} + \tilde{\delta}_{122,122}\tilde{q}_{122} + \dots + \tilde{\delta}_{122,J}\tilde{q}_J + \\ + \dots + \tilde{\delta}_{122,203}\tilde{q}_{203}, \\ \dots \\ \Delta_I = r_{I,1}q_{21} + \dots + r_{I,J}q_J + \dots + r_{I,61}q_{61} + \tilde{\delta}_{I,122}\tilde{q}_{122} + \dots + \tilde{\delta}_{I,J}\tilde{q}_J + \\ + \dots + \tilde{\delta}_{I,203}\tilde{q}_{203}, \\ \dots \\ \Delta_{203} = r_{203,1}q_{21} + \dots + r_{203,J}q_J + \dots + r_{203,61}q_{61} + \tilde{\delta}_{203,122}\tilde{q}_{122} + \dots + \tilde{\delta}_{203,J}\tilde{q}_J + \\ + \dots + \tilde{\delta}_{203,203}\tilde{q}_{203}. \end{array} \right. \quad (2.24)$$

или в матричном виде:

$$[D]_{27 \times 27}^* \begin{Bmatrix} q \\ \tilde{q} \end{Bmatrix}_{27 \times 1} + \begin{Bmatrix} R_F \\ \Delta_F \end{Bmatrix}_{27 \times 1} = \{0\}. \quad (2.25)$$

В итоге получена редуцированная глобальная система уравнений смешанного метода к сетке 4x4, которая имеет 27 неизвестных: 9 неизвестных вертикальных перемещений $(q_{21}, q_{23}, q_{25}, q_{39}, q_{41}, q_{43}, q_{57}, q_{59}, q_{61})$, 18 неизвестных изгибающих моментов $M_x(x, y)$, $M_y(x, y)$, по два в каждом из внутриконтурных узлов сетки $(\tilde{q}_{122}, \tilde{q}_{123}, \dots, \tilde{q}_{202}, \tilde{q}_{203})$.

Численные расчеты по МКЭ в форме КСМ без редукции основных неизвестных, выполнены для разбиений 4x4, 6x6, 8x8, 10x10. При таких же разбиениях выполнялись расчеты в ПК ЛИРА.

При вычислениях с использованием предложенных редукционных алгоритмов с применением билинейной интерполяции и интерполяции с использованием неполного бикубического полинома для редукции использовались следующие комбинации мелких и крупных сеток:

- Мелкая сетка 8x8 → Крупная сетка 4x4 (обозначение: 4x4).
- Мелкая сетка 12x12 → Крупная сетка 6x6 (обозначение: 6x6).
- Мелкая сетка 16x16 → Крупная сетка 8x8 (обозначение: 8x8).
- Мелкая сетка 20x20 → Крупная сетка 10x10 (обозначение: 10x10).

Результаты выполненных расчетов представлены в таблице 2.3 (значения прогиба w в центральном узле $(a/2, b/2)$) и таблице 2.4 (значения изгибающих моментов $M_x = M_y$, в центральном узле $(a/2, b/2)$). Также в этой таблице приведено аналитическое решение [69], принимаемое за точное.

Таблица 2.3 – Численные значения прогиба w в центральном узле $(a/2, b/2)$

$w(a/2, b/2)$, мм					
Метод решения	КЭ-сетка				AP
	4x4	6x6	8x8	10x10	
КСМ МКЭ (без редуцирования СЛАУ)	4,125	4,111	4,09	4,08	4.06
КСМ МКЭ (БЛ интерполяция)	4,09	4,077	4,071	4,068	
КСМ МКЭ (НБКП интерполяция)	4,165	4,111	4,09	4,08	
МКЭ в форме метода перемещений	4,325	4,18	4,13	4,11	

Таблица 2.4 – Численные значения изгибающих моментов $M_x = M_y$, в центральном узле ($a/2, b/2$)

$M_x(a/2, b/2)$, кН·м					
Метод решения	КЭ-сетка				АР
	4x4	6x6	8x8	10x10	
КСМ МКЭ (без редуцирования СЛАУ)	0,4844	0,4756	0,4727	0,4717	0,4697
КСМ МКЭ (БЛ интерполяция)	0,4913	0,4786	0,4746	0,4727	
КСМ МКЭ (НБКП интерполяция)	0,4776	0,4737	0,4717	0,4707	
МКЭ в форме метода перемещений	0,4099	0,4433	0,4550	0,4599	

По результатам численных расчетов построены графики сходимости прогиба w в центральном узле ($a/2, b/2$) (рисунок 2.16) и изгибающих моментов $M_x = M_y$ в центральном узле ($a/2, b/2$) (рисунок 2.17) к аналитическому решению, принимаемому за точное для оценки влияния дискретизации на точность численного решения.

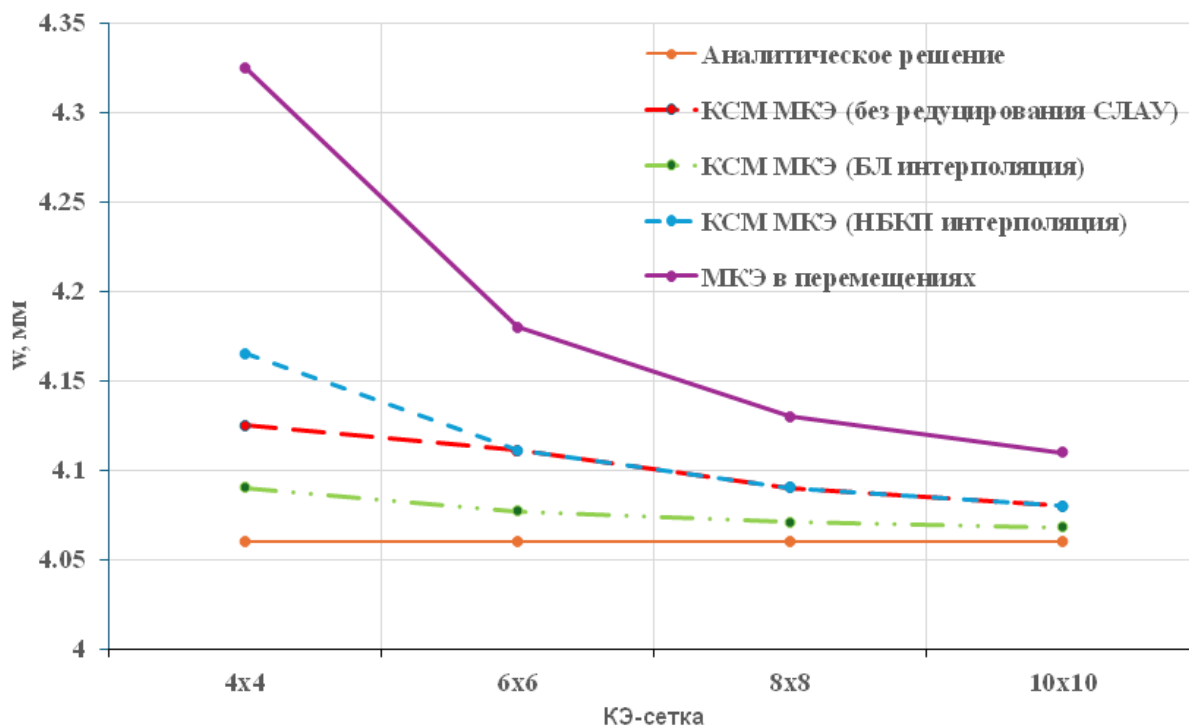


Рисунок 2.16 – Сходимость численных значений прогибов (w) при сгущении конечно-элементной сетки

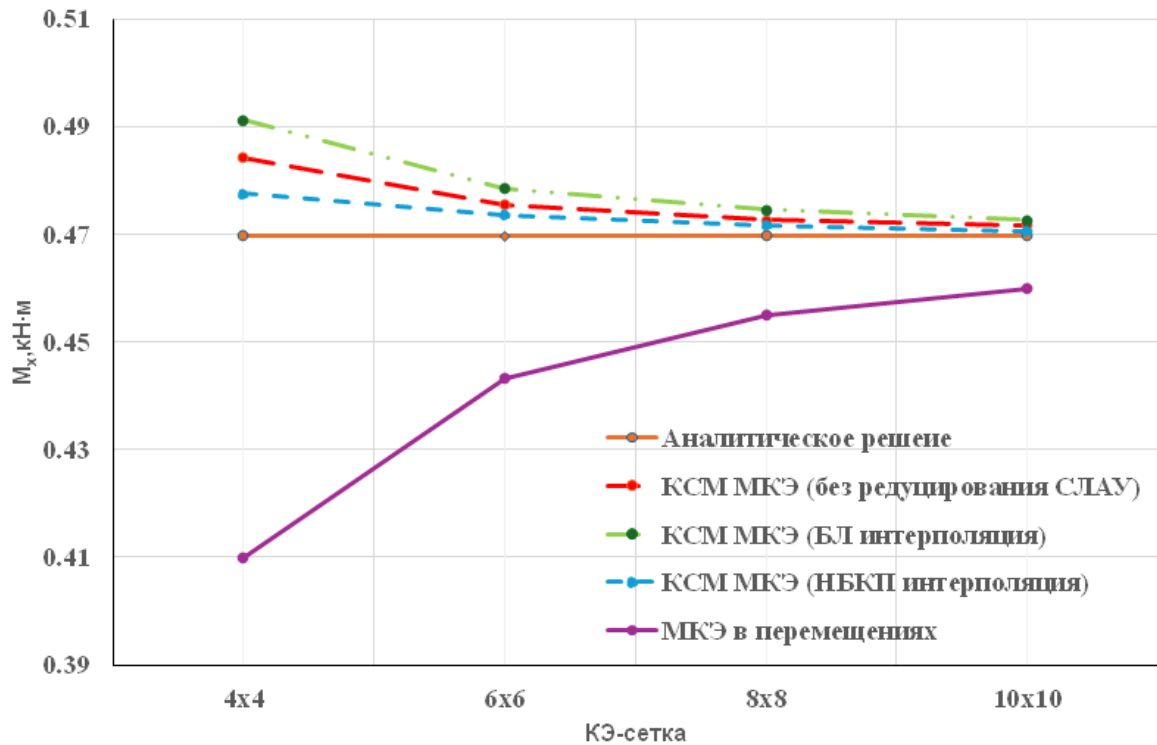


Рисунок 2.17 – Сходимость численных значений изгибающих моментов (M_x) при сгущении конечно-элементной сетки

На основе результатов расчета редуцированной системы уравнений МКЭ в форме КСМ ($[D^{Линт}]_{27 \times 27}$) относительно узлов крупной сетки и результатов полученных на обратном ходе алгоритма построены изополя моментов (M_x) (рисунок 2.18).

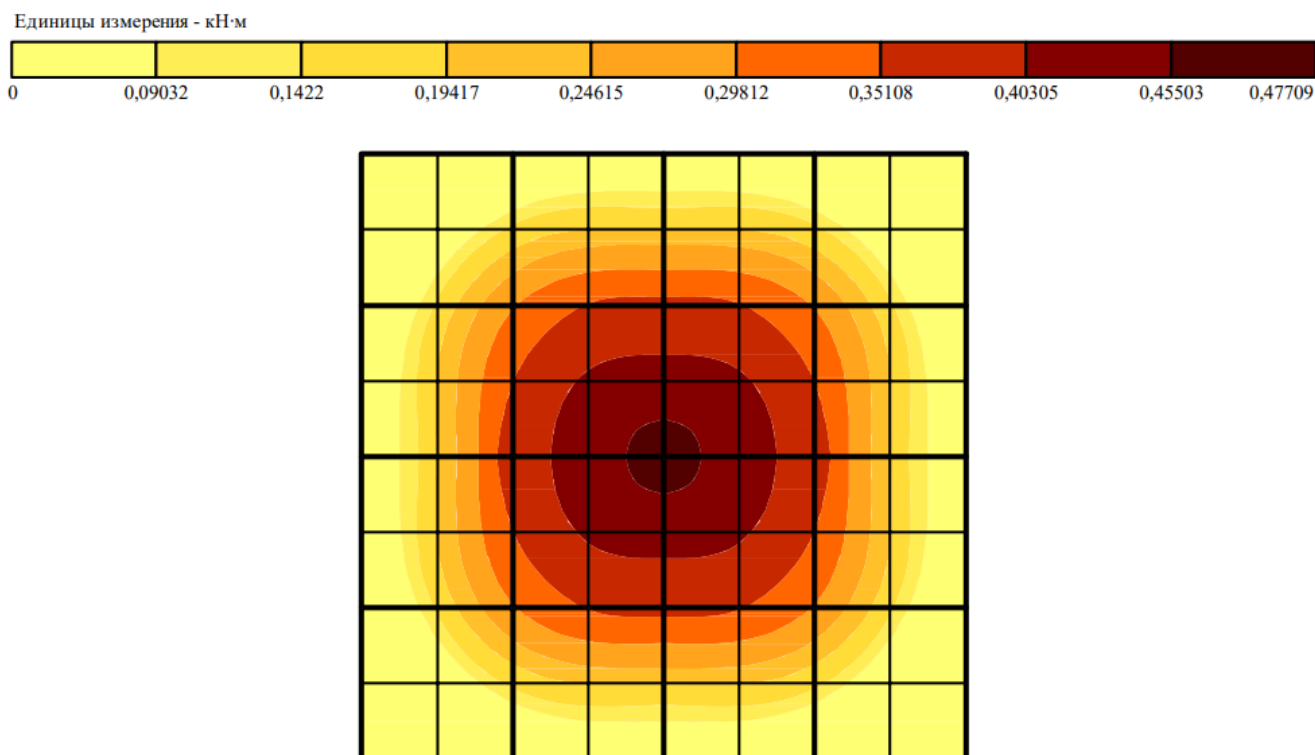


Рисунок 2.18 – Изополя изгибающего момента (M_x), полученные на основе решения редуцированной системы уравнений МКЭ в форме КСМ

Анализ представленных результатов позволяет сделать следующие выводы:

1. Результаты, полученные с использованием билинейной интерполяции и интерполяции с использованием неполного бикубического полинома, демонстрируют близость численных значений расчетных величин (прогибы и изгибающие моменты). Это свидетельствует о том, что оба метода обеспечивают адекватное вычисление искомых величин, что дает возможность выбирать наиболее удобный алгоритм в зависимости от конкретной задачи или требований к вычислительным затратам.

2. Порядок редуцированной системы уравнений для сетки 4×4 составил $n = 27$, в то время как для полной системы без редукции (система на сетке 8×8) он равен $n = 147$. Это существенное снижение порядка системы подтверждает эффективность редукционных алгоритмов.

2.4.3 Расчёт изгибаемой жестко защемленной пластины

В качестве второго примера выполнен численный расчет тонкой изгибаемой защемлённой по контуру пластины, нагруженной равномерно распределённой нагрузкой (рисунок 2.19). Расчет был выполнен с использованием предложенных алгоритмов для двух вариантов разбиения пластины на конечно-элементные сетки. При выполнении численных расчетов были приняты следующие исходные данные:

$$a=b=1\text{м}; h=0,0082\text{м}; \mu_x = \mu_y = 0,3; E=198 \text{ ГПа}; q=9,80665\text{кН/м}^2$$

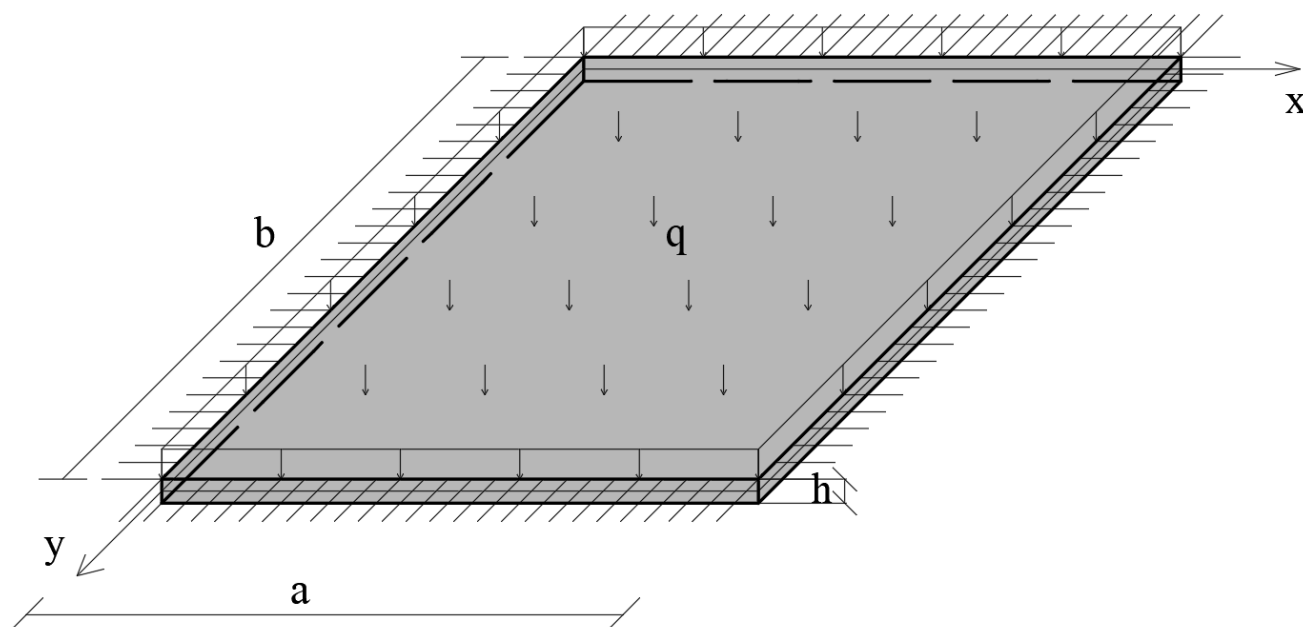


Рисунок 2.19 – Жестко защемленная по контуру тонкая изгибаемая пластинка

Задача №1. На пластину наносятся две конечно-элементные сетки: сетка с крупными ячейками 4x4 и сетка с мелкими ячейками 8x8.

С использованием предложенных алгоритмов выполнено исследование напряженно-деформированного состояния пластины как для исходной, так и для редуцированной расчетной схемы.

Согласно общей физической модели составлена расчетная схема пластины с нумерацией кинематических неизвестных w (рисунок 2.20) и силовых

неизвестных M_x, M_y (рисунок 2.21) для первого варианта конечно-элементной сетки.

Нумерация неизвестных условно показана только для узлов, находящихся на контуре пластины.

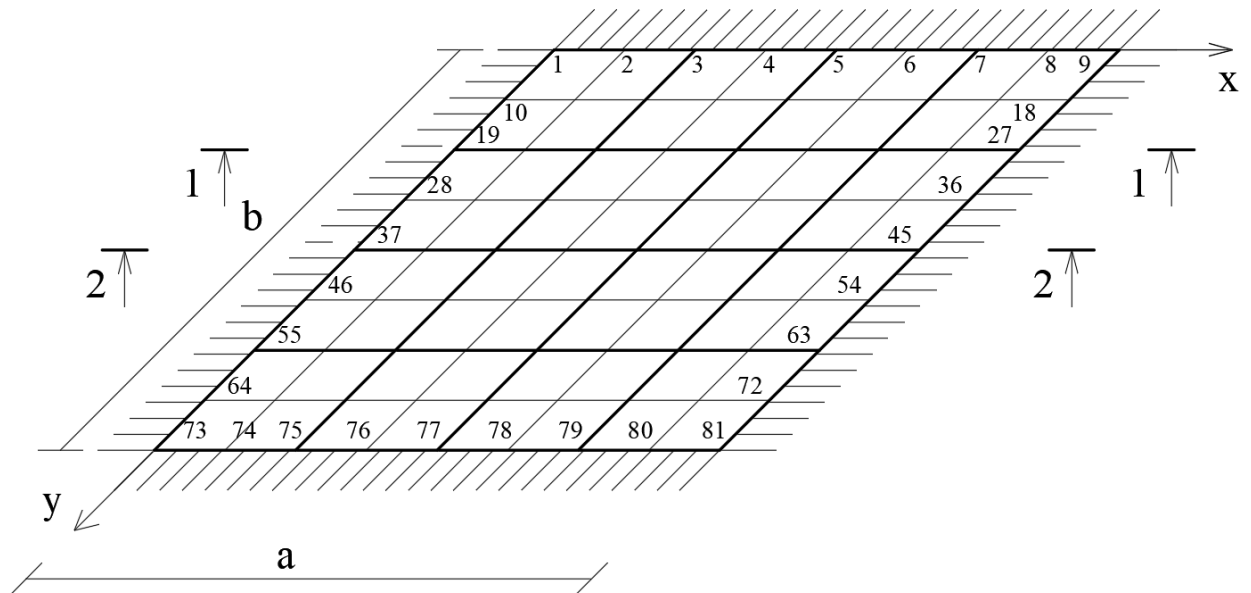


Рисунок 2.20 – Пластина, представленная совокупностью конечных элементов с крупной КЭ сеткой 4x4 и мелкой КЭ сеткой 8x8 с нумерацией кинематических неизвестных w

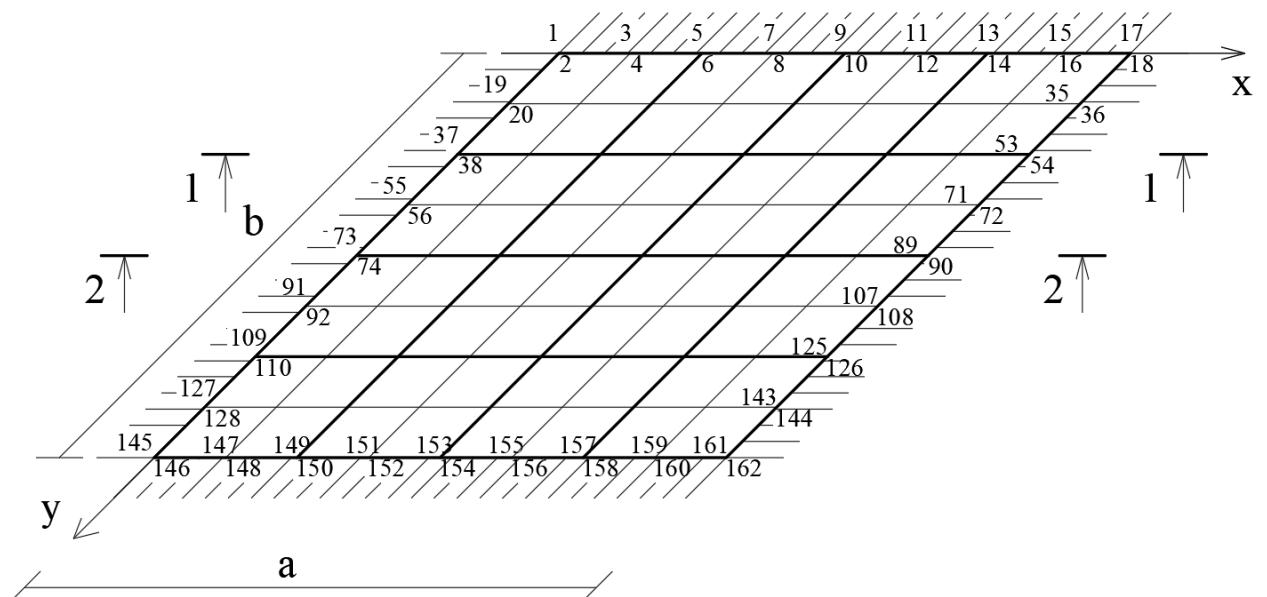


Рисунок 2.21 – Пластина, представленная совокупностью конечных элементов с крупной КЭ сеткой 4x4 и мелкой КЭ сеткой 8x8 с нумерацией силовых неизвестных

Для глобальной системы уравнений смешанного метода при сетке 8x8 имеется 243 неизвестных: 81 неизвестных вертикальных перемещений $(q_1, \dots, q_{81})$, 162 неизвестных изгибающих моментов $M_x(x, y)$, $M_y(x, y)$, по два в каждом из узлов сетки $(\tilde{q}_{82}, \dots, \tilde{q}_{243})$.

Для решения этой задачи имеется система из 243 разрешающих уравнений.

Учет граничных условий выполняется в соответствии с пунктом 2.4.1.

После учета граничных условий система разрешающих уравнений, согласно нумерации узлов (рисунок 2.20) и соответствующих им уравнений, имеет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{11} = r_{11,11}q_{11} + \dots + r_{11,j}q_j + \dots + r_{11,71}q_{71} + \tilde{\delta}_{11,82}\tilde{q}_{82} + \dots + \tilde{\delta}_{11,j}\tilde{q}_j + \\ + \dots + \tilde{\delta}_{11,243}\tilde{q}_{243}, \\ \dots \\ R_i = r_{i,11}q_{11} + \dots + r_{i,j}q_j + \dots + r_{i,71}q_{71} + \tilde{\delta}_{i,82}\tilde{q}_{82} + \dots + \tilde{\delta}_{i,j}\tilde{q}_j + \\ + \dots + \tilde{\delta}_{i,243}\tilde{q}_{243}, \\ \dots \\ R_{71} = r_{71,11}q_{11} + \dots + r_{71,j}q_j + \dots + r_{71,71}q_{71} + \tilde{\delta}_{71,82}\tilde{q}_{82} + \dots + \tilde{\delta}_{71,i}\tilde{q}_i + \\ + \dots + \tilde{\delta}_{71,243}\tilde{q}_{243}, \\ \dots \\ \Delta_{82} = r_{82,11}q_{11} + \dots + r_{82,j}q_j + \dots + r_{82,71}q_{71} + \tilde{\delta}_{82,82}\tilde{q}_{82} + \dots + \tilde{\delta}_{82,i}\tilde{q}_i + \\ + \dots + \tilde{\delta}_{82,243}\tilde{q}_{243}, \\ \dots \\ \Delta_i = r_{i,11}q_{11} + \dots + r_{i,j}q_j + \dots + r_{i,71}q_{71} + \tilde{\delta}_{i,82}\tilde{q}_{82} + \dots + \tilde{\delta}_{i,j}\tilde{q}_j + \\ + \dots + \tilde{\delta}_{i,243}\tilde{q}_{243}, \\ \dots \\ \Delta_{243} = r_{243,11}q_{11} + \dots + r_{243,j}q_j + \dots + r_{243,71}q_{71} + \tilde{\delta}_{243,82}\tilde{q}_{82} + \\ + \dots + \tilde{\delta}_{243,j}\tilde{q}_j + \dots + \tilde{\delta}_{243,243}\tilde{q}_{243}. \end{array} \right. \quad (2.26)$$

или в матричном виде:

$$[D]_{211 \times 211} \begin{Bmatrix} q \\ \tilde{q} \end{Bmatrix}_{211 \times 1} + \begin{Bmatrix} R_F \\ \Delta_F \end{Bmatrix}_{211 \times 1} = \{0\}, \quad (2.27)$$

В итоге после учета граничных условий глобальная система уравнений смешанного метода имеет при сетке 8x8 211 неизвестных: 49 неизвестных вертикальных перемещений $(q_1, \dots, q_{49})$, 162 неизвестных изгибающих моментов $M_x(x, y)$, $M_y(x, y)$, по два в каждом из контурных и внутриконтурных узлов сетки $(\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_{162})$.

После подстановки в систему уравнений значений неизвестных в узлах мелкой сетки, выраженных через значения неизвестных в узлах крупной сетки производится переход к редуцированной СЛАУ.

Редуцированная глобальная система разрешающих уравнений записывается в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{21} = r_{21,21}q_{21} + \dots + r_{21,J}q_J + \dots + r_{21,61}q_{61} + \tilde{\delta}_{21,122}\tilde{q}_{122} + \dots + \tilde{\delta}_{21,J}\tilde{q}_J + \dots + \tilde{\delta}_{21,203}\tilde{q}_{203}, \\ \dots \\ R_I = r_{I,1}q_{21} + \dots + r_{I,J}q_J + \dots + r_{I,61}q_{61} + \tilde{\delta}_{I,122}\tilde{q}_{122} + \dots + \tilde{\delta}_{I,J}\tilde{q}_J + \dots + \tilde{\delta}_{I,203}\tilde{q}_{203}, \\ \dots \\ R_{61} = r_{61,1}q_{21} + \dots + r_{61,J}q_J + \dots + r_{61,61}q_{61} + \tilde{\delta}_{61,122}\tilde{q}_{122} + \dots + \tilde{\delta}_{61,J}\tilde{q}_J + \dots + \tilde{\delta}_{61,203}\tilde{q}_{203}, \\ \dots \\ \Delta_{82} = r_{82,11}q_{11} + \dots + r_{82,J}q_J + \dots + r_{82,71}q_{71} + \tilde{\delta}_{82,82}\tilde{q}_{82} + \dots + \tilde{\delta}_{82,J}\tilde{q}_J + \dots + \tilde{\delta}_{82,243}\tilde{q}_{243}, \\ \dots \\ \Delta_I = r_{I,11}q_{11} + \dots + r_{I,J}q_J + \dots + r_{I,71}q_{71} + \tilde{\delta}_{I,82}\tilde{q}_{82} + \dots + \tilde{\delta}_{I,J}\tilde{q}_J + \dots + \tilde{\delta}_{I,243}\tilde{q}_{243}, \\ \dots \\ \Delta_{243} = r_{243,11}q_{11} + \dots + r_{243,J}q_J + \dots + r_{243,71}q_{71} + \tilde{\delta}_{243,82}\tilde{q}_{82} + \dots + \tilde{\delta}_{243,J}\tilde{q}_J + \dots + \tilde{\delta}_{243,243}\tilde{q}_{243}. \end{array} \right. \quad (2.28)$$

или в матричном виде:

$$[D]_{59 \times 59}^* \left\{ \begin{array}{c} q \\ \tilde{q} \end{array} \right\}_{59 \times 1} + \left\{ \begin{array}{c} R_F \\ \Delta_F \end{array} \right\}_{59 \times 1} = \{0\}, \quad (2.29)$$

В итоге получена редуцированная глобальная система уравнений смешанного метода к сетке 4x4, которая имеет 59 неизвестных: 9 неизвестных вертикальных перемещений $(q_{21}, q_{23}, q_{25}, q_{39}, q_{41}, q_{43}, q_{57}, q_{59}, q_{61})$, 50 неизвестных изгибающих моментов $M_x(x, y)$, $M_y(x, y)$, по два в каждом из внутриконтурных узлов сетки $(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_{242}, \tilde{q}_{243})$.

В таблице 2.5 представлены результаты численного расчета прогибов узлов $w \cdot 10^3 \text{ м}$ сечений 1-1 и 2-2 этой пластины, полученные как на основе МКЭ в форме КСМ без учета редукции основных неизвестных, так и с использованием предложенного алгоритма. Также в таблице приведено аналитическое решение, принимаемое за точное.

Следует отметить, что сравниваются результаты расчетов по редуцированной и нередуцированной расчетной схеме одинакового порядка ($n=59$).

Таблица 2.5 – Значения прогибов узлов сечений 1-1 и 2-2 $w \cdot 10^3 \text{ м}$

	Номер Узла									
	Сечение 1-1					Сечение 2-2				
	1	2	3	4	5	10	11	12	13	14
Аналитическое решение	0	0,172	0,462	0,682	0,761	0	0,279	0,761	1,134	1,260
МКЭ в форме КСМ с учетом редукции (КЭ сетка 4x4)	0	0,263	0,527	0,706	0,885	0	0,442	0,885	1,189	1,493
МКЭ в форме КСМ без редукции (4x4)	0	-	0,529	-	0,892	0	-	0,892	-	1,516
МКЭ в форме КСМ без редукции (8x8)	0	0,179	0,484	0,716	0,800	0	0,293	0,800	1,193	1,336

В таблице 2.6 представлены результаты численного расчета изгибающих моментов $M_x \cdot 10^2 \text{ кН} \cdot \text{м}$ в узлах сечений 1-1 и 2-2 этой пластины, выполненные на основе предложенных алгоритмов редуцирования СЛАУ, и аналитическое решение, принимаемое за точное.

Таблица 2.6 – Значения изгибающих моментов $M_x \cdot 10^2 \text{ кН} \cdot \text{м}$ в узлах сечений 1-1 и 2-2

	Номер Узла									
	Сечение 1-1					Сечение 2-2				
	1	2	3	4	5	10	11	12	13	14
Аналитическое решение	-31,675	-5,531	6,463	11,229	12,425	-50,308	-9,816	10,797	19,996	22,653
МКЭ в форме КСМ с учетом редукции (КЭ сетка 4x4)	-28,292	-9,052	10,179	13,386	16,603	-47,229	-15,259	16,711	22,447	28,184
МКЭ в форме КСМ без редукции (4x4)	-28,243	-	10,199	-	16,328	-45,777	-	16,524	-	27,547
МКЭ в форме КСМ без редукции (8x8)	-30,567	-4,688	7,355	12,180	13,376	-49,386	-8,493	12,141	21,261	23,791

Задача №2. На пластину наносятся две конечно-элементные сетки: сетка с крупными ячейками 8x8 и сетка с мелкими ячейками 16x16 (рисунок 2.22).

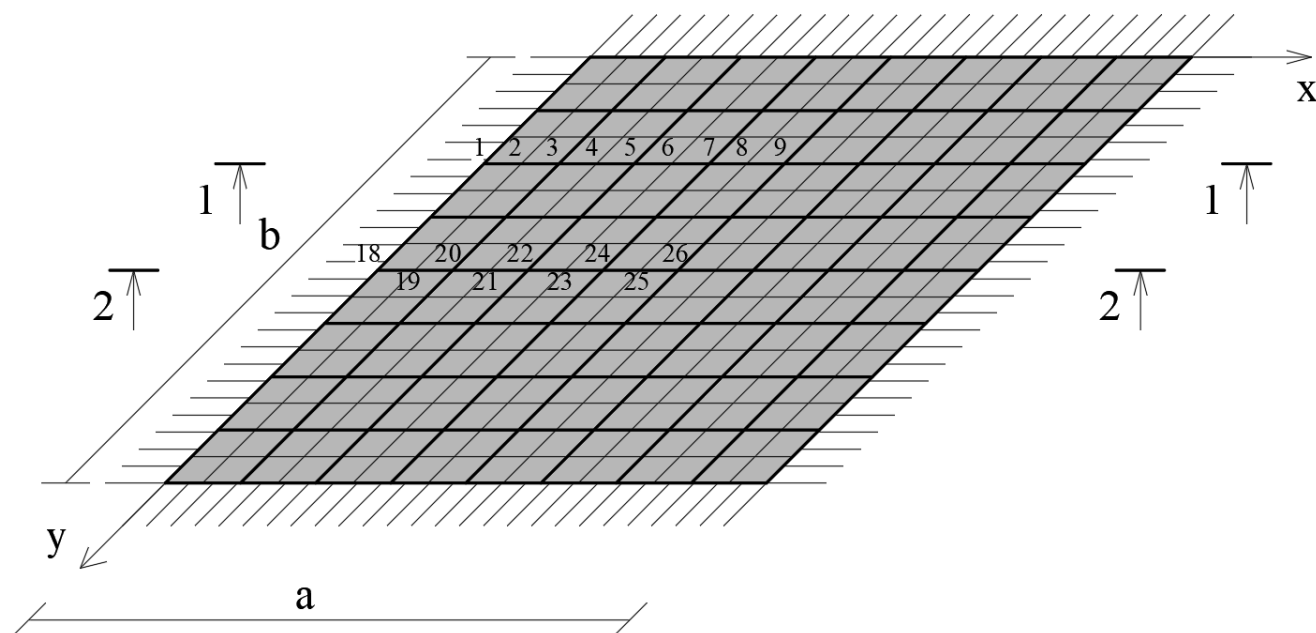


Рисунок 2.22 – Пластина, представленная совокупностью конечных элементов с крупной конечно-элементной сеткой 8x8 и мелкой конечно-элементной сеткой 16x16

Глобальная система уравнений смешанного метода имеет при сетке 16x16 867 неизвестных: 289 неизвестных вертикальных перемещений $(q_1, \dots, q_{289})$, 578 неизвестных изгибающих моментов $M_x(x, y)$, $M_y(x, y)$, по два в каждом из узлов сетки $(\tilde{q}_{290}, \dots, \tilde{q}_{867})$.

Для их нахождения имеем систему из 867 разрешающих уравнений:

$$\underset{867 \times 867}{[D]} \underset{867 \times 1}{\begin{Bmatrix} q \\ \tilde{q} \end{Bmatrix}} + \underset{867 \times 1}{\begin{Bmatrix} R_F \\ \Delta_F \end{Bmatrix}} = \{0\}, \quad (2.30)$$

Система разрешающих уравнений после учета граничных условий имеет вид:

$$\underset{803 \times 803}{[D]} \underset{803 \times 1}{\begin{Bmatrix} q \\ \tilde{q} \end{Bmatrix}} + \underset{803 \times 1}{\begin{Bmatrix} R_F \\ \Delta_F \end{Bmatrix}} = \{0\}, \quad (2.31)$$

Редуцированная глобальная система разрешающих уравнений записывается в виде:

$$\underset{211 \times 211}{[D]}^* \underset{211 \times 1}{\begin{Bmatrix} q \\ \tilde{q} \end{Bmatrix}} + \underset{211 \times 1}{\begin{Bmatrix} R_F \\ \Delta_F \end{Bmatrix}} = \{0\}, \quad (2.32)$$

В итоге получена редуцированная глобальная система уравнений смешанного метода к сетке 8x8, которая имеет 211 неизвестных: 49 неизвестных вертикальных перемещений $(q_{37}, \dots, q_{253})$, 162 неизвестных изгибающих моментов $M_x(x, y)$, $M_y(x, y)$, по два в каждом из узлов сетки $(\tilde{q}_{226}, \tilde{q}_{227}, \dots, \tilde{q}_{802}, \tilde{q}_{803})$.

Нумерация неизвестных присвоена согласно нередуцированной расчетной схеме.

В таблице 2.7 представлены результаты численного расчета прогибов узлов $w \cdot 10^3$ м этой пластинки в сечениях 1-1 и 2-2 по предложенным алгоритмам редуцирования СЛАУ с аналитическим решением и решением, полученным на основе МКЭ в форме КСМ без учета редукции для конечно-элементных сеток 8x8 и 16x16.

Таблица 2.7 – Численные значения прогибов узлов $w \cdot 10^3 \text{ м}$

	Номер Узла								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Аналитическое решение	0	0,052	0,172	0,318	0,462	0,587	0,682	0,741	0,761
МКЭ в форме КСМ с учетом редукции (КЭ сетка 8x8)	0	0,089	0,179	0,330	0,482	0,597	0,712	0,754	0,795
МКЭ в форме КСМ без редукции (8x8)	0	-	0,179	-	0,484	-	0,716	-	0,800
МКЭ в форме КСМ без редукции (16x16)	0	0,053	0,174	0,321	0,467	0,593	0,689	0,749	0,769
	Номер Узла								
	18	19	20	21	22	23	24	25	26
Аналитическое решение	0	0,084	0,279	0,520	0,761	0,972	1,134	1,236	1,260
МКЭ в форме КСМ с учетом редукции (КЭ сетка 8x8)	0	0,146	0,291	0,543	0,795	0,991	1,186	1,257	1,328
МКЭ в форме КСМ без редукции (8x8)	0	-	0,293	-	0,800	-	1,193	-	1,336
МКЭ в форме КСМ без редукции (16x16)	0	0,085	0,282	0,526	0,769	0,983	1,147	1,249	1,284

В таблице 4 сопоставлены результаты численного расчета изгибающих моментов $M_x \cdot 10^2 \text{ кН} \cdot \text{м}$ в узлах этой пластины по предложенному алгоритму с аналитическим решением и решением, полученным на основе МКЭ в форме КСМ без учета редукции для конечно-элементных сеток 8x8 и 16x16.

Таблица 2.8 – Численные значения изгибающих моментов $M_x \cdot 10^2 \text{ кН} \cdot \text{м}$

	Номер Узла								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Аналитическое решение	-31,675	-16,220	-5,531	1,706	6,463	9,454	11,229	12,141	12,425
МКЭ в форме КСМ с учетом редукции (КЭ сетка 8x8)	-30,763	-17,721	-4,688	1,353	7,384	9,797	12,199	12,798	13,386
МКЭ в форме КСМ без редукции (8x8)	-30,567	-	-4,688	-	7,355	-	12,180	-	13,376
МКЭ в форме КСМ без редукции (16x16)	-31,450	-16,024	-5,364	1,883	6,649	9,650	11,415	12,337	12,621
	Номер Узла								
	18	19	20	21	22	23	24	25	26
Аналитическое решение	-50,308	-26,890	-9,816	2,363	10,797	16,446	19,996	21,928	22,653
МКЭ в форме КСМ с учетом редукции (КЭ сетка 8x8)	-49,710	-29,155	-8,610	1,785	12,170	16,769	21,369	22,634	23,909
МКЭ в форме КСМ без редукции (8x8)	-49,386	-	-8,493	-	12,141	-	21,261	-	23,791
МКЭ в форме КСМ без редукции (16x16)	-50,112	-26,664	-9,552	2,628	11,072	16,711	20,251	22,183	22,800

На основе результатов расчета редуцированной системы уравнений МКЭ в форме КСМ относительно узлов крупной сетки и результатов, полученных на обратном ходе алгоритма, построены изополя моментов (M_x) (рисунок 2.23).

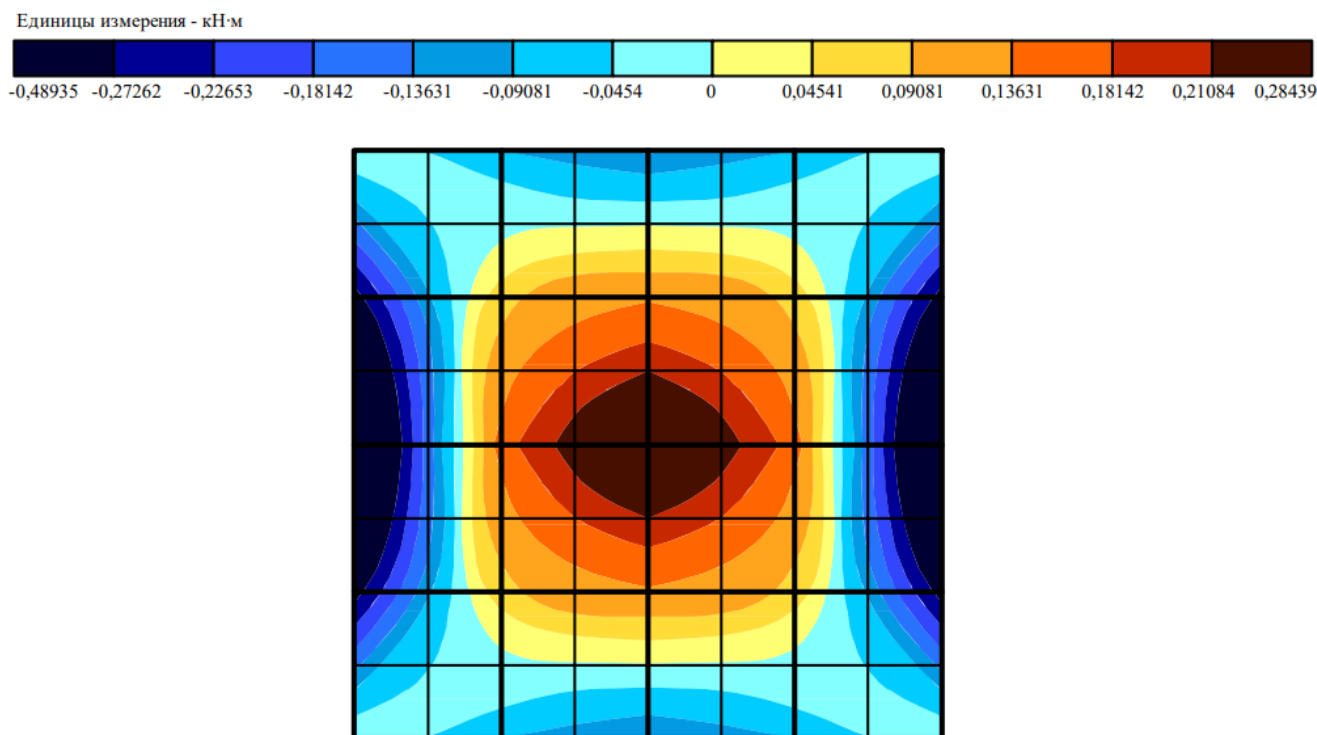


Рисунок 2.23 – Изополя изгибающего момента (M_x), полученные на основе решения редуцированной системы уравнений МКЭ в форме КСМ

В первом примере использовались сетки 4x4 и 8x8, где глобальная система уравнений для сетки 8x8 включает 211 неизвестных. При переходе к редуцированной системе уравнений для сетки 4x4 количество неизвестных уменьшается до 59. Во втором примере использовались сетки 8x8 и 16x16. Для сетки 16x16 глобальная система уравнений содержит 803 неизвестные. Редуцированная система для сетки 8x8 включает 211 неизвестных. Результаты, представленные в таблицах, показывают, что предложенные методы демонстрируют высокую сходимость как по прогибу, так и по усилиям.

Основываясь на анализе табличных данных, можно сделать вывод, что результат решения редуцированной системы уравнений, составленной относительно главных узлов, показал достаточную точность, сопоставимую с результатами, полученными при более густой сетке без процедуры редуцирования (например: редуцированная система 4x4 дает результат сопоставимый с 6x6 без редуцирования), т.е. применение алгоритма дает возможность к сокращению

вычислительных ресурсов с обеспечением достаточной точности численных расчетов.

2.4.4 Расчет изгибаемой пластины с отверстием

В качестве третьего примера выполнен численный расчет шарнирно опертой изгибаемой пластины с квадратным отверстием размером $\frac{1}{2}$ от ее габаритного размера на действие постоянной нагрузки (рисунок 2.24). С использованием предложенных алгоритмов было исследовано напряженно-деформированное состояние пластинки по исходной и редуцированной расчетной схеме. При проведении численного расчета были приняты следующие исходные данные: $a=b=1\text{м}$; $h=0,01\text{м}$; $\mu_x = \mu_y = 0,3$; $E=109,2\text{ГПа}$; $q=9,80665\text{кН/м}^2$.

При решении таких задач, как известно, большое внимание уделяется определению напряжений вокруг отверстия, т.е. определению концентрации напряжений. В этом случае в местах, где ожидается большой градиент напряжений, размеры конечных элементов уменьшаются и соответственно увеличивается их количество, что существенно влияет на процедуру введения начальных данных и на результаты и продолжительность расчета. Также используются и другие методы решения такого типа задач [1]. К ним можно отнести: идею использования достаточно мелкой сетки; построение неравномерной сетки, сгущающейся в исследуемых зонах; вырезание фрагментов, содержащих интересующую область; суперэлементная техника; метод Монте-Карло.

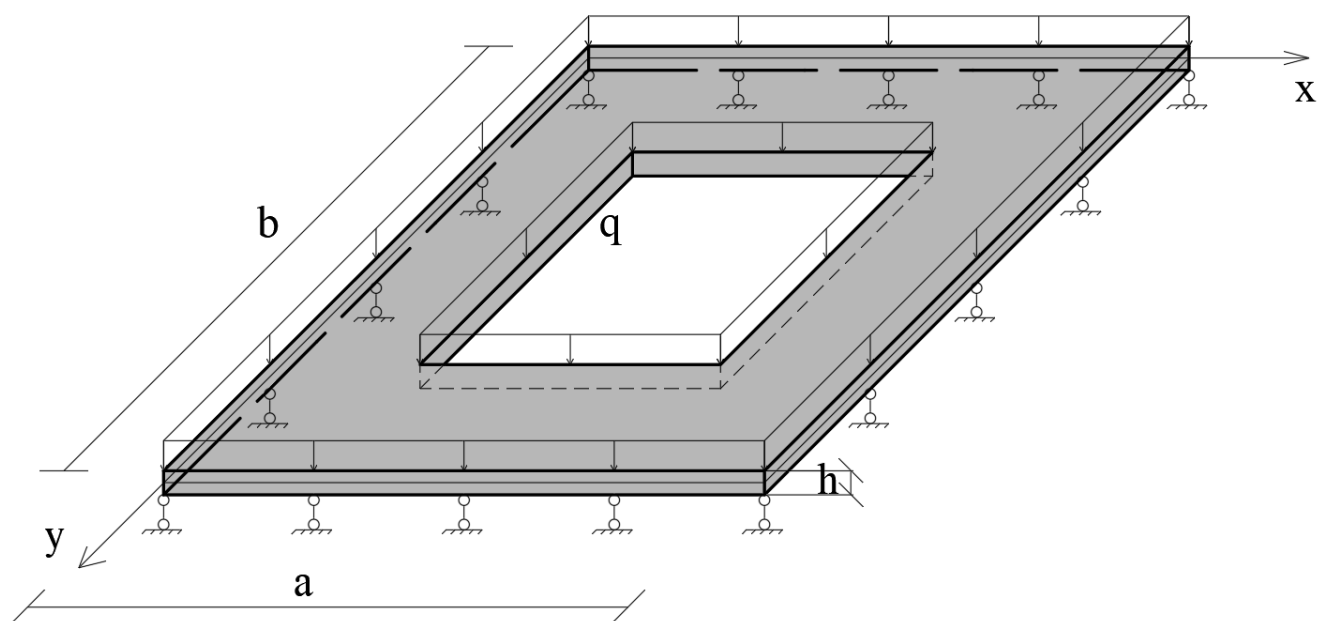


Рисунок 2.24 – Физическая модель шарнирно опертой изгибаемой пластины с квадратным отверстием размером $\frac{1}{2}$ от ее габаритного размера под воздействием постоянной равномерно распределённой нагрузки

При расчете рассматриваемой конструкции использовалась крупная конечно-элементная сетка 4x4 и мелкая 8x8 (рисунок 2.25).

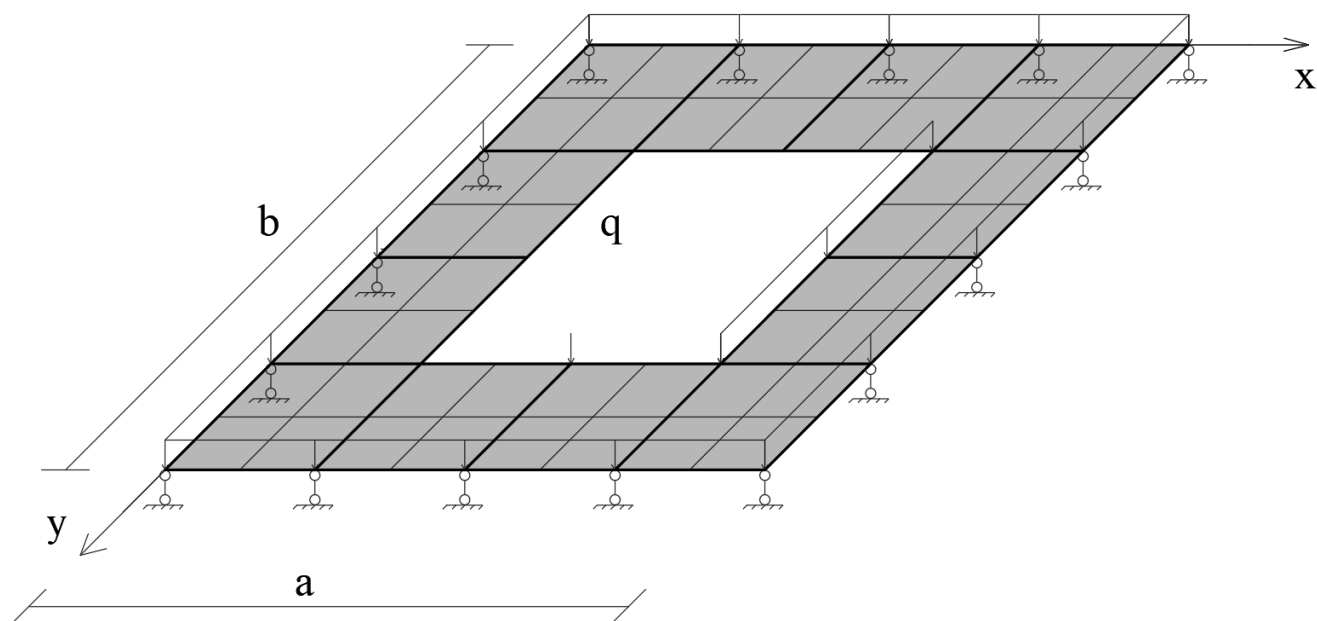


Рисунок 2.25 – Расчетная модель шарнирно опертой изгибаемой пластины с квадратным отверстием размером $\frac{1}{2}$ от ее габаритного размера под воздействием постоянной равномерно распределённой нагрузки

Согласно общей физической модели составлена расчетная схема пластинки с нумерацией кинематических неизвестных w (рисунок 2.26) и нумерацией конечных элементов (рисунок 2.27). Нумерация неизвестных условно показана только для половины пластины.

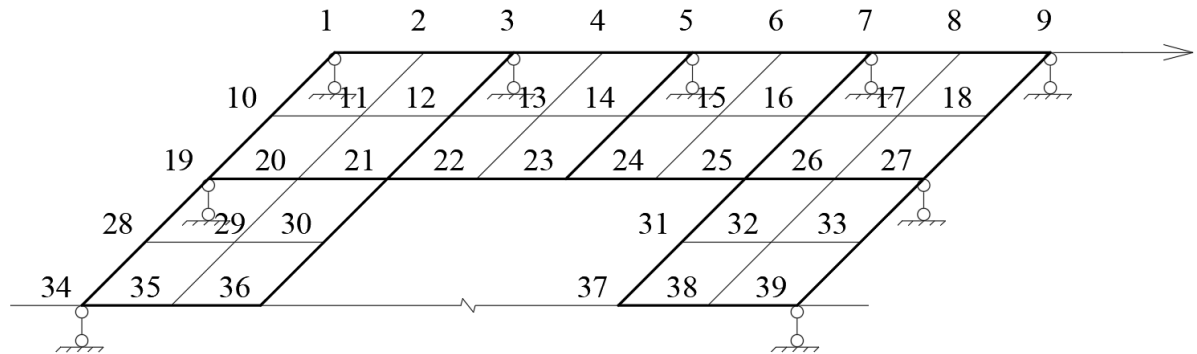


Рисунок 2.26 – Нумерация кинематических неизвестных для такой пластинки

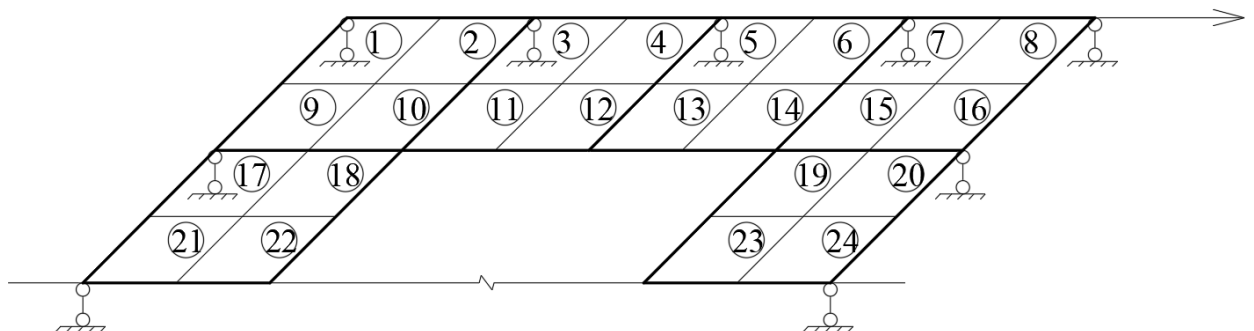


Рисунок 2.27 – Нумерация конечных элементов и узлов шарнирно опертой по контуру пластинки с квадратным отверстием

Получение глобальной разрешающей системы уравнений для такого типа граничных условий по МКЭ в форме КСМ выполнено в соответствии с алгоритмом, предложенным в [44], согласно которому отверстие представляется областью нулевой жесткости, и реализованного с помощью пакета прикладных математических программ Scilab.

Глобальная система уравнений смешанного метода имеет при сетке 8×8 243 неизвестных: 81 неизвестных вертикальных перемещений $(q_1, \dots, q_{81})$, 162

неизвестных изгибающих моментов $M_x(x, y)$, $M_y(x, y)$, по два в каждом из узлов сетки $(\tilde{q}_{82}, \dots, \tilde{q}_{243})$.

Для их нахождения имеем систему из 243 разрешающих уравнений:

$$[D]_{243 \times 243} \begin{Bmatrix} q \\ \tilde{q} \end{Bmatrix}_{243 \times 1} + \begin{Bmatrix} R_F \\ \Delta_F \end{Bmatrix}_{243 \times 1} = \{0\}, \quad (2.33)$$

При данном условии опирания из глобальной системы уравнений исключаются следующие неизвестные:

Перемещения $w = 0$ во всех узлах на контуре пластины.

Во всех узлах на контуре пластины $M_x = M_y = 0$. В узлах 21-25 на контуре отверстия $M_y = 0$. В узлах 21-36 и 25-37 на контуре отверстия $M_x = 0$.

В соответствии с граничными условиями определим неизвестные равные нулю.

$$\begin{aligned}
& q_1 = q_1^I = 0; q_2 = q_2^I = q_1^{II} = 0; q_3 = q_2^{II} = q_1^{III} = 0; q_4 = q_2^{III} = q_1^{IV} = 0; \\
& q_5 = q_2^{IV} = q_1^V = 0; q_6 = q_2^V = q_1^{VI} = 0; q_7 = q_2^{VI} = q_1^{VII} = 0; \\
& q_8 = q_2^{VII} = q_1^{VIII} = 0; q_9 = q_2^{VIII} = 0; q_{10} = q_4^I = q_1^{IX} = 0; \\
& q_{18} = q_3^{VIII} = q_2^{XVI} = 0; q_{19} = q_4^{IX} = q_1^{XVII} = 0; q_{27} = q_3^{XVI} = q_2^{XX} = 0; \\
& q_{28} = q_4^{XVII} = q_1^{XX1} = 0; q_{33} = q_3^{XX} = q_2^{XXIV} = 0; \\
& \tilde{q}_1 = \tilde{q}_2 = q_5^I = q_6^I = 0; \tilde{q}_3 = \tilde{q}_4 = q_7^I = q_8^I = q_5^{II} = q_6^{II} = 0; \\
& \tilde{q}_5 = \tilde{q}_6 = q_7^{II} = q_8^{II} = q_5^{III} = q_6^{III} = 0; \tilde{q}_7 = \tilde{q}_8 = q_7^{III} = q_8^{III} = q_5^{IV} = q_6^{IV} = 0; \\
& \tilde{q}_9 = \tilde{q}_{10} = q_7^{IV} = q_8^{IV} = q_5^V = q_6^V = 0; \tilde{q}_{11} = \tilde{q}_{12} = q_7^V = q_8^V = q_5^{VI} = q_6^{VI} = 0; \\
& \tilde{q}_{13} = \tilde{q}_{14} = q_7^{VI} = q_8^{VI} = q_5^{VII} = q_6^{VII} = 0; \tilde{q}_{15} = \tilde{q}_{16} = q_7^{VII} = q_8^{VII} = q_5^{VIII} = q_6^{VIII} = 0; \\
& \tilde{q}_{17} = \tilde{q}_{18} = q_7^{VIII} = q_8^{VIII} = 0; \tilde{q}_{19} = \tilde{q}_{20} = q_{11}^I = q_{12}^I = q_5^{IX} = q_6^{IX} = 0; \\
& \tilde{q}_{35} = \tilde{q}_{36} = q_9^{VIII} = q_{10}^{VIII} = q_7^{XVI} = q_8^{XVI} = 0; \\
& \tilde{q}_{37} = \tilde{q}_{38} = q_{11}^{IX} = q_{12}^{IX} = q_5^{XVII} = q_6^{XVII} = 0; \\
& \tilde{q}_{44} = q_{10}^{XI} = q_{12}^{XII} = 0; \tilde{q}_{46} = q_{10}^{XII} = q_{12}^{XIII} = 0; \tilde{q}_{48} = q_{10}^{XIII} = q_{12}^{XIV} = 0; \\
& \tilde{q}_{53} = \tilde{q}_{54} = q_9^{XVI} = q_{10}^{XVI} = q_7^{XX} = q_8^{XX} = 0; \\
& \tilde{q}_{55} = \tilde{q}_{56} = q_{11}^{XVII} = q_{12}^{XVII} = q_5^{XXI} = q_6^{XXI} = 0; \\
& \tilde{q}_{59} = q_9^{XVIII} = q_7^{XII} = 0; \tilde{q}_{61} = q_{11}^{IXX} = q_5^{XIII} = 0; \\
& \tilde{q}_{65} = \tilde{q}_{66} = q_9^{XX} = q_{10}^{XX} = q_7^{XIV} = q_8^{XIV} = 0.
\end{aligned}$$

(2.34)

Структура разрешающих уравнений, относящихся к внутриконтурным узлам и узлам на контуре отверстия, с учетом граничных условий:

$$\left\{ \begin{array}{l}
R_{11} = R_{11}^I + R_{11}^{II} + R_{11}^{IX} + R_{11}^X = 0 \\
\vdots \\
\varphi_{11}^{(x)} = \varphi_{(x)}^I + \varphi_{(x)}^{II} + \varphi_{(x)}^{IX} + \varphi_{(x)}^X = 0 \\
\varphi_{11}^{(y)} = \varphi_{(y)}^I + \varphi_{(y)}^{II} + \varphi_{(y)}^{IX} + \varphi_{(y)}^X = 0 \\
\vdots \\
R_{21} = R_{21}^X + R_{21}^{XI} + R_{21}^{XVIII} = 0 \\
\varphi_{21}^{(x)} = \varphi_{(x)}^X + \varphi_{(x)}^{XI} = 0 \\
\varphi_{21}^{(y)} = \varphi_{(y)}^X + \varphi_{(y)}^{XVII} = 0 \\
\vdots \\
R_{23} = R_{23}^{XII} + R_{23}^{XIII} = 0 \\
\varphi_{23}^{(x)} = \varphi_{(x)}^{XII} + \varphi_{(x)}^{XIII} = 0 \\
\vdots \\
R_{30} = R_{30}^{XVIII} + R_{30}^{XXII} = 0 \\
\varphi_{22}^{(y)} = \varphi_{(y)}^{XVIII} + \varphi_{(y)}^{XXII} = 0
\end{array} \right. \quad (2.35)$$

Система разрешающих уравнений после учета граничных условий имеет вид:

$$\underset{108 \times 108}{[D]} \underset{108 \times 1}{\left\{ \begin{array}{c} q \\ \tilde{q} \end{array} \right\}} + \underset{108 \times 1}{\left\{ \begin{array}{c} R_F \\ \Delta_F \end{array} \right\}} = \{0\}, \quad (2.36)$$

В итоге после учета граничных условий глобальная система уравнений смешанного метода имеет при сетке 8x8 108 неизвестных: 40 неизвестных вертикальных перемещений $(q_1, \dots, q_{40})$, 68 неизвестных изгибающих моментов $M_x(x, y)$, $M_y(x, y)$, по два в каждом из внутриконтурных узлов сетки $(\tilde{q}_{41}, \dots, \tilde{q}_{108})$.

Редуцированная глобальная система разрешающих уравнений записывается в виде:

$$\underset{20 \times 20}{[D]}^* \underset{20 \times 1}{\left\{ \begin{array}{c} q \\ \tilde{q} \end{array} \right\}} + \underset{20 \times 1}{\left\{ \begin{array}{c} R_F \\ \Delta_F \end{array} \right\}} = \{0\}, \quad (2.37)$$

В развернутом виде для узла 21:

$$\begin{aligned}
 R_{21} &= R_3^X + R_4^{XI} + R_2^{XVIII} = 0 \\
 R_{21} &= (r_{3,1} \cdot q_{11} + r_{3,2} \cdot q_{12} + r_{3,3} \cdot q_{21} + r_{3,4} \cdot q_{20} + \tilde{r}_{3,5} \cdot \tilde{q}_{21} + \tilde{r}_{3,6} \cdot \tilde{q}_{22} + \tilde{r}_{3,7} \cdot \tilde{q}_{23} + \\
 &+ \tilde{r}_{3,8} \cdot \tilde{q}_{27} + \tilde{r}_{3,9} \cdot \tilde{q}_{41} + \tilde{r}_{3,10} \cdot \tilde{q}_{42} + \tilde{r}_{3,11} \cdot \tilde{q}_{39} + \tilde{r}_{3,12} \cdot \tilde{q}_{40})^X + (r_{4,1} \cdot q_{12} + r_{4,2} \cdot q_{13} + \\
 &+ r_{4,3} \cdot q_{22} + r_{4,4} \cdot q_{21} + \tilde{r}_{4,5} \cdot \tilde{q}_{23} + \tilde{r}_{4,6} \cdot \tilde{q}_{24} + \tilde{r}_{4,7} \cdot \tilde{q}_{25} + \tilde{r}_{4,8} \cdot \tilde{q}_{26} + \tilde{r}_{4,9} \cdot \tilde{q}_{43} + \\
 &+ \tilde{r}_{4,11} \cdot \tilde{q}_{41} + \tilde{r}_{4,12} \cdot \tilde{q}_{42})^{XI} + (r_{2,1} \cdot q_{20} + r_{2,2} \cdot q_{21} + r_{2,3} \cdot q_{30} + r_{2,4} \cdot q_{29} + \tilde{r}_{2,5} \cdot \tilde{q}_{39} + \\
 &+ \tilde{r}_{2,6} \cdot \tilde{q}_{40} + \tilde{r}_{2,7} \cdot \tilde{q}_{41} + \tilde{r}_{2,8} \cdot \tilde{q}_{42} + \tilde{r}_{2,10} \cdot \tilde{q}_{60} + \tilde{r}_{2,11} \cdot \tilde{q}_{57} + \tilde{r}_{2,12} \cdot \tilde{q}_{58})^{XVIII} = 0 \quad (2.38) \\
 R_{21} &= r_{3,1} \cdot q_{11} + (r_{3,2} + r_{4,1}) \cdot q_{12} + r_{4,2} \cdot q_{13} + (r_{3,4} + r_{2,1}) \cdot q_{20} + \\
 &+ (r_{3,3} + r_{4,4} + r_{2,2}) \cdot q_{21} + r_{4,3} \cdot q_{22} + r_{2,4} \cdot q_{29} + r_{2,3} \cdot q_{30} + \tilde{r}_{3,5} \cdot \tilde{q}_{21} + \tilde{r}_{3,6} \cdot \tilde{q}_{22} + \\
 &+ (\tilde{r}_{3,7} + \tilde{r}_{4,5}) \cdot \tilde{q}_{23} + (\tilde{r}_{3,8} + \tilde{r}_{4,6}) \cdot \tilde{q}_{24} + \tilde{r}_{4,7} \cdot \tilde{q}_{25} + \tilde{r}_{4,8} \cdot \tilde{q}_{26} + (\tilde{r}_{3,11} + \tilde{r}_{2,5}) \cdot \tilde{q}_{39} + \\
 &+ (\tilde{r}_{3,12} + \tilde{r}_{2,6}) \cdot \tilde{q}_{40} + (\tilde{r}_{3,9} + \tilde{r}_{4,11} + \tilde{r}_{2,7}) \cdot \tilde{q}_{41} + (\tilde{r}_{3,10} + \tilde{r}_{4,12} + \tilde{r}_{2,8}) \cdot \tilde{q}_{42} + \\
 &+ \tilde{r}_{4,9} \cdot \tilde{q}_{43} + \tilde{r}_{2,11} \cdot \tilde{q}_{57} + \tilde{r}_{2,12} \cdot \tilde{q}_{58} + \tilde{r}_{2,10} \cdot \tilde{q}_{60} = 0
 \end{aligned}$$

После подстановки в уравнение значений неизвестных в узлах мелкой сетки, выраженных через значения неизвестных в узлах крупной сетки, которые приведены в таблице 2.9, производится переход в редуцированной СЛАУ.

Таблица 2.9 – Зависимость между неизвестными в узлах мелкой сетки, выраженных через значения неизвестных в узлах крупной сетки

w_{21}	M_x^{21}	M_y^{21}
$q_{11} = 0,25 \cdot q_{21}$	$\tilde{q}_{21} = 0,25 \cdot \tilde{q}_{41}$	$\tilde{q}_{22} = 0,25 \cdot \tilde{q}_{42}$
$q_{12} = 0,5 \cdot q_{21}$	$\tilde{q}_{23} = 0,5 \cdot \tilde{q}_{41}$	$\tilde{q}_{24} = 0,5 \cdot \tilde{q}_{42}$
$q_{13} = 0,25 \cdot q_{21}$	$\tilde{q}_{25} = 0,25 \cdot \tilde{q}_{41}$	$\tilde{q}_{26} = 0,25 \cdot \tilde{q}_{42}$
$q_{20} = 0,5 \cdot q_{21}$	$\tilde{q}_{39} = 0,5 \cdot \tilde{q}_{41}$	$\tilde{q}_{40} = 0,5 \cdot \tilde{q}_{42}$
$q_{21} = 1 \cdot q_{21}$	$\tilde{q}_{41} = 1 \cdot \tilde{q}_{41}$	$\tilde{q}_{42} = 1 \cdot \tilde{q}_{42}$
$q_{22} = 0,5 \cdot q_{21}$	$\tilde{q}_{43} = 0,5 \cdot \tilde{q}_{41}$	$\tilde{q}_{58} = 0,25 \cdot \tilde{q}_{42}$
$q_{29} = 0,25 \cdot q_{21}$	$\tilde{q}_{57} = 0,25 \cdot \tilde{q}_{41}$	$\tilde{q}_{60} = 0,5 \cdot \tilde{q}_{42}$
$q_{30} = 0,5 \cdot q_{21}$		

В итоге получена редуцированная глобальная система уравнений смешанного метода к сетке 4x4, которая имеет 20 неизвестных: 8 неизвестных вертикальных перемещений ($q_{21}, q_{23}, q_{25}, q_{36}, q_{37}, q_{48}, q_{50}, q_{52}$), 12 неизвестных

изгибающих моментов $M_x(x, y)$, $M_y(x, y)$, по два в каждом из внутриконтурных узлов сетки ($\tilde{q}_{41}, \tilde{q}_{42} \dots, \tilde{q}_{121}, \tilde{q}_{122}$). Следует отметить, что нумерация неизвестных принята согласно исходному разбиению без последующей перенумерации после процедуры учета граничных условий и редуцирования системы уравнений.

Результаты выполненных численных расчетов сведены в таблицу 2.10. В ней приведено сравнение результатов численного расчета параметров напряженно-деформированного состояния (прогиба w , изгибающих моментов M_x , M_y) этой пластины по предложенному алгоритму с решением, полученным на основе МКЭ в форме КСМ без учета редуцирования при конечно-элементной сетке 8x8 и результатами, полученными в ПК ЛИРА (21 - левый верхний угол отверстия, 23 - середина верхней кромки отверстия, 25 - правый верхний угол отверстия).

Таблица 2.10 – Сравнение результатов расчета шарнирно опертой изгибаемой пластины с квадратным отверстием размером $\frac{1}{2}$ от ее габаритного размера на действие постоянной нагрузки на основе различных форм МКЭ

	КЭ сетка	Номер узла		
		21	23	25
		w , мм		
МКЭ в форме КСМ (без редуцирования СЛАУ)	4x4	2,5123	3,3945	2,5123
	8x8	2,3306	3,2371	2,3306
	16x16	2,3115	3,2083	2,3115
МКЭ в форме метода перемещений	4x4	2,2453	3,1526	2,2453
	8x8	2,2658	3,1738	2,2658
	16x16	2,285	3,1864	2,285
КСМ МКЭ (БЛ интерполяция)	4x4	2,2381	3,1037	2,2381
КСМ МКЭ (НБКП интерполяция)	4x4	2,3256	3,119	2,3256
		M_x , кН·м		
МКЭ в форме КСМ (без редуцирования СЛАУ) КЭ сетка 4x4	4x4	0,2913	0,1814	0,2913
	8x8	0,4021	0,2138	0,4021
	16x16	0,4952	0,2226	0,4952
МКЭ в форме метода перемещений КЭ сетка 4x4	4x4	0,1069	0,1589	0,1069
	8x8	0,1471	0,2020	0,1471
	16x16	0,1971	0,2197	0,1971
КСМ МКЭ (БЛ интерполяция)	4x4	0,3893	0,2265	0,3893
КСМ МКЭ (НБКП интерполяция)	4x4	0,3648	0,2501	0,3648

По результатам численного расчета тестовой задачи, выполненного с использованием предложенного алгоритма редуцирования СЛАУ, при расчете по МКЭ в форме КСМ без редуцирования СЛАУ и по МКЭ в форме метода перемещений с использованием ПК ЛИРА при различном конечно-элементном разбиении, построены графики прогибов узлов пластины w (рисунок 2.28) и изгибающего момента M_x (рисунок 2.29) на кромке отверстия.

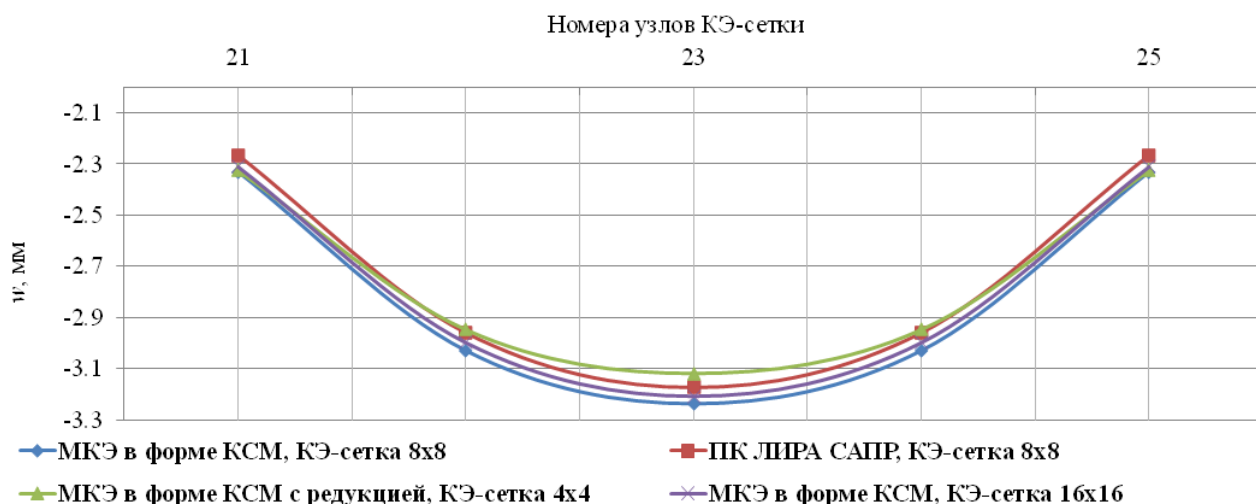


Рисунок 2.28 – Прогибы узлов пластины w на кромке отверстия

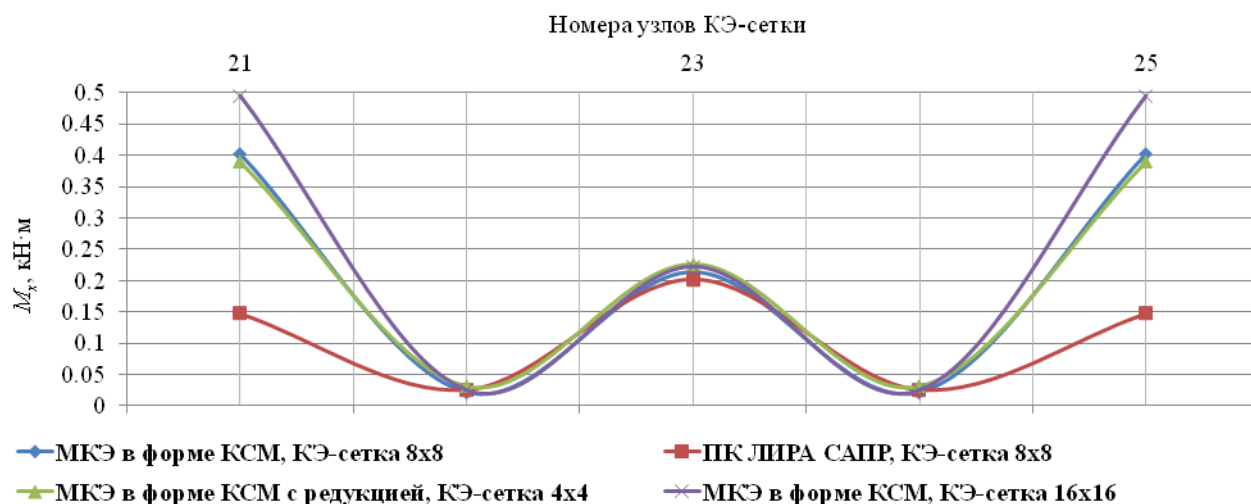


Рисунок 2.29 – Изгибающий момент M_x в узлах пластины на кромке отверстия

На основе результатов численного расчета редуцированной системы уравнений МКЭ в форме КСМ относительно узлов крупной сетки и результатов полученных на обратном ходе алгоритма построены изополя моментов (M_x) (рисунок 2.30).

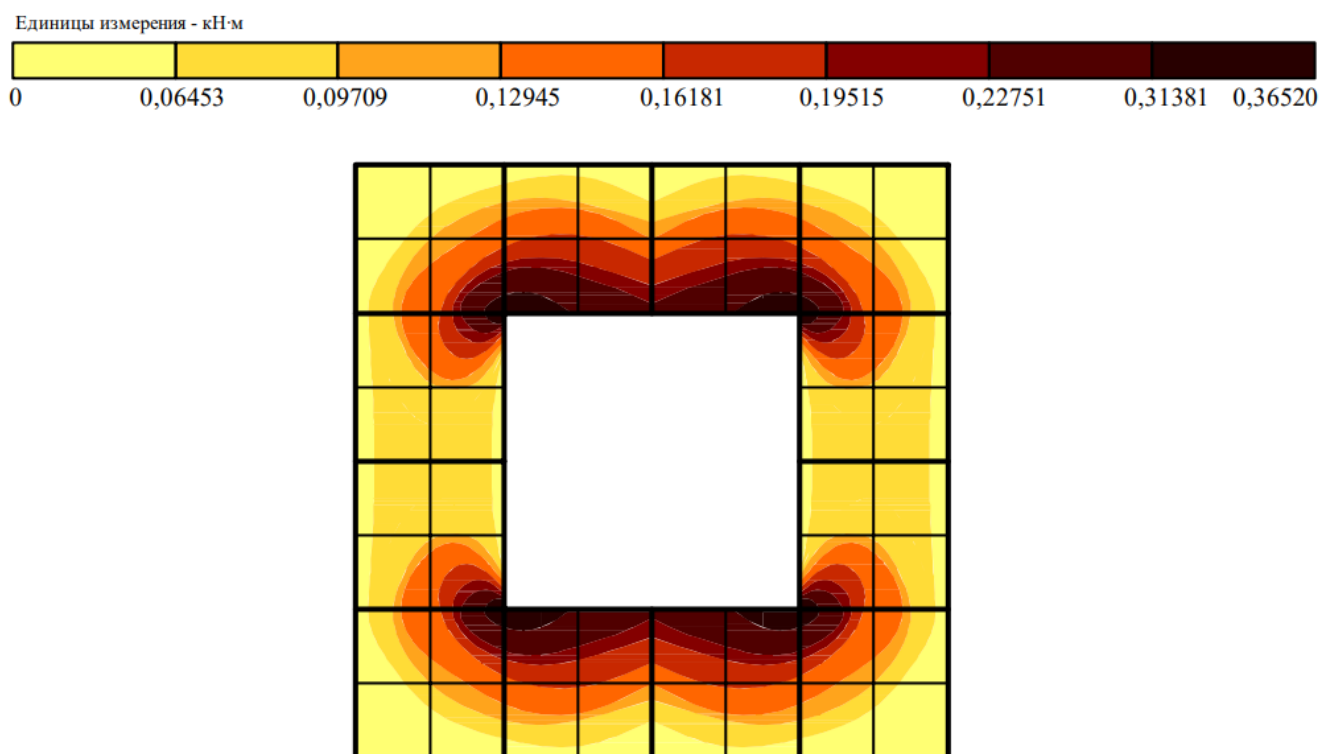


Рисунок 2.30 – Изополя изгибающего момента (M_x), полученные на основе решения редуцированной системы уравнений МКЭ в форме КСМ

По данным таблицы 2.10 можно утверждать, что результаты численных расчетов изгибаемых пластин с отверстиями по МКЭ в форме КСМ и по МКЭ в форме метода перемещений дают совпадающие результаты по прогибам и отличающиеся результаты по моментам в угловых узлах отверстия. В среднем узле на кромке отверстия результаты по обеим формам МКЭ сходятся с высокой степенью точности при сгущении конечно-элементной сетки. При этом следует отметить порядок решаемой системы уравнений МКЭ в форме КСМ: для тестового примера порядок редуцированной системы уравнений $n=20$, для системы, полученной на основе МКЭ в форме КСМ без процедуры редуцирования $n=108$. Так как в угловых узлах отверстия в зоне максимальных

напряжений оставляются главные узлы, то для определения максимальных напряжений не нужно выполнять процедуру обратного хода, ведь определяемые параметры напряженно-деформированного состояния в этих узлах получаются из решения системы уравнений. При необходимости определения полного поля перемещений/усилий на мелкой конечно-элементной сетке выполняется процедура обратного хода с использованием найденных коэффициентов интерполяции.

Основываясь на анализе табличных данных, можно сделать вывод, что применение разработанных редукционных алгоритмов для численного расчета пластин с отверстиями позволяют получить приемлемую точность с использованием меньшего количества уравнений в конечно-элементной модели.

2.5 Выводы по главе 2

Анализируя полученные результаты, можно сделать следующие выводы:

1. Результаты численного расчета пластин на статическое воздействие, полученные с использованием билинейной интерполяции и интерполяции с применением неполного бикубического полинома, демонстрируют близость значений численных расчетов (прогибов и изгибающих моментов) к результатам, полученным с использованием других подходов. Это свидетельствует о том, что оба метода обеспечивают адекватное представление искомых величин, что, в свою очередь, даст возможность выбирать наиболее удобный алгоритм в зависимости от конкретной задачи или требований к вычислительным затратам.

2. Результаты, полученные с использованием редуцированных систем уравнений, показывают, что они обеспечивают достаточно точные значения для прогибов и изгибающих моментов. Это наблюдается как при применении билинейной интерполяции, так и при использовании интерполяции с неполным бикубическим полиномом, что подтверждает адекватность выбранных алгоритмов для численного расчета пластин на статическое воздействие.

3. Снижение порядка системы разрешающих уравнений при переходе от полной системы к редуцированной позволяет существенно уменьшить объем вычислений, не снижая точности результатов.

ГЛАВА 3. КОМПЛЕКСНЫЙ ПОДХОД К РАСЧЕТУ ПЛИТ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ С ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ ЖЕСТКОСТЬЮ

В данной главе диссертации представлен комплексный подход к численному расчету плит на упругом основании с изменяющейся жесткостью при статических воздействиях. Исследование сфокусировано на разработке и применении алгоритмов редуцирования на основе интерполяции основных неизвестных, разработанных во 2 главе, с методом компенсирующих нагрузок, реализованным на основе МКЭ в форме КСМ. На тестовых примерах рассмотрено решение задач для разупрочняющихся односторонних связей.

3.1 Алгоритм расчета плит на упругом основании с изменяющейся жесткостью на основе МКЭ в форме классического смешанного метода

В работах [12, 40, 41, 44] авторов, являющихся представителями научной школы В.А. Игнатьева предложен общий алгоритм расчета конструктивно-нелинейных систем с помощью МКЭ в форме КСМ, а также разработанный на его основе алгоритм расчета пластин с упругими односторонними связями в узлах конечно-элементной сетки, позволяющий выполнять численный расчет систем с упрочняющимися или разупрочняющимися односторонними связями. К таким конструкциям относятся, например, балки или плиты, лежащие на плоскости или на упругом одностороннем основании, фундамент сооружения или подстилающее его основание, многопролетные балки с жесткими или упругими односторонними опорами или зазорами между балкой и опорами и т. д. [40, 41].

Для того чтобы выполнить расчет конструктивно-нелинейной системы, необходимо знать физические характеристики имеющихся в ней связей. Основные типы диаграмм работы дискретных связей рассмотрены в работе [12]. Использование таких диаграмм в процессе численного расчета стирает по сути различие между физическими нелинейными и конструктивно-нелинейными задачами [41].

Метод компенсирующих нагрузок (МКН) для расчета конструктивно-нелинейных систем впервые был применен к расчету регулярных систем перекрестных балок, контактирующих с линейно-упругим односторонним Винклеровским основанием в работе [41]. В данной работе показана основная идея МКН, на конкретных примерах показаны возможности метода, как универсального метода линеаризации для решения данного типа задач.

Для моделирования работы упругого основания используется модифицированный пластинчатый конечный элемент (рисунок 3.1) в котором учитываются не только перемещения по направлению работы упруго-податливых опор (w) но и усилия в них (R).

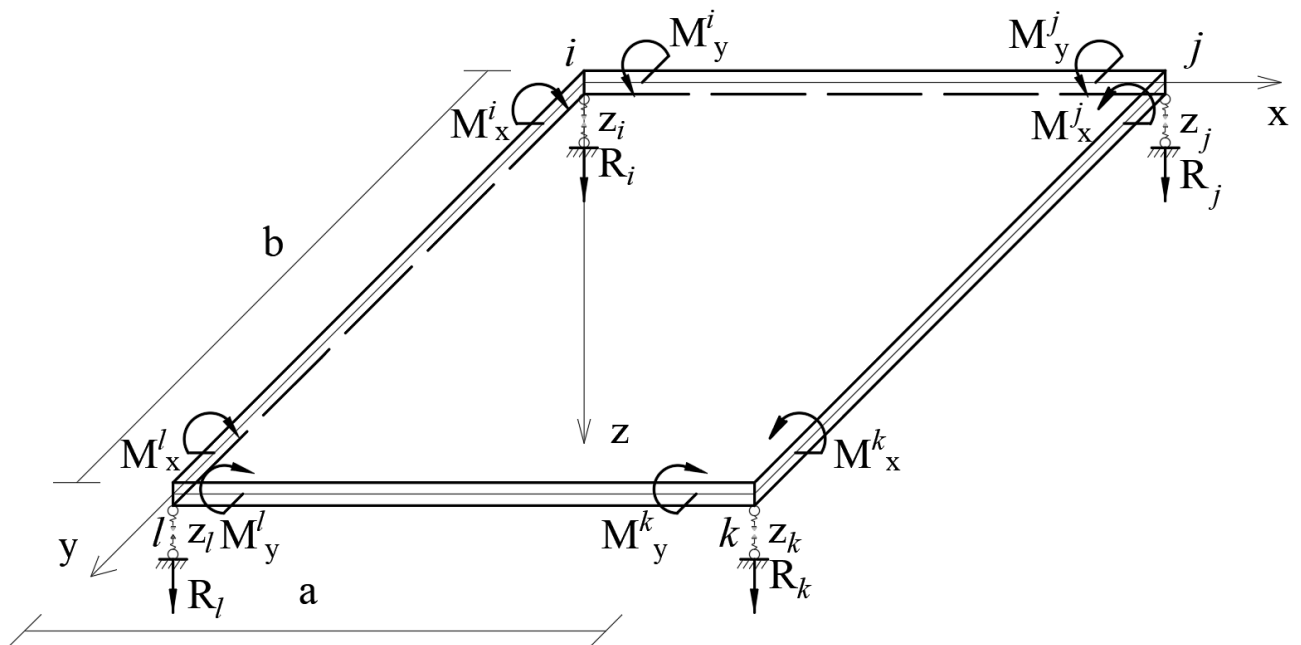


Рисунок 3.1 – Основная схема пластинчатого КЭ на упруго-податливых опорах

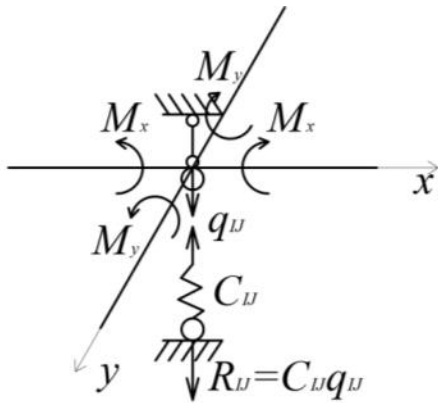


Рисунок 3.2 – Основные неизвестные в узле IJ

В качестве основных неизвестных в узле IJ (рисунок 3.2) этого конечного элемента приняты:

q_{IJ} – перемещение узла IJ по направлению работы упруго-податливой опоры;

$M_x^{IJ}(x, y)$ – изгибающий момент по направлению оси X ;

$M_y^{IJ}(x, y)$ – изгибающий момент по направлению оси Y ;

$R_{I,J}$ – реакция дискретной связи.

При этом для описания характеристик упруго-податливых связей используются диаграммы их работы, которые могут быть представлены в виде кусочных функций.

Рассматриваемый алгоритм может быть модифицирован путем применения алгоритма редуцирования (п. 2.2), использующего интерполяцию основных неизвестных МКЭ в форме КСМ на этапе формирования системы разрешающих уравнений (2.3). Такая комбинация алгоритмов позволяет учесть преимущества каждого из них, что, в свою очередь, способствует повышению точности численных расчетов.

Приведем предлагаемый алгоритм расчета.

1. Конструкция разбивается на две системы: одну, содержащую главные узлы редукиции, и вторую – второстепенные.

2. Для системы, включающей главные и второстепенные узлы, формируется система разрешающих уравнений. Необходимые уравнения включают как кинематические, так и силовые неизвестные.

3. Устанавливается связь между перемещениями и усилиями узлов i, j и I, J с помощью интерполяционного полинома (п. 2.3). Вычисляются коэффициенты, интерполяционного полинома (2.5), позволяющие выразить значения основных

неизвестных смешанного метода в узлах мелкой сетки через значения в узлах крупной сетки.

4. Значения основных неизвестных в узлах мелкой сетки вводятся в систему уравнений МКЭ в форме КСМ, формируя глобальную систему разрешающих уравнений.

5. Полученная редуцированная система уравнений решается одним из эффективных методов решения СЛАУ. При этом все упруго-податливые связи полагаются работающими линейно. Жесткость связей принимается равной её значению на участке $0 \leq \Delta^{(i)} \leq \Delta_0^{(i)}$ кусочной функции, описывающей значения перемещений в опорах, необходимых для определения величин реакций 1-го и последующих приближений. Решение, полученное на этом этапе, используется для расчета конструкции с учетом разупрочнения упругих односторонних опор.

где $\Delta^{(i)}$ – перемещение, возникающее в i -ой опоре

$\Delta_0^{(i)}$ – перемещение, при достижении которого работа опоры происходит по следующему участку кусочной функции.

7. В соответствии с алгоритмом, приведенным в работе М.И. Бочкова [12], итерационно определяется очередность изменения несущей способности упруго-податливых связей с изменяющейся жесткостью. При расчете систем с учетом разупрочняющихся опор в расчетной схеме по направлению таких опор вводятся нагрузки, компенсирующие изменение жесткости этих опор. Система уравнений дополняется вектором узловых компенсирующих нагрузок. Этот вектор определяется по алгоритмам, разработанным В.П. Алениным [4], и модифицированным для расчета с помощью МКЭ в форме КСМ М.И. Бочковым [12].

$$\begin{bmatrix} r & \tilde{r} \\ \tilde{\delta} & \delta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ \tilde{q} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} r_p \\ \delta_p \end{Bmatrix} + \{F\} = 0. \quad (3.1)$$

где $\{F\}$ – вектор компенсирующих нагрузок, приложенных в упруго-податливых опорах. Величина компенсирующей определяется выражением:

$$\Delta F_i^{(1)} = -C_0 \cdot y_i^{(1)},$$

где C_0 – коэффициент жесткости основания.

8. Производится расчет основной системы, загруженной компенсирующими нагрузками и внешней нагрузкой, в результате которого производится корректировка величины компенсирующих нагрузок.

9. Для выхода из алгоритма найденным значениям компенсирующих нагрузок на (j) и $(j+1)$ итерации необходимо выполнение условия:

$$\frac{F_{(j+1)} - F_{(j)}}{F_{(j+1)}} < \Delta_{огр}, \quad (3.2)$$

где $F_{(j)}$ – величина компенсирующей нагрузки на (j) -й итерации;

$F_{(j+1)}$ – величина компенсирующей нагрузки на $(j+1)$ -й итерации;

$\Delta_{огр}$ – значение критерия выхода из итерационного цикла, задаваемое в момент начала расчета.

3.2 Расчет ростверка с различными вариантами загрузки

Для верификации предлагаемого алгоритма выполнен численный расчет фундаментной плиты габаритными размерами 12 х 12 м (рисунок 3.3). Поперечное сечение фундаментной плиты изображено на рисунке (рисунок 3.4).

Жесткостные характеристики плиты:

$$h=0,3\text{м}; \mu_x = \mu_y = 0,2; E=30 \cdot 10^{-3} \text{ МПа}$$

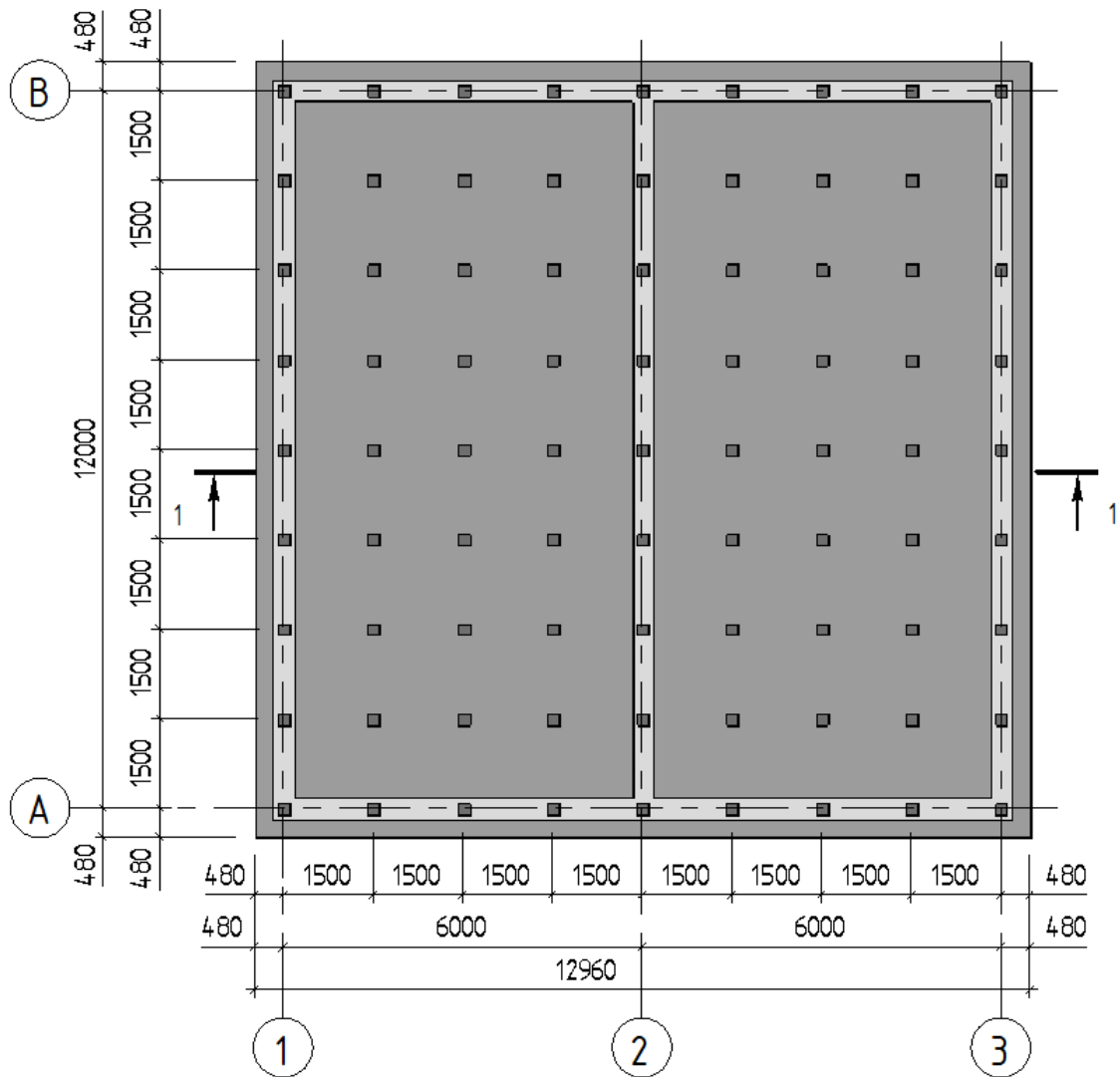


Рисунок 3.3 – Фундаментная плита с габаритными размерами 12 x 12 м

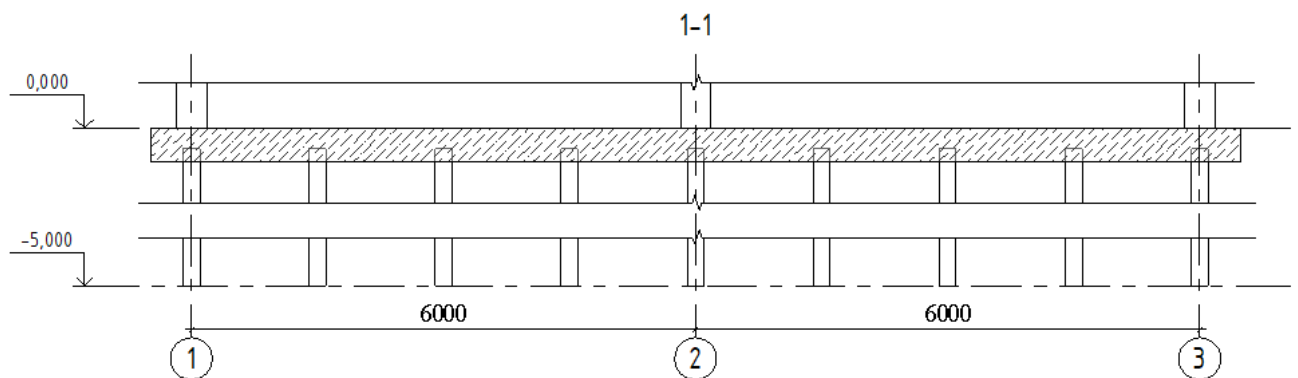


Рисунок 3.4 – Разрез 1-1

При расчетах работа сваи в грунте была представлена как работа отдельно стоящей, упруго-податливой опоры.

Для описания характеристик этой опоры используются результаты испытания грунтов сваями статическими вдавливающими нагрузками, представленные в виде диаграммы зависимости осадки от нагрузки (рисунок 3.5). Эти результаты могут быть представлены в виде следующей кусочной функции:

$$R^{(i)} = \begin{cases} 120570 \cdot \Delta^{(i)}, & 0 \leq \Delta^{(i)} \leq 0,35 \cdot 10^{-3}; \\ 23115 \cdot \Delta^{(i)} + 34,105, & 0,35 \cdot 10^{-3} < \Delta^{(i)} \leq 2,18 \cdot 10^{-3}; \\ 4788 \cdot \Delta^{(i)} + 74,015, & \Delta^{(i)} > 2,18 \cdot 10^{-3}. \end{cases} \quad (3.3)$$

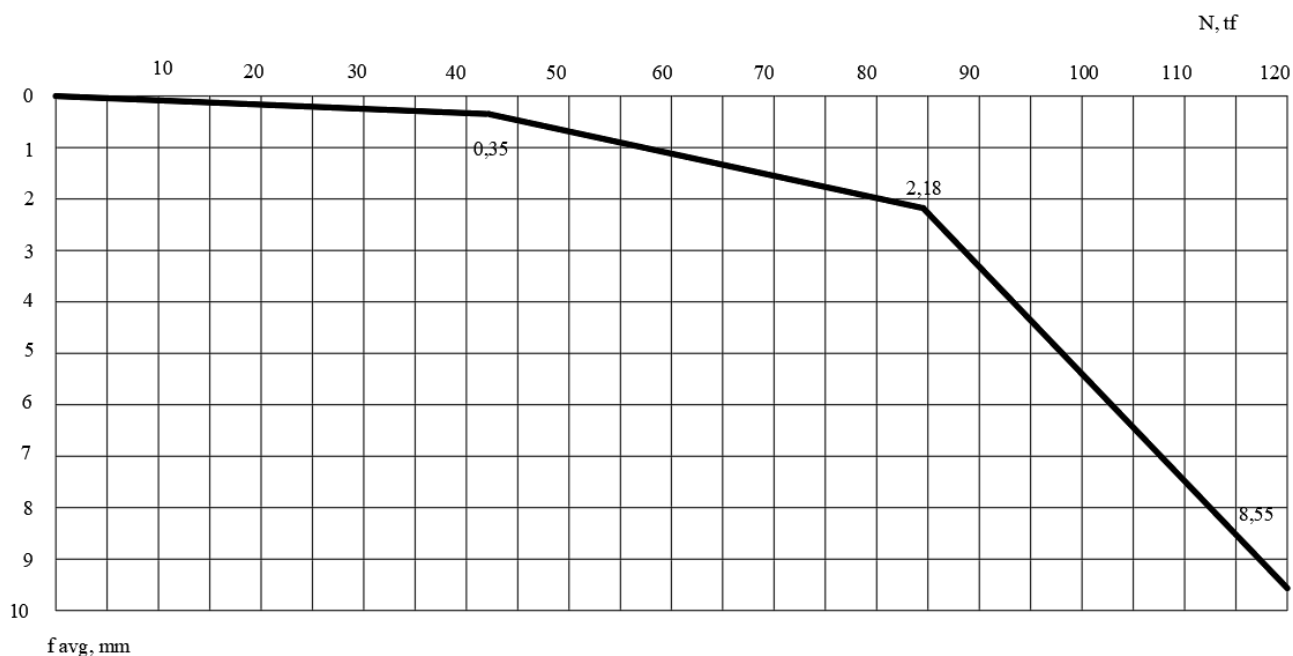


Рисунок 3.5 – Диаграмма жесткости упруго-податливой опоры

Рассматривались два варианта нагружения этой плиты:

- равномерно распределенной нагрузкой $q = 39,2266 \text{ кН} / \text{м}^2$;
- с нагрузкой от стен, распределенной по её контуру и вдоль линии симметрии по оси Y.

3.2.1 Расчет ростверка, загруженного равномерно распределенной нагрузкой

Расчет рассматриваемой фундаментной плиты, загруженной равномерно распределенной нагрузкой $q = 39,2266 \text{ кН} / \text{м}^2$, выполнялся без учета разупрочнения опор.

Численные расчеты были выполнены в трех вариантах:

1. На основе МКЭ в форме КСМ с использованием метода компенсирующих нагрузок без редукции основных неизвестных.
2. На основе МКЭ в форме КСМ с использованием метода компенсирующих нагрузок и редукцией основных неизвестных с использованием билинейной интерполяции.
3. На основе МКЭ в форме метода перемещений с использованием ПК ЛИРА.

Согласно общей физической модели составлена конечно элементная модель (рисунок 3.6), содержащая 1024 конечных элементов (сетка 32x32 с мелким разбиением и 16x16 сетка с крупным разбиением).

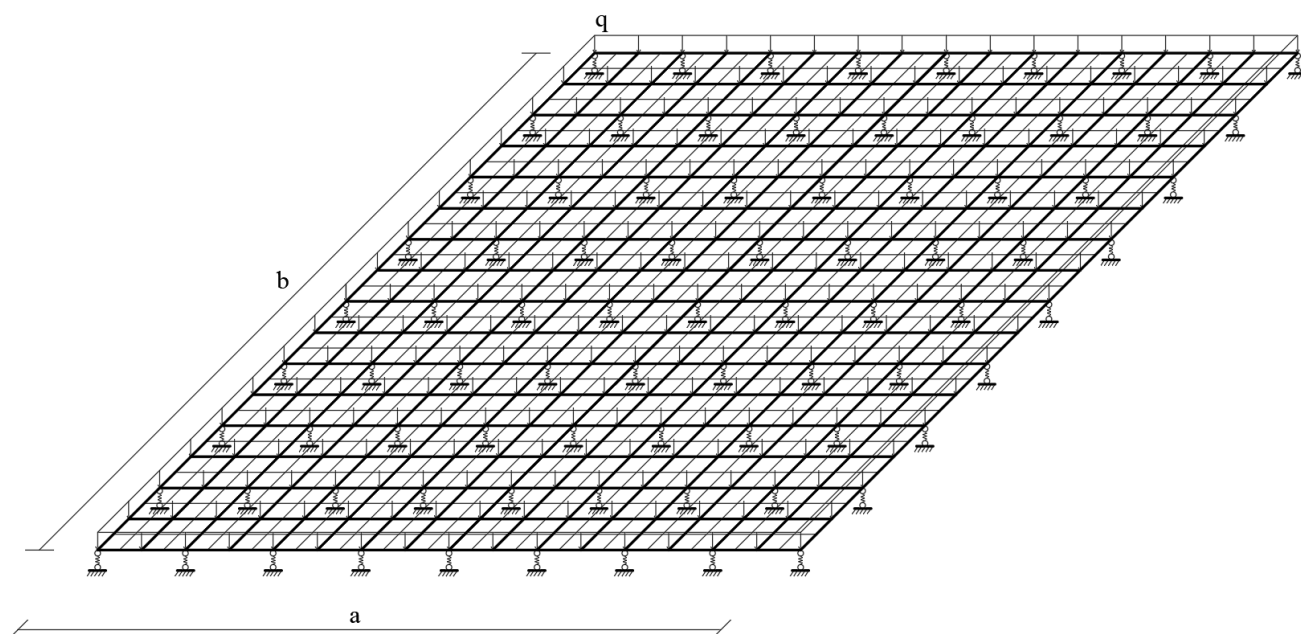


Рисунок 3.6 – Конечно-элементная модель

Нумерация неизвестных производится в следующей последовательности: сначала нумеруются все перемещения в узлах w (рисунок 3.7), затем – все изгибающие моменты M_x, M_y (рисунок 3.8), в той же последовательности узлов, далее нумеруются реакции в упругих опорах R (рисунок 3.9). Нумерация неизвестных условно показана только для неизвестных, находящихся на контуре четверти пластины.

При расчете фундаментной плиты загруженной равномерно распределенной нагрузкой, жесткость упруго-податливой опоры принята в соответствии с её значением на первом промежутке функции (3.3).

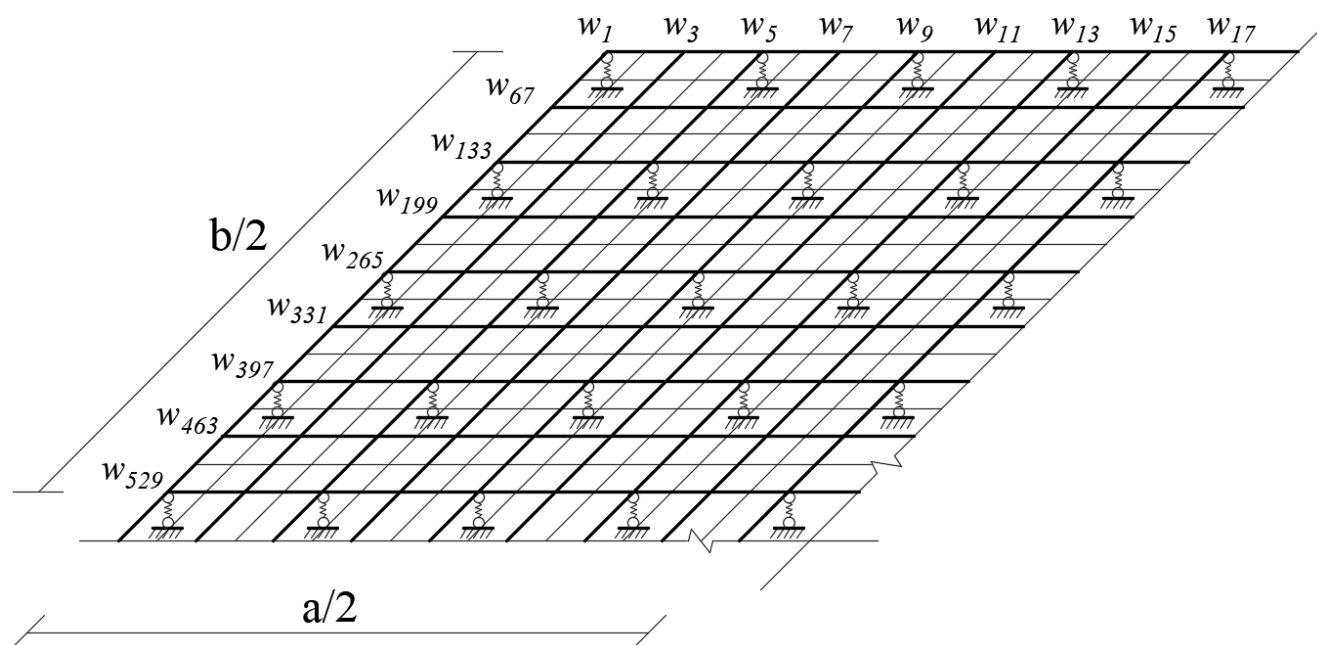
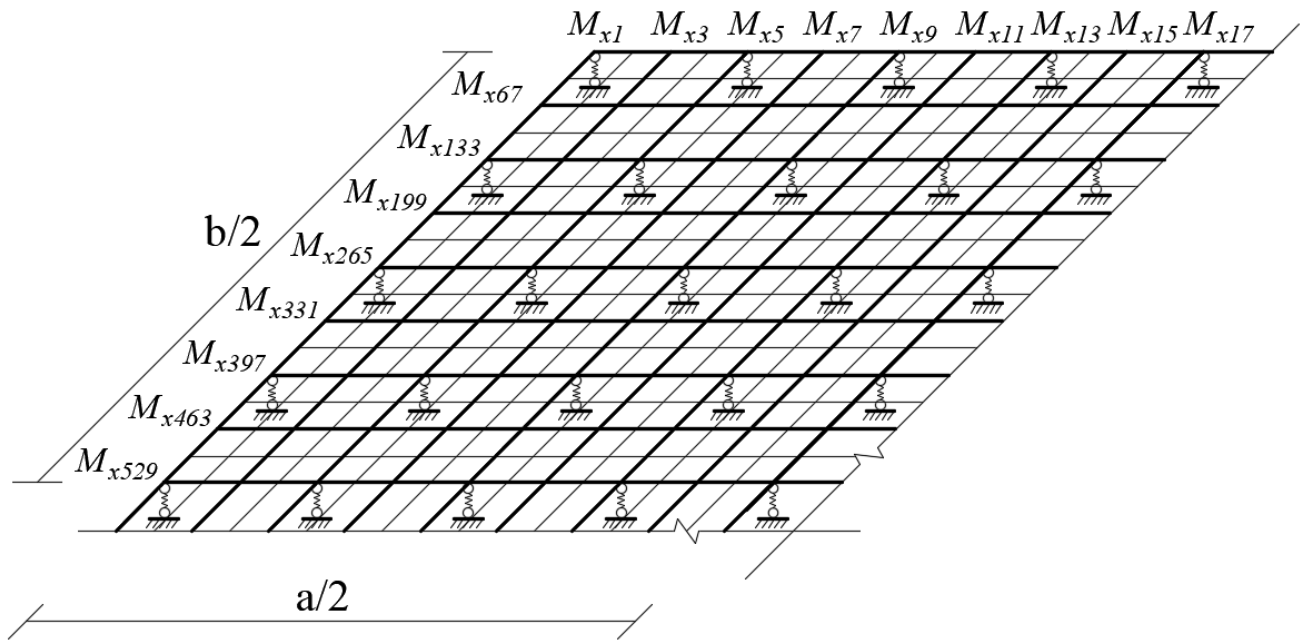
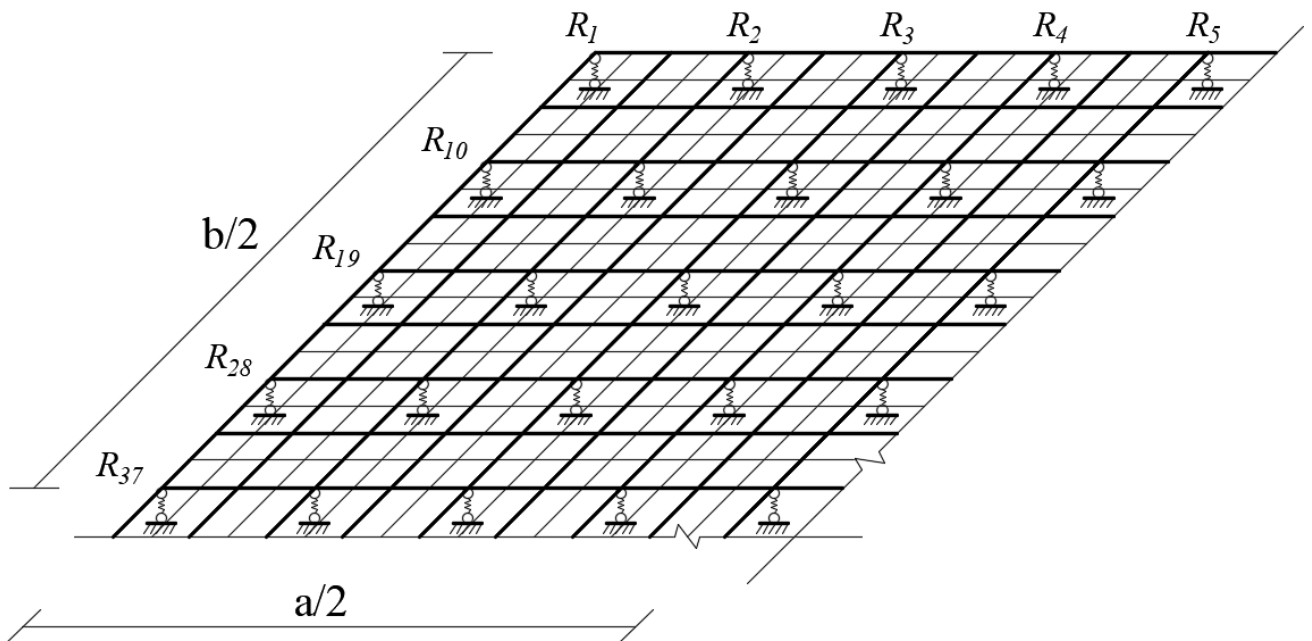


Рисунок 3.7 – Нумерация кинематических неизвестных w

Рисунок 3.8 – Нумерация силовых неизвестных M_x Рисунок 3.9 – Нумерация силовых неизвестных R

Глобальная система уравнений согласно расчетной схеме при сетке 32x32 и заданной нумерации имеет 3348 неизвестных:

1089 неизвестных вертикальных перемещений ($q_1, \dots, q_{1089} = w_1, \dots, w_{1089}$), 2178 неизвестных изгибающих моментов $M_x(x, y)$, $M_y(x, y)$, по два в каждом из узлов

сетки ($\tilde{q}_{1090}, \dots, \tilde{q}_{3267} = Mx_1, \dots, My_{2178}$), 81 неизвестных реакций в упругих связях ($\tilde{q}_{3268}, \dots, \tilde{q}_{3348} = R_1, \dots, R_{81}$).

Для их нахождения имеем систему из 3348 разрешающих уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 = r_{1,1}q_1 + \dots + r_{1,j}q_j + \dots + r_{1,1089}q_{1089} + \tilde{\delta}_{1,1090}\tilde{q}_{1090} + \dots + \tilde{\delta}_{1,j}\tilde{q}_j + \dots + \tilde{\delta}_{1,3348}\tilde{q}_{3348}, \\ \dots \\ R_i = r_{i,1}q_1 + \dots + r_{i,j}q_j + \dots + r_{i,1089}q_{1089} + \tilde{\delta}_{i,1090}\tilde{q}_{1090} + \dots + \tilde{\delta}_{i,j}\tilde{q}_j + \dots + \tilde{\delta}_{i,3348}\tilde{q}_{3348}, \\ \dots \\ R_{1089} = r_{1089,1}q_1 + \dots + r_{1089,j}q_j + \dots + r_{1089,1089}q_{1089} + \tilde{\delta}_{1089,1090}\tilde{q}_{1090} + \dots + \tilde{\delta}_{1089,j}\tilde{q}_j + \dots \\ + \tilde{\delta}_{1089,3348}\tilde{q}_{3348}, \\ \dots \\ \Delta_{1090} = r_{1090,1}q_1 + \dots + r_{1090,j}q_j + \dots + r_{1090,1089}q_{1089} + \tilde{\delta}_{1090,1090}\tilde{q}_{1090} + \dots + \tilde{\delta}_{1090,j}\tilde{q}_j + \dots \\ + \tilde{\delta}_{1090,3348}\tilde{q}_{3348}, \\ \dots \\ \Delta_i = r_{i,1}q_1 + \dots + r_{i,j}q_j + \dots + r_{i,1089}q_{1089} + \tilde{\delta}_{i,1090}\tilde{q}_{1090} + \dots + \tilde{\delta}_{i,j}\tilde{q}_j + \dots + \tilde{\delta}_{i,3348}\tilde{q}_{3348}, \\ \dots \\ \Delta_{3348} = r_{3348,1}q_1 + \dots + r_{3348,j}q_j + \dots + r_{3348,1089}q_{1089} + \tilde{\delta}_{3348,1090}\tilde{q}_{1090} + \dots + \tilde{\delta}_{3348,j}\tilde{q}_j + \dots \\ + \tilde{\delta}_{3348,3348}\tilde{q}_{3348}. \end{array} \right. \quad (3.4)$$

в матричном виде

$$\left[\begin{array}{cc} r & \tilde{r} \\ 1089 \times 1089 & 1089 \times 2259 \\ \tilde{\delta} & \delta \\ 2259 \times 1089 & 2259 \times 2259 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} q \\ 1089 \times 1 \\ \tilde{q} \\ 2259 \times 1 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} R_F \\ 1089 \times 1 \\ \Delta_F \end{array} \right\} = \{0\}, \quad (3.5)$$

или

$$[D] \left\{ \begin{array}{c} q \\ 3348 \times 1 \\ \tilde{q} \\ 3348 \times 1 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} R_F \\ 3348 \times 1 \\ \Delta_F \end{array} \right\} = \{0\}. \quad (3.6)$$

Учет граничных условий производится в соответствии с п 2.4.1.

Дополнительно в уравнения (3.5) входят граничные условия при опирании на упруго-податливую связь (рисунок 3.10).

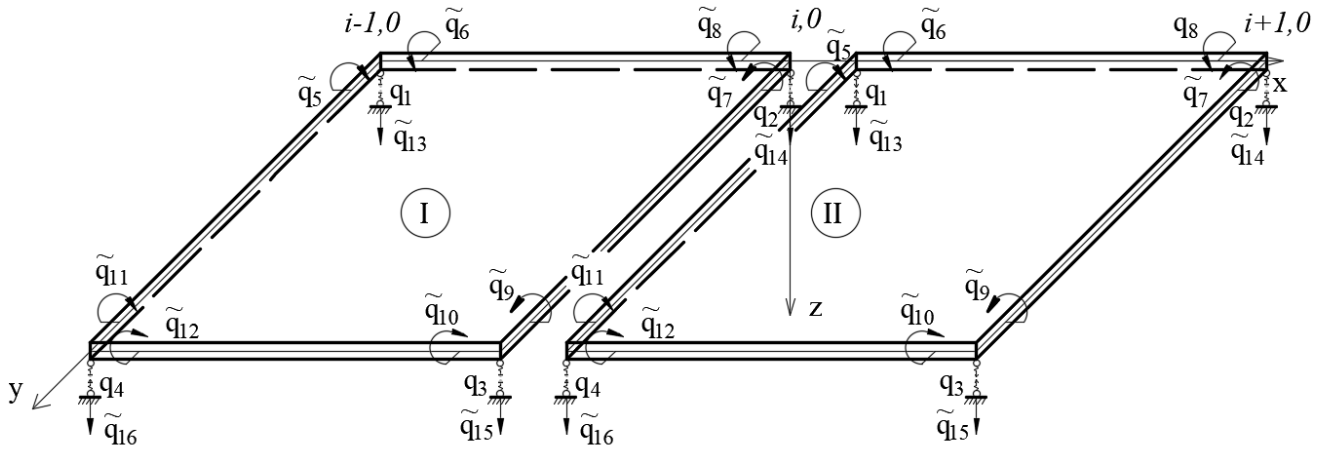


Рисунок 3.10 – Опираение на упруго-податливую связь

Математические модели этих условий имеют следующий вид:

$$R_{i,0} = R_{i,0}^I + R_{i,0}^{II} = C_{i,0} \cdot q_{i,0};$$

$$\tilde{q}_{7,(i,0)}^{II} = \tilde{q}_{5,(i,0)}^I = 0;$$

$$\tilde{q}_{8,(i,0)}^{II} = \tilde{q}_{6,(i,0)}^I, \varphi_{(i,0)}^{(y)I} + \varphi_{(i,0)}^{(y)II} = 0.$$

Система разрешающих уравнений после учета граничных условий на упруго-податливой опоре (рисунок 3.10) в соответствии с нумерацией узлов и соответствующих им уравнениям имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 = r_{1,1}q_1 + \dots + r_{1,j}q_j + \dots + r_{1,1089}q_{1089} + \tilde{\delta}_{1,1092}\tilde{q}_{1092} + \dots + \tilde{\delta}_{1,j}\tilde{q}_j + \\ + \dots + \tilde{\delta}_{1,3348}\tilde{q}_{3348}, \\ \dots \\ R_i = r_{i,1}q_1 + \dots + r_{i,j}q_j + \dots + r_{i,1089}q_{1089} + \tilde{\delta}_{i,1092}\tilde{q}_{1092} + \dots + \tilde{\delta}_{i,j}\tilde{q}_j + \\ + \dots + \tilde{\delta}_{i,3348}\tilde{q}_{3348}, \\ \dots \\ R_{1089} = r_{1089,1}q_1 + \dots + r_{1089,j}q_j + \dots + r_{1089,1089}q_{1089} + \tilde{\delta}_{1089,1092}\tilde{q}_{1092} + \\ + \dots + \tilde{\delta}_{1089,j}\tilde{q}_j + \dots + \tilde{\delta}_{1089,3348}\tilde{q}_{3348}, \\ \dots \end{array} \right. \quad (3.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \dots \\
 \Delta_{1092} = r_{1092,1}q_1 + \dots + r_{1092,j}q_j + \dots + r_{1092,1089}q_{1089} + \tilde{\delta}_{1092,1092}\tilde{q}_{1092} + \\
 + \dots + \tilde{\delta}_{1092,j}\tilde{q}_j + \dots + \tilde{\delta}_{1092,3348}\tilde{q}_{3348}, \\
 \dots \\
 \Delta_i = r_{i,1}q_1 + \dots + r_{i,j}q_j + \dots + r_{i,1089}q_{1089} + \tilde{\delta}_{i,1092}\tilde{q}_{1092} + \dots + \tilde{\delta}_{i,j}\tilde{q}_j + \\
 + \dots + \tilde{\delta}_{i,3348}\tilde{q}_{3348}, \\
 \dots \\
 \Delta_{3348} = r_{3348,1}q_1 + \dots + r_{3348,j}q_j + \dots + r_{3348,1089}q_{1089} + \tilde{\delta}_{3348,1092}\tilde{q}_{1092} + \\
 + \dots + \tilde{\delta}_{3348,j}\tilde{q}_j + \dots + \tilde{\delta}_{3348,3348}\tilde{q}_{3348}.
 \end{array} \right.$$

в матричном виде

$$\begin{matrix} [D] \\ 3216 \times 3216 \end{matrix} \begin{Bmatrix} q \\ \tilde{q} \end{Bmatrix}_{3216 \times 1} + \begin{Bmatrix} R_F \\ \Delta_F \end{Bmatrix}_{3216 \times 1} = \{0\}. \quad (3.8)$$

В итоге после учета граничных условий глобальная система уравнений смешанного метода имеет при сетке 32x32 содержащая 3216 неизвестных:

1089 вертикальных перемещений $w_1, \dots, w_{1089} : (q_1, \dots, q_{1089})$, 2046 изгибающих моментов $M_{x,1}, \dots, M_{x,1023}, M_{y,1}, \dots, M_{y,1023} : (\tilde{q}_{1092}, \dots, \tilde{q}_{3265})$, 81 реакция в упругих связях $R_1, \dots, R_{81} : (\tilde{q}_{3268}, \dots, \tilde{q}_{3348})$.

После нахождения коэффициентов интерполяционного полинома, связывающего основные неизвестные в узлах, значения в узлах мелкой сетки, выраженные через значения тех же узловых неизвестных крупной сетки, вводятся в систему уравнений МКЭ в форме КСМ.

Редуцированная глобальная система разрешающих уравнений записывается в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l}
R_1 = r_{1,1}q_1 + \dots + r_{1,j}q_j + \dots + r_{1,289}q_{289} + \tilde{\delta}_{1,292}\tilde{q}_{292} + \dots + \tilde{\delta}_{1,j}\tilde{q}_j + \dots + \tilde{\delta}_{1,880}\tilde{q}_{880}, \\
\dots \\
R_i = r_{i,1}q_1 + \dots + r_{i,j}q_j + \dots + r_{i,289}q_{289} + \tilde{\delta}_{i,292}\tilde{q}_{292} + \dots + \tilde{\delta}_{i,j}\tilde{q}_j + \dots + \tilde{\delta}_{i,880}\tilde{q}_{880}, \\
\dots \\
R_{289} = r_{289,1}q_1 + \dots + r_{289,j}q_j + \dots + r_{289,289}q_{289} + \tilde{\delta}_{289,292}\tilde{q}_{292} + \dots + \tilde{\delta}_{289,j}\tilde{q}_j + \\
+ \dots + \tilde{\delta}_{289,880}\tilde{q}_{880}, \\
\dots \\
\Delta_{292} = r_{292,1}q_1 + \dots + r_{292,j}q_j + \dots + r_{292,289}q_{289} + \tilde{\delta}_{292,292}\tilde{q}_{292} + \dots + \tilde{\delta}_{292,j}\tilde{q}_j + \\
+ \dots + \tilde{\delta}_{292,880}\tilde{q}_{880}, \\
\dots \\
\Delta_i = r_{i,1}q_1 + \dots + r_{i,j}q_j + \dots + r_{i,289}q_{289} + \tilde{\delta}_{i,292}\tilde{q}_{292} + \dots + \tilde{\delta}_{i,j}\tilde{q}_j + \dots + \tilde{\delta}_{i,880}\tilde{q}_{880}, \\
\dots \\
\Delta_{880} = r_{880,1}q_1 + \dots + r_{880,j}q_j + \dots + r_{880,289}q_{289} + \tilde{\delta}_{880,292}\tilde{q}_{292} + \dots + \tilde{\delta}_{880,j}\tilde{q}_j + \\
+ \dots + \tilde{\delta}_{880,880}\tilde{q}_{880}.
\end{array} \right. \quad (3.9)$$

в матричном виде

$$\left[D \right]_{880 \times 880}^* \begin{Bmatrix} q \\ \tilde{q} \end{Bmatrix}_{880 \times 1} + \begin{Bmatrix} R_F \\ \Delta_F \end{Bmatrix}_{880 \times 1} = \{0\}, \quad (3.10)$$

В итоге получена редуцированная глобальная система уравнений смешанного метода к сетке 16x16, которая имеет 880 неизвестных: 289 неизвестных вертикальных перемещений $(q_{21}, q_{23}, q_{25}, q_{39}, q_{41}, q_{43}, q_{57}, q_{59}, q_{61})$, 510 неизвестных изгибающих моментов $M_x(x, y)$, $M_y(x, y)$, $(\tilde{q}_{122}, \tilde{q}_{123}, \dots, \tilde{q}_{202}, \tilde{q}_{203})$, 81 неизвестных реакций в упругих связях $(\tilde{q}_{3268}, \dots, \tilde{q}_{3348} = R_1, \dots, R_{81})$,

Для верификации предлагаемого алгоритма произведено сравнение с результатами численных расчетов, произведёнными в верифицированном программном комплексе, в основу которого положены принципы МКЭ в форме метода перемещений. Был произведён линейный расчет, при котором жесткость упруго-податливых связей полагалась равной их жесткости на первом участке. При расчете с помощью верифицированного программного комплекса были рассмотрены различные варианты разбиения плиты на конечные элементы – сетка

16x16, 32x32 и 64x64. Сравнение результатов численного расчета приведено в таблице 3.1.

Таблица 3.1 – Численные значения прогибов w , изгибающих моментов M_x , M_y и реакций в опорах R , полученные при решении плиты на действие равномерно распределенной нагрузки

	МКЭ в КСМ	МКЭ в КСМ по редуцированной расчетной схеме	ПК ЛИРА		
			16x16	32x32	64x64
<i>КЭ сетка</i>	16x16	16x16	16x16	32x32	64x64
$w(0,b/2)$, мм	-0,3916	-0,3916	-0,3797	-0,3795	-0,3793
$w(a/2,b/2)$, мм	-0,7640	-0,7639	-0,7632	-0,7632	-0,7631
$M_x(0,b/2)$, кН·м	0,000	0,000	7,540	4,883	3,152
$M_y(0,b/2)$, кН·м	-11,685	-11,676	1,003	-3,686	-10,009
$M_x(a/2,b/2)$, кН·м	-11,691	-12,065	-0,770	-5,233	-10,828
$M_y(a/2,b/2)$, кН·м	-11,691	-12,065	-0,770	-5,233	-10,828
$R(0,b/2)$, кН	-46,308	-46,308	-44,898	-44,869	-44,853
$R(a/2,b/2)$, кН	-90,332	-90,335	-90,235	-90,236	-90,231

Результаты численного расчета на статическое воздействие, выполненного на основе МКЭ в форме КСМ показывают близкие значения по сравнению со значениями, полученными в верифицированном программном комплексе (ПК ЛИРА). Это наблюдается при различных разбиениях плиты на конечные элементы – 16x16, 32x32 и 64x64.

При этом следует отметить, что результаты, полученные с использованием предлагаемого алгоритма, когда в качестве крупного разбиения используется КЭ-сетка 16x8, а мелкого 32x32, позволяет выявить, что даже с меньшим количеством элементов (16x16) можно достичь высокой точности численных расчетов. Это подчеркивает эффективность предложенного подхода.

3.3.2 Расчет ростверка с нагрузкой от стен

При расчете фундаментной плиты с загрузкой по второму варианту, распределенная нагрузка от собственного веса стен и перекрытий, а также эксплуатационных нагрузок, приложенных к перекрытию, моделируется как

линейно-распределенная нагрузка вдоль осей стен. Величина нагрузки составляет 176,52 кН/м вдоль центральной стены, параллельной оси Y и 88,26 кН/м вдоль крайних стен, параллельных оси Y . Для крайних стен, параллельных оси X , линейно-распределенная нагрузка составляет 29,42 кН/м. В рамках упрощенной расчетной схемы, распределенная нагрузка эквивалентно заменена сосредоточенными силами, приложенными в узлах расчетной модели вдоль линий, соответствующих расположению осей стен.

Согласно общей физической модели составлена конечно элементная модель (рисунок 3.11), содержащая 1024 конечных элементов (сетка 32x32 с мелким разбиением и 16x16 сетка с крупным разбиением).

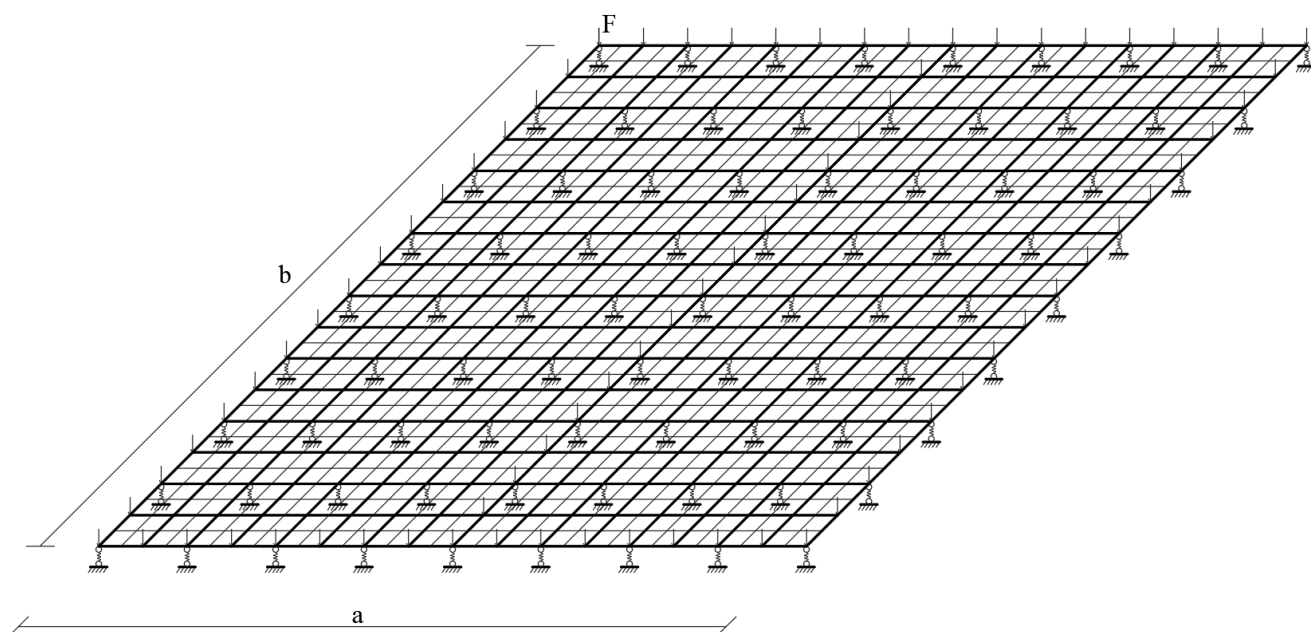


Рисунок 3.11 – Конечно-элементная модель

Численные расчеты были выполнены в трех вариантах:

1. На основе МКЭ в форме КСМ с использованием метода компенсирующих нагрузок без редукции основных неизвестных.
2. На основе МКЭ в форме КСМ с использованием метода компенсирующих нагрузок и редукцией основных неизвестных с использованием билинейной интерполяции.

3. На основе МКЭ в форме метода перемещений с использованием ПК ЛИРА.

Как и ранее, работа сваи в грунте представлена как работа отдельно стоящей упруго-податливой опоры. Анализ функции (3.3) демонстрирует, что коэффициент жесткости сваи, действующей как опора в грунте, существенно меняется под воздействием нагрузки. Это подчеркивает необходимость проведения детального анализа при таких изменяющихся жесткостных свойствах основания.

При реализации предлагаемого алгоритма расчет выполнен для редуцированной системы разрешающих уравнений, которая записывается в матричном виде:

$$\begin{matrix} [D]_{880 \times 880}^* \begin{Bmatrix} q \\ \tilde{q} \end{Bmatrix}_{880 \times 1} + \begin{Bmatrix} R_q \\ \Delta_q \end{Bmatrix}_{880 \times 1} = \{0\} \end{matrix} \quad (3.11)$$

На первом этапе выполнен расчет без учета разупрочнения опор, когда в матрицу откликов в качестве жесткости упруго-податливой опоры входит жесткость сваи, равной её значению на промежутке $0 \leq \Delta^{(i)} \leq 0,35 \cdot 10^{-3}$ функции (3.3). Результаты численного расчета приведены в таблице 3.2.

Таблица 3.2 – Численные значения прогибов w , изгибающих моментов M_x , M_y и реакций в опорах R , полученные при решении плиты на действие нагрузки от стен без разупрочнения опор

	МКЭ в КСМ	МКЭ в КСМ по редуцированной расчетной схеме	ПК ЛИРА		
<i>КЭ сетка</i>	16x16	16x16	16x16	32x32	64x64
$w(0,b/2), мм$	-0,9308	-0,9306	-0,9310	-0,9300	-0,9290
$w(a/2,b/2), мм$	-1,0585	-1,0580	-1,0590	-1,0590	-1,0590
$M_x(0,b/2), кН·м$	0,000	0,000	-5,560	-2,393	-0,049
$M_y(0,b/2), кН·м$	-26,727	-26,878	-0,873	-10,228	-24,301
$M_x(a/2,b/2), кН·м$	50,573	49,840	39,648	46,170	45,719
$M_y(a/2,b/2), кН·м$	-2,138	-2,603	8,198	4,648	-1,608
$R(0,b/2), кН$	-110,055	-110,030	-110,089	-109,962	-109,913
$R(a/2,b/2), кН$	-125,151	-125,094	-125,162	-126,133	-125,172

Полученные результаты представлены в виде изополей перемещений w (рисунок 3.12), изополей моментов M_x (рисунок 3.13), изополей моментов M_y (рисунок 3.14).

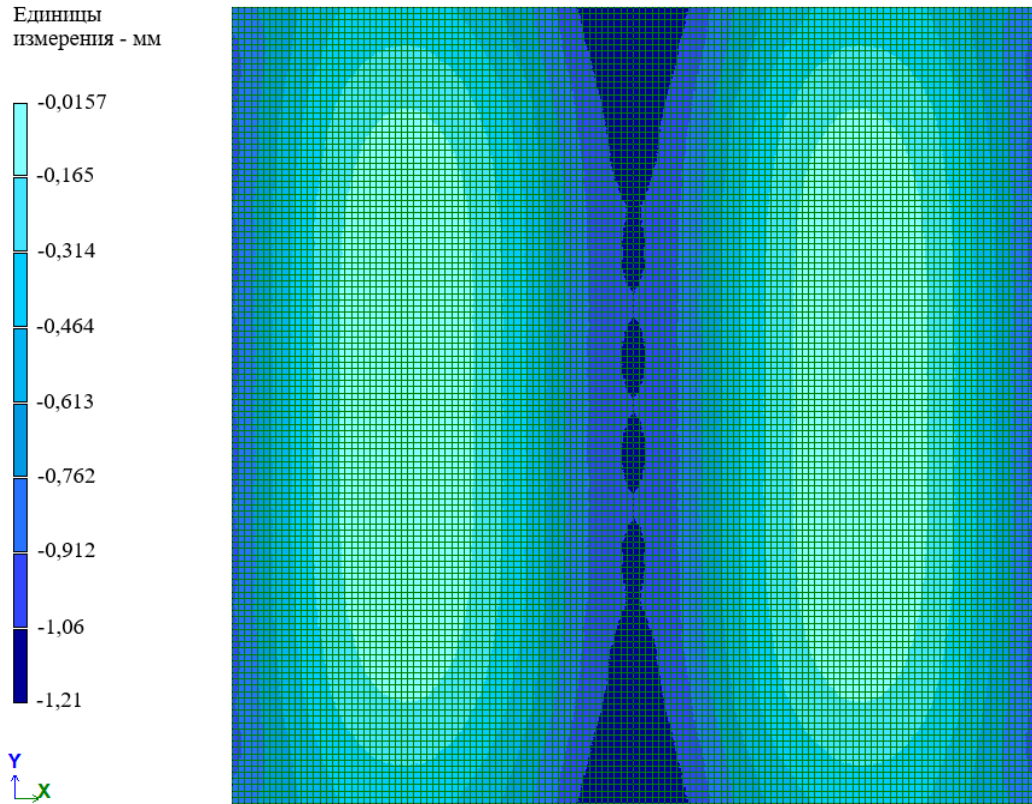
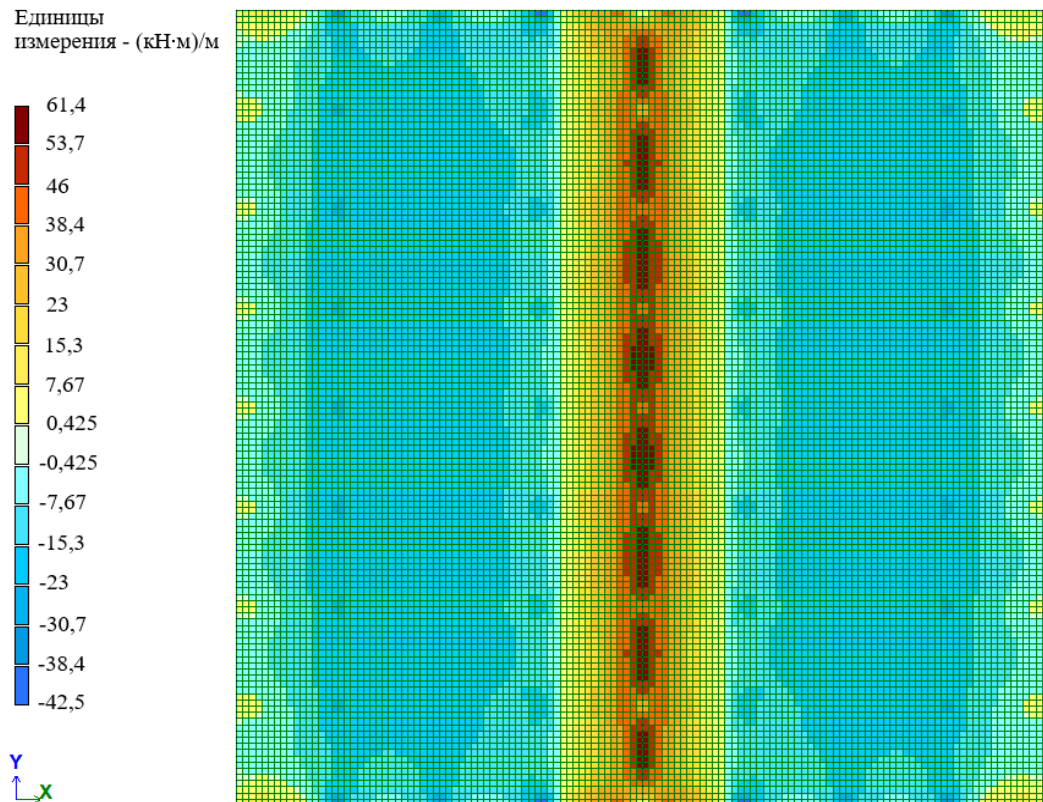
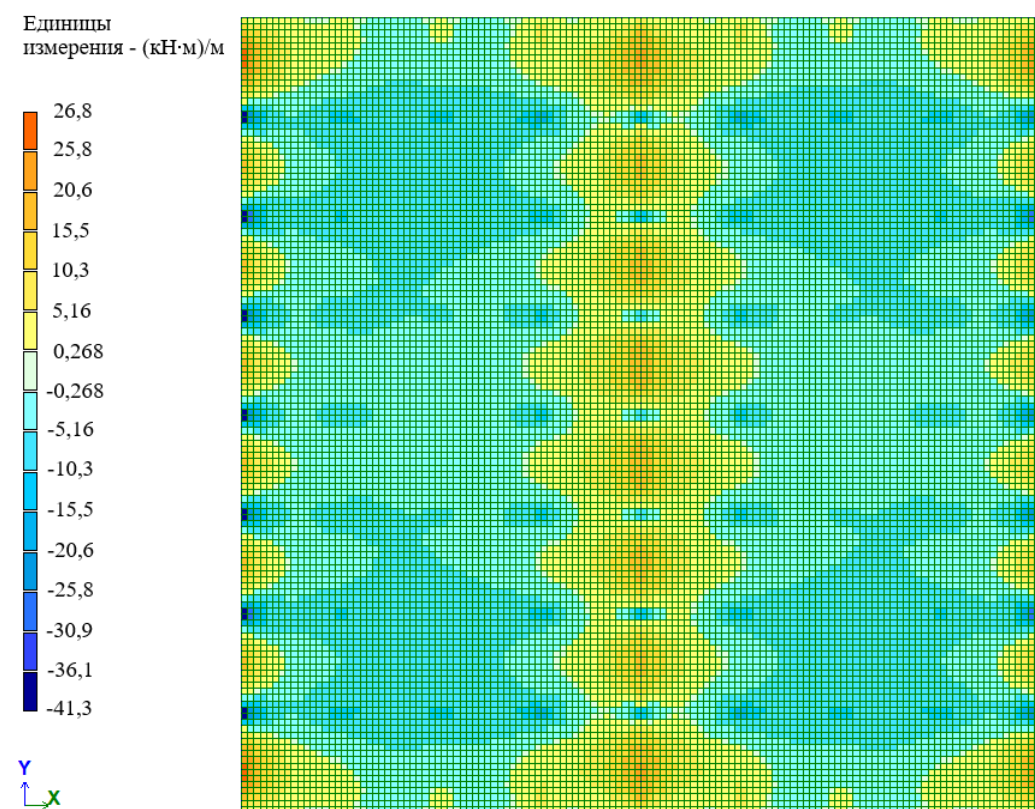


Рисунок 3.12 – Изополя перемещений w

Рисунок 3.13 – Изополя моментов M_x Рисунок 3.14 – Изополя моментов M_y

Далее выполнен расчет с учетом нелинейной работы упруго-податливых связей, согласно предлагаемому алгоритму.

Так как, согласно результатам статических испытаний грунтов сваями, функция, описывающая её поведение, имеет вид кусочной функции и состоит из трех участков, перебор был проведён в два этапа: на первом этапе произведён перебор всех связей, перемещение в которых соответствует условию $\Delta^{(i)} > 0,35 \cdot 10^{-3}$ на втором участке функции. На втором этапе произведён перебор всех связей, перемещение в которых соответствует условию $\Delta^{(i)} > 2,18 \cdot 10^{-3}$ на третьем участке функции.

Если для принятия решения о выходе из алгоритма принять $\Delta_{огр} = 1\%$, то для решения задачи на первом этапе перебора потребуется 19 итераций, и 8 на втором этапе перебора.

Для расчета с учетом нелинейной работы упруго-податливых связей в верифицированном программном комплексе, основанном на МКЭ в форме метода перемещений, было задано 50 шагов разбиения нагрузки.

Результаты численного расчета приведены в таблице 3.3.

Таблица 3.3 – Численные значения прогибов w , изгибающих моментов M_x , M_y и реакций в опорах R , полученные при решении плиты на действие нагрузки от стен с учетом нелинейной работы упруго-податливых связей

	МКЭ в КСМ	МКЭ в КСМ по редуцированной расчетной схеме	ПК ЛИРА		
			16x16	32x32	64x64
<i>КЭ сетка</i>	16x16	16x16	16x16	32x32	64x64
$w(0,b/2)$, мм	-2,2620	-2,2700	-2,3360	-2,3520	-2,3500
$w(a/2,b/2)$, мм	-1,8870	-1,8870	-1,8500	-1,8720	-1,8790
$M_x(0,b/2)$, кН·м	0	0	-12,033	-5,668	-1,942
$M_y(0,b/2)$, кН·м	-22,065	-22,167	-4,992	-10,581	-20,604
$M_x(a/2,b/2)$, кН·м	78,885	78,483	58,399	68,882	71,814
$M_y(a/2,b/2)$, кН·м	5,727	5,433	7,581	7,296	4,227
$R(0,b/2)$, кН	-83,180	-83,425	-83,504	-83,582	-83,572
$R(a/2,b/2)$, кН	-75,354	-76,109	-76,453	-76,982	-77,149

Полученные результаты представлены в виде изополей перемещений w (рисунок 3.12), изополей моментов M_x (рисунок 3.13), изополей моментов M_y (рисунок 3.14).

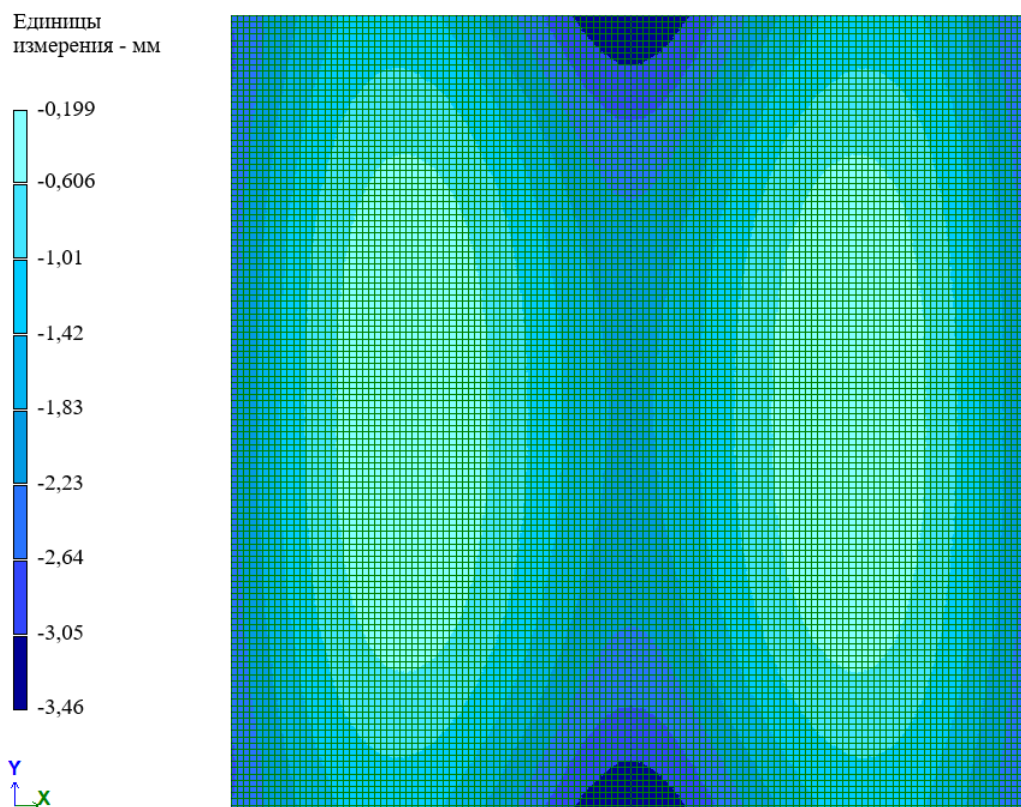
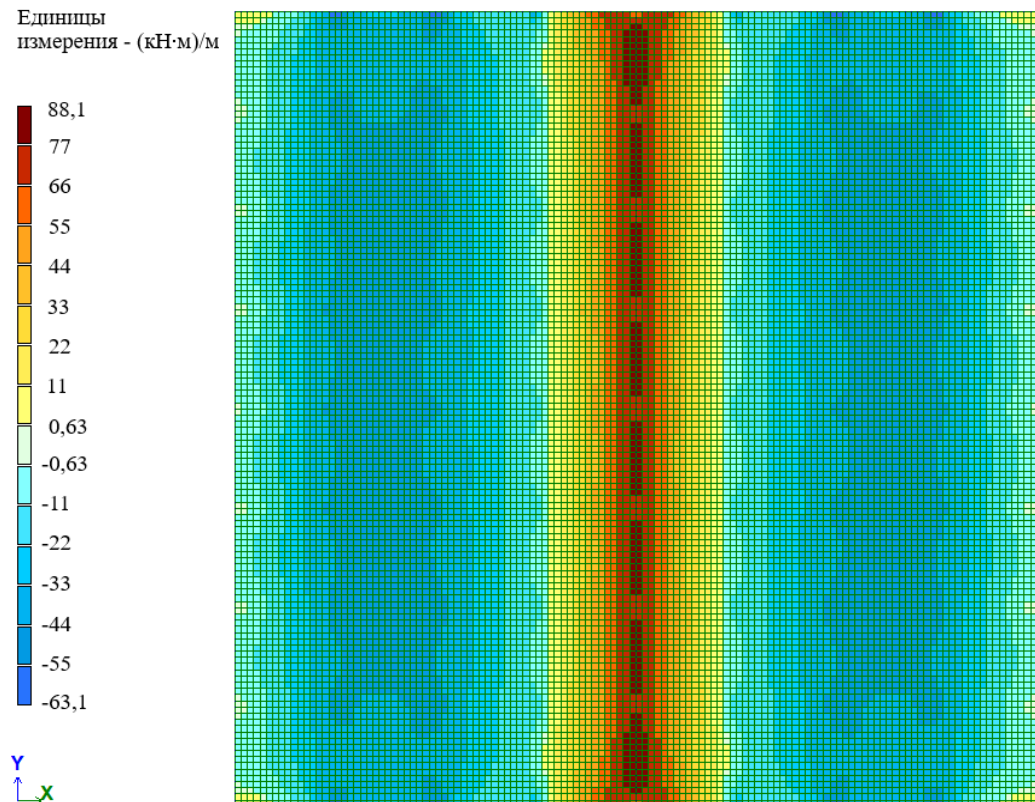
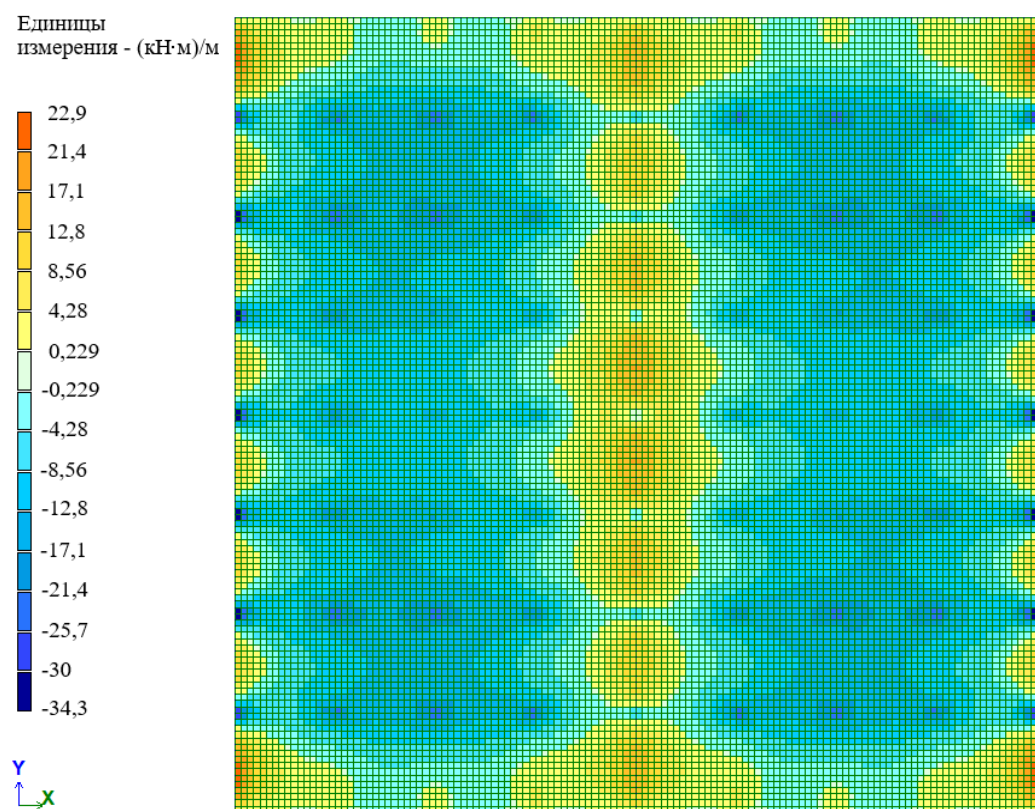


Рисунок 3.15 – Изополя перемещений w

Рисунок 3.16 – Изополя моментов M_x Рисунок 3.17 – Изополя моментов M_y

Анализ полученных результатов показал, что учет нелинейной работы свай приводит к значительному увеличению перемещений, например, в центре рассматриваемой фундаментной плиты он изменился от -1,058 мм в линейном расчете до -1,887 мм в нелинейном. Моменты M_x в центре рассматриваемой конструкции изменились от 50,573 кН·м в линейном расчете до 78,885 кН·м в нелинейном, а момент M_y в центре плиты изменился от -2,138 кН·м до 5,727 кН·м, что указывает на существенное влияние нелинейной упруго-податливой работы свай на напряженно-деформированное состояние ростверка. При этом нагрузка на сваи значительно уменьшилась, что свидетельствует о более равномерном перераспределении нагрузки на совместно работающее и связанное ростверком свайное поле.

3.3 Выводы по главе 3

1. Предлагаемый алгоритм, сочетающий преимущества интерполяции основных неизвестных и метода компенсирующих нагрузок на основе МКЭ в форме КСМ, позволяет эффективно решать задачи расчета плит на упругом основании с изменяющейся жесткостью при статических нагрузках. При этом следует отметить, что использование интерполяции основных неизвестных позволяет существенно понизить порядок системы разрешающих уравнений, сохраняя достаточную точность при выполнении численных расчетов. Для тестового примера порядок редуцированной системы уравнений $n=880$, для системы, полученной на основе МКЭ в форме КСМ без процедуры редуцирования $n=3216$.

2. Результаты численных расчетов по МКЭ в форме КСМ и по МКЭ в форме метода перемещений демонстрируют высокую сходимость значений прогибов w и реакций R . Расхождения в численных значениях моментов M_x и M_y при одинаковом числе конечных снижается при сгущении конечно элементной при расчете по МКЭ в форме метода перемещений, подтверждая сходимость решений.

3. Проведение численных расчетов фундаментной плиты с различными вариантами нагружения дало возможность оценить точность предложенного алгоритма. Сравнения с результатами, полученными в верифицированных программных комплексах, подтвердили корректность выбранного подхода.

ГЛАВА 4. АЛГОРИТМЫ РЕДУЦИРОВАНИЯ СИСТЕМЫ ЧАСТОТНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ОСНОВЕ МКЭ В ФОРМЕ КЛАССИЧЕСКОГО СМЕШАННОГО МЕТОДА

Задачи расчета пластин на динамическое воздействие, связанные с определением собственных частот и форм колебаний, занимают важное место в инженерной практике. Наибольшие сложности при решении таких задач возникают при вычислении собственных значений глобальной матрицы. С математической точки зрения, это решение неполной проблемы собственных значений и собственных векторов больших действительных симметричных матриц.

Для эффективного решения задач динамического расчета пластин нами были разработаны алгоритмы, основанные на редуцировании системы частотных уравнений с использованием интерполяции основных неизвестных, а также комбинированные алгоритмы, сочетающие интерполяцию основных неизвестных и конденсационные методы.

4.1 Построение динамической матрицы масс

Для формирования матрицы масс конечного элемента при расчете на динамическое воздействие по МКЭ используются различные подходы, которые приводят к получению согласованной, либо диагональной матрицы масс.

Простейший способ получения диагональной матрицы масс заключается в сосредоточении массы каждого конечного элемента в его узлах с равномерным распределением между ними. Данный подход обладает физической наглядностью и при достаточном сгущении конечно-элементной сетки позволяет достичь приемлемой точности.

Рассмотрим построение динамической матрицы масс для изгибаемого прямоугольного элемента с 12 степенями свободы.

Формирование матрицы масс выполнялось с использованием результатов, полученных в работе [37]. Согласно им, согласованная матрица масс вычисляется по формуле:

$$[\mathbf{m}] = \int_0^a \int_0^b \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{m}} & 0 & 0 \\ 0 & \rho I_x & 0 \\ 0 & 0 & \rho I_y \end{bmatrix} [\Phi]^T \cdot [\Phi] dx dy. \quad (4.1)$$

$$\text{где } [\Phi] = \begin{bmatrix} [\Phi_1(x, y)] & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} [\Phi_1(x, y)] & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} [\Phi_1(x, y)] \end{bmatrix};$$

$$[\Phi_1(x, y)] = [1, x, y, x^2, y^2, xy, x^2y, xy^2, x^3, y^3, x^3y, xy^3], \quad (4.2)$$

$\bar{\mathbf{m}}$ – масса, приходящаяся на единицу элементарного объема пластины;

$(\rho I_x^{(y)}) dx dy$ – элементарный момент инерции массы, создающий поворот вокруг оси y и изгиб в плоскости xoz ;

$(\rho I_x^{(x)}) dx dy$ – элементарный момент инерции массы, создающий поворот относительно оси x и изгиб в плоскости yoz .

4.2 Модификация алгоритма редуцирования системы частотных уравнений МКЭ в форме классического смешанного метода с использованием интерполяции основных неизвестных

4.2.1 Алгоритм редуцирования системы частотных уравнений МКЭ в форме классического смешанного метода с использованием интерполяции основных неизвестных

Алгоритм редуцирования системы уравнений МКЭ в форме КСМ с использованием интерполяции основных неизвестных для расчета пластин на

статическое воздействие, представленный в главе 2, может быть модифицирован для редуцирования частотных уравнений, получаемых при расчете пластин на динамическое воздействие.

Основные шаги этого алгоритма рассмотрены ниже.

1. Выполняется разбиение рассматриваемой пластины на две системы конечных элементов:

- крупной КЭ сетки с узлами I, J ;
- мелкой КЭ сетки с узлами i, j , где узлы I, J являются главными, а узлы i, j – второстепенными.

2. Для системы КЭ с мелкой сеткой составляется система частотных уравнений:

$$D \begin{Bmatrix} q_r \\ \tilde{q}_s \end{Bmatrix} - \lambda m \begin{Bmatrix} q_r \\ \tilde{q}_s \end{Bmatrix} = 0 \quad (4.3)$$

где D – глобальная матрица откликов этой системы КЭ;

m – её глобальная матрица масс (согласованная или диагональная).

3. С помощью интерполяционного полинома (2.5) устанавливается связь между перемещениями и усилиями в узлах i, j и I, J . Коэффициенты полинома позволяют выразить значения основных неизвестных смешанного метода в узлах мелкой КЭ сетки через те же значения в узлах крупной КЭ сетки.

С использованием установленных соотношений выполняется редуцирование матрицы откликов.

4. Устанавливается связь между массами узлов и редуцирование матрицы масс.

5. Формируется редуцированная система частотных уравнений (4.4).

$$D^* \begin{Bmatrix} q_r \\ \tilde{q}_s \end{Bmatrix} - \lambda M_r^* \begin{Bmatrix} q_r \\ \tilde{q}_s \end{Bmatrix} = 0 \quad (4.4)$$

6. Выполняется решение редуцированной системы (4.4) для определения собственных частот.

7. При необходимости уточнения полученных результатов выполняется уменьшение размеров ячейки сетки с узлами I, J на следующем этапе численного расчета.

Данный алгоритм позволяет эффективно редуцировать систему частотных уравнений МКЭ в форме КСМ для задач динамического расчета пластин.

4.2.2 Процедура редуцирования матрицы масс

Рассмотрим подробнее процедуру редуцирования матрицы масс с мелкой сетки к крупной сетке, состоящую из нижеследующих шагов.

1. Создаются матрицы масс мелкой и крупной сетки.

Матрица масс для системы с мелкой КЭ сеткой:

$$M_f = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \cdots & m_{1,N_f} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \cdots & m_{2,N_f} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{N_f,1} & m_{N_f,2} & \cdots & m_{N_f,N_f} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

где N_f – количество узлов на мелкой сетке;

$m_{i,j}$ – масса узла в узле (i, j) на мелкой сетке.

Матрица масс для системы с крупной КЭ сеткой:

$$M_r = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \cdots & m_{1,N_r} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \cdots & m_{2,N_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{N_r,1} & m_{N_r,2} & \cdots & m_{N_r,N_r} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

где N_r – количество узлов на крупной сетке;

$m_{I,J}$ – масса узла в узле (I, J) на крупной сетке.

2. Группировка узлов мелкой сетки

Для каждого главного узла с массой $m_{I,J}$ на крупной сетке выбираются 9 соседних узлов из мелкой сетки (рисунок 4.1), с соответствующими им массами, определяемыми в соответствии с коэффициентами интерполяции:

$m_{i-1,j-1}$; $m_{i,j-1}$; $m_{i+1,j-1}$; $m_{i-1,j}$; $m_{i,j} = m_{I,J}$ (главный узел); $m_{i+1,j}$; $m_{i-1,j+1}$; $m_{i,j+1}$; $m_{i+1,j+1}$.

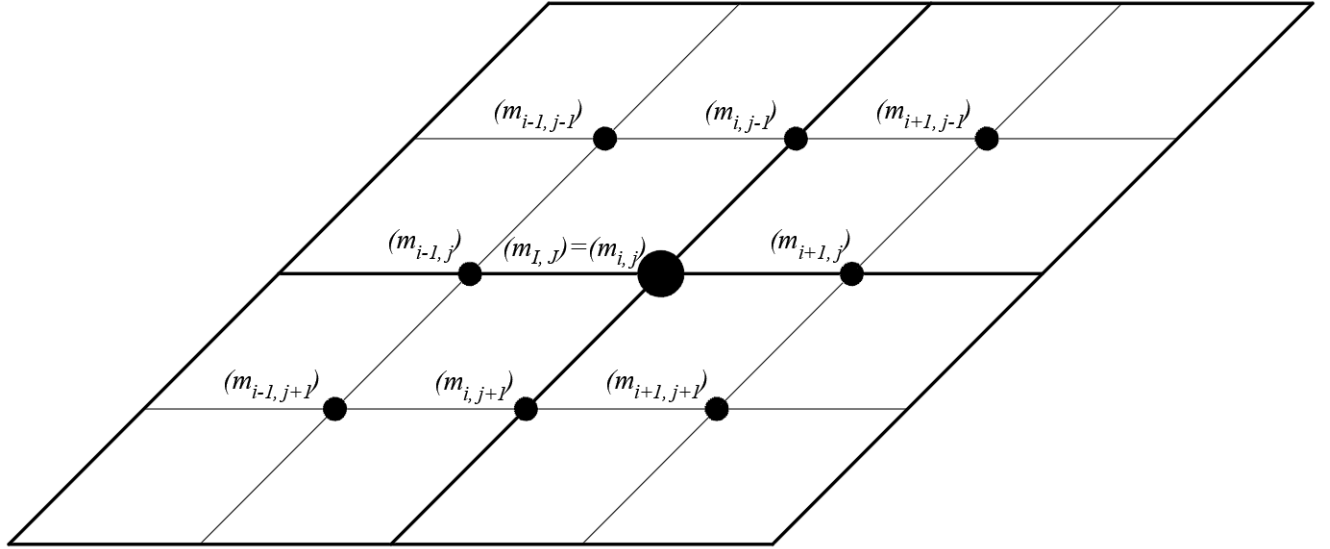


Рисунок 4.1 – Конечно-элементная область, в пределах которой выполняется редуцирование масс на основе интерполяции

3. Выбираются коэффициенты интерполяции.

В данном исследовании коэффициенты для интерполяции на основании массы главного узла $m_{I,J}$ представлены выражением (4.7).

$$\begin{bmatrix} m_{i-1,j-1} \\ m_{i,j-1} \\ m_{i+1,j-1} \\ m_{i-1,j} \\ m_{i,j} \\ m_{i+1,j} \\ m_{i-1,j+1} \\ m_{i,j+1} \\ m_{i+1,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,25 \\ 0,5 \\ 0,25 \\ 0,5 \\ 1 \\ 0,5 \\ 0,25 \\ 0,5 \\ 0,25 \end{bmatrix} \cdot m_{I,J} \quad (4.7)$$

4. Выполняется численный расчет редуцированной массы

Для каждого главного узла крупной сетки (I, J) с учетом выражений (4.7) агрегируются массы из 9 узлов мелкой:

$$M_{I,J} = 0,25 \cdot m_{i-1,j-1} + 0,5 \cdot m_{i,j-1} + 0,25 \cdot m_{i+1,j-1} + 0,5 \cdot m_{i-1,j} + 1 \cdot m_{i,j} + \\ + 0,5 \cdot m_{i+1,j} + 0,25 \cdot m_{i-1,j+1} + 0,5 \cdot m_{i,j+1} + 0,25 \cdot m_{i+1,j+1} \quad (4.8)$$

5. Выполняется формирование редуцированной матрицы масс.

После того как массы для всех узлов крупной сетки рассчитаны, формируем редуцированную матрицу масс M_r^* :

$$M_r^* = \begin{bmatrix} M_{1,1} & m_{1,2} & \cdots & M_{1,N_r} \\ M_{2,1} & m_{2,2} & \cdots & M_{2,N_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{N_r,1} & m_{N_r,2} & \cdots & M_{N_r,N_r} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

где каждый элемент матрицы M_r^* вычисляются по формуле (4.8).

При реализации этой процедуры возможно использование двух вариантов динамической матрицы масс:

1. Согласованная матрица масс: обеспечивает более точное описание динамического поведения конструкции, где масса распределена по всем степеням свободы редуцированной системы.

2. Диагональная матрица масс: упрощает вычисления, позволяя сосредоточиться на основном вкладе массы с минимальными затратами вычислительных ресурсов.

4.2.3 Частные алгоритмы редуцирования системы частотных уравнений с использованием интерполяции основных неизвестных

На основе базового алгоритма редуцирования частотных уравнений с использованием интерполяции основных неизвестных были построены два алгоритма с использованием билинейного и неполного бикубического интерполяционных полиномов, выбираемых на 3-м шаге базового алгоритма.

Алгоритм №1 Редуцирования частотных уравнений с использованием билинейной интерполяции.

В данном алгоритме для установления связи между смешанными неизвестными в узлах второстепенной и главной сетки используется билинейная интерполяция.

Нахождение коэффициентов билинейного полинома, позволяющего выразить значения основных неизвестных во второстепенных узлах через те же значения неизвестных в главных узлах для всех областей крупной сетки, выполняется аналогично тому, как это выполнялось при построения частного алгоритма редуцирования систем уравнений МКЭ в форме КСМ при выполнении статического расчета с использованием билинейной интерполяции в главе 2 (п. 2.3).

Редуцирование матрицы масс выполняется согласно процедуре, описанной в п. 4.4.2.

Алгоритм №2 Редуцирования частотных уравнений с использованием неполного бикубического полинома.

В этом алгоритме для установления связи между смешанными неизвестными в узлах второстепенной и главной сетки используется неполный бикубический полином.

Вычисление коэффициентов неполного бикубического полинома, позволяющего выразить значения основных неизвестных во второстепенных узлах через те же значения неизвестных в главных узлах для всех областей крупной сетки, выполняется аналогично тому, как это выполнялось при построении частного алгоритма редуцирования систем уравнений МКЭ в форме КСМ при выполнении статического расчета с использованием неполного бикубического полинома в главе 2 (п. 2.3).

Редуцирование матрицы масс выполняется согласно процедуре, описанной в п.п. 4.4.2.

4.3 Комбинированные алгоритмы редуцирования частотных уравнений МКЭ в форме классического смешанного метода с использованием интерполяции основных неизвестных и конденсационных методов

На основе алгоритмов редуцирования частотных уравнений с использованием интерполяции неизвестных и конденсационных методов нами были разработаны комбинированные алгоритмы. Основная идея этих алгоритмов заключается в двухэтапном подходе:

1) Сначала происходит редуцирование системы частотных уравнений путем использования интерполяции основных неизвестных.

2) Затем к полученной редуцированной системе частотных применяется один из конденсационных методов.

4.3.1 Комбинированный алгоритм редуцирования системы частотных уравнений на основе интерполяции основных неизвестных и статической конденсации

Среди методов редуцирования частотных уравнений при применении МКЭ в форме метода перемещений наиболее практичным и простым в реализации является статическая конденсация [81, 85, 108]. В работе [44] этот метод был адаптирован для частотного уравнения, полученного на основе МКЭ в форме КСМ.

Как и в случае использования МКЭ в форме метода перемещений, все степени свободы разделяются на основные – r и второстепенные – s . Частотное уравнение, в соответствии с этим, примет вид;

$$\begin{bmatrix} r_{rr} & \tilde{r}_{rs} \\ \tilde{\delta}_{rs} & \delta_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_r \\ \tilde{q}_s \end{Bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{rr} & \tilde{\mathbf{m}}_{rs} \\ \tilde{\mathbf{m}}_{sr} & \mathbf{m}_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_r \\ \tilde{q}_s \end{Bmatrix} = 0, \quad (4.10)$$

где $\begin{bmatrix} r_{rr} & \tilde{r}_{rs} \\ \tilde{\delta}_{rs} & \delta_{ss} \end{bmatrix} = [D]$ – матрица откликов;

$$\begin{bmatrix} \mathbf{m}_{rr} & \tilde{\mathbf{m}}_{rs} \\ \tilde{\mathbf{m}}_{rs} & \mathbf{m}_{ss} \end{bmatrix} - \text{согласованная матрица масс};$$

$$\begin{Bmatrix} q_r \\ \tilde{q}_s \end{Bmatrix} - \text{вектор основных неизвестных.}$$

Принимая во внимание допущение о пренебрежимо малых силах инерции масс $\tilde{\mathbf{m}}_{sr}$ и $\mathbf{m}_{ss}$, соответствующих второстепенным степеням свободы s , в сравнении с силами инерции масс $\mathbf{m}_{rr}$ и $\tilde{\mathbf{m}}_{rs}$, относящимся к основным степеням свободы r , из второй группы уравнений в (4.10) можно получить группу статических уравнений совместности деформаций

$$\tilde{\delta}_{rs} q_r + \delta_{ss} \tilde{q}_s = 0, \quad (4.11)$$

из которого следует связь между основными и второстепенными неизвестными:

$$\tilde{q}_s = \delta_{ss}^{-1} \tilde{\delta}_{rs} q_r. \quad (4.12)$$

С учетом этого первая группа уравнений (4.10) приводится к виду

$$(D_{cm} - \lambda \mathbf{m}_{rr}^*) q_r = 0, \quad (4.13)$$

где $D_{cm} = r_{rr} - \tilde{r}_{rs} \delta_{ss}^{-1} \tilde{\delta}_{rs} q_r$ – статически конденсированная к основным степеням свободы матрица откликов, имеющая физический смысл матрицы жесткости, в которой учтено влияние изгибающих моментов;

$\mathbf{m}_{rr}^* = \mathbf{m}_{rr} - \tilde{\mathbf{m}}_{rs} \delta_{ss}^{-1} \tilde{\delta}_{rs} q_r$ – конденсированная к основным степеням свободы матрица масс.

Комбинированный алгоритм решения задач динамики на основе интерполяции системы уравнений и статической конденсации выполняется в два этапа.

1. Редуцирование системы частотных уравнений на основе интерполяции основных неизвестных с использованием одного из ранее описанных частных алгоритмов редуцирования на основе билинейной или бикубической интерполяции. В результате выполняется переход от конечно-элементной модели с N_f числом узлов (рисунок 4.2), к конечно-элементной модели с N_r узлами (рисунок 4.3).

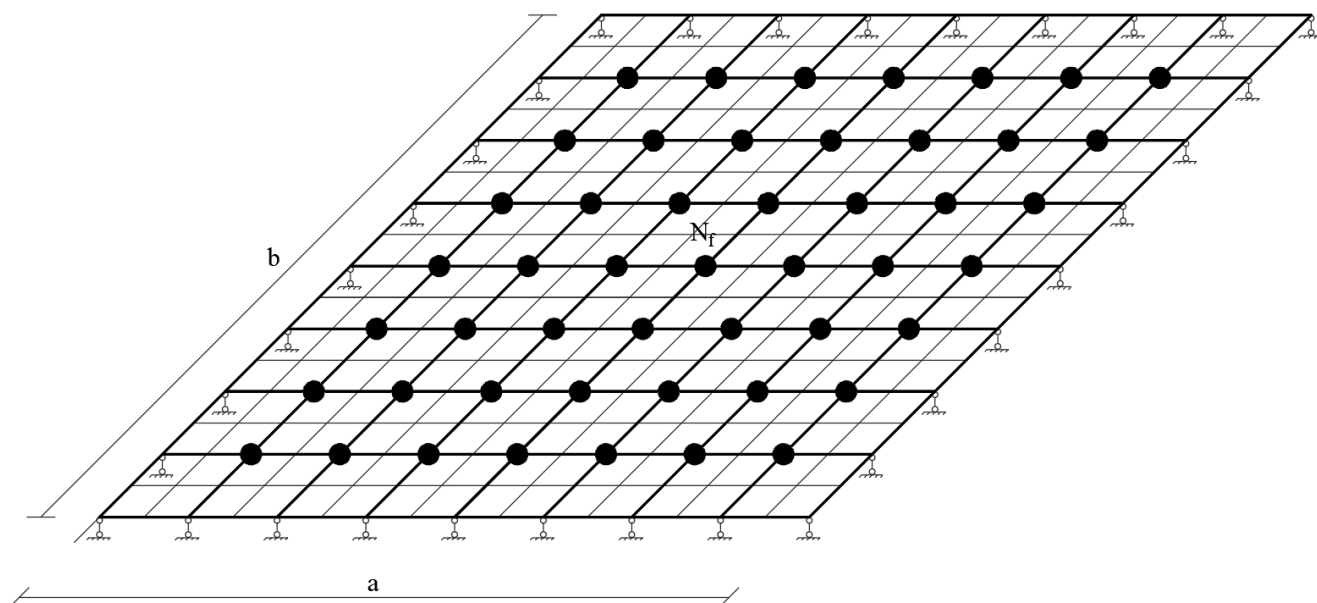


Рисунок 4.2 – Исходная (полная) расчетная схема, содержащая N_f узлов

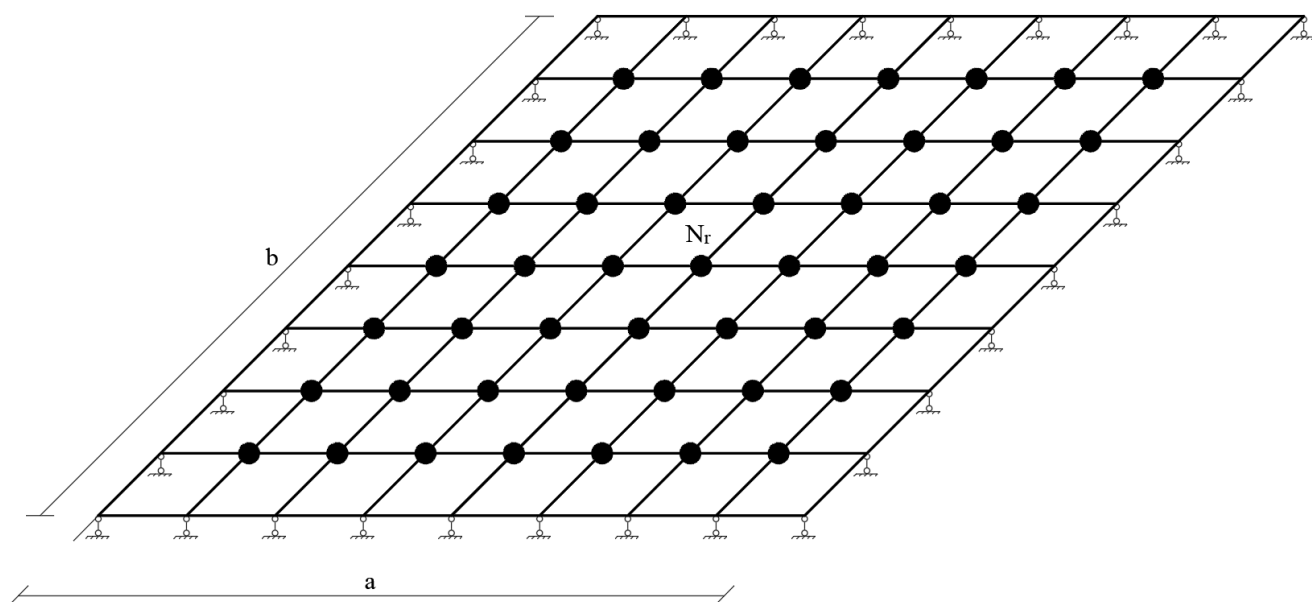


Рисунок 4.3 - Редуцированная расчетная схема, содержащая N_r узлов

2. Применение метода статической конденсации к редуцированной системе (4.4).

4.3.2 Комбинированный алгоритм редуцирования системы частотных уравнений на основе интерполяции основных неизвестных и частотно-динамической конденсации.

Данный алгоритм состоит из нескольких этапов:

1. Выполняется редуцирование системы частотных уравнений на основе интерполяции основных неизвестных с использованием одного из ранее описанных частных алгоритмов редуцирования на основе билинейной или интерполяции с использованием неполного бикубического полинома.

2. Применение модифицированного метода частотно-динамической конденсации к редуцированной системе (4.4).

2.1 В отличие от классического метода частотно-динамической конденсации выполняется предварительная статическая конденсация, когда за второстепенные принимаются силовые неизвестные.

Полученная статически конденсированная к основным степеням свободы матрица откликов имеет физический смысл матрицы жесткости, в которой учтено влияние изгибающих моментов.

Дальнейшая процедура выполнения последовательной частотно-динамической конденсации практически не отличается от её выполнения при использовании МКЭ в форме метода перемещений.

2.2 На получившейся КЭ-сетке определяется расположение главных узлов.

Для этого выбираются системы с различным расположением главных узлов.

Для каждой из систем решается частотное уравнение. Результаты заносятся в таблицу вида:

Вариант расположения узлов	СЗ
1	$\lambda_{1,1}, \lambda_{1,2}, \dots, \lambda_{1,r}$
2	$\lambda_{2,1}, \lambda_{2,2}, \dots, \lambda_{2,r}$
.....	

Путем сравнения полученных результатов с решением, принимаемым за точное, выбирается лучшее расположение главных узлов.

2.3 Решается задача нахождения СЗ и СВ как для системы, содержащей только главные массы (4.14), так и для полной системы, содержащей главные и второстепенные массы (4.15).

$$\det(D_m - \lambda_m M_m) = 0 \quad (4.14)$$

$$\det(D_{mv} - \lambda_{mv} M_{mv}) = 0 \quad (4.15)$$

2.4 Выполняется приравнивание минимальных частот полной системы к минимальным частотам системы, несущей только главные массы и вычисляются коэффициенты приведения группы второстепенных масс к главным массам в узлах конденсации масс.

Для этого выделяются группы второстепенных масс, которые будут приводиться к главным массам.

Массу в узле j , на которую влияют n второстепенных масс, можно вычислить по формуле (4.16)

$$m_{j'} = m_j + C_j \cdot \sum_{k=1}^n m_k \quad (4.16)$$

где C_j – коэффициент приведения для группы, отвечающей за узел j главной массы.

Коэффициенты приведения вычисляются по формуле (4.17).

$$C_j = \frac{1}{\lambda_j} D_{ij} u_{ij} \quad (4.17)$$

где λ_j – собственная частота для узла j ;

D_{ij} – элементы матрицы откликов, отвечающие за взаимодействие между узлом j и второстепенными массами i ;

u_{ij} – соответствующие собственные векторы.

4.3.3. Комбинированный алгоритм редуцирования системы частотных уравнений на основе интерполяции основных неизвестных и последовательной частотно-динамической конденсации.

Данный алгоритм состоит из нескольких этапов:

1. Выполняется редуцирование системы частотных уравнений на основе интерполяции основных неизвестных с использованием одного из ранее описанных частных алгоритмов редуцирования на основе билинейной или бикубической интерполяции.

2. Далее используется метод последовательной частотно-динамической конденсации.

В [44, 45, 46] выполнено обобщение метода последовательной частотно-динамической конденсации на частотные уравнения, получаемые на основе МКЭ в форме КСМ.

Рассмотрим кратко основные аспекты этого подхода:

Первым этапом является выполнения предварительной статической конденсации. В этом случае за второстепенные принимаются силовые неизвестные.

Следует отметить, что при этом используется диагональная матрица масс (4.18).

$$\mathbf{m}_{\text{дин}} \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{rr} & 0 \\ 0 & \mathbf{m}_{ss} \end{bmatrix} = 0. \quad (4.18)$$

Соответственно система уравнений (4.10) принимает вид (4.19).

$$\begin{bmatrix} r_{rr} & \tilde{r}_{rs} \\ \tilde{\delta}_{rs} & \delta_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_r \\ \tilde{q}_s \end{Bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{rr} & 0 \\ 0 & \mathbf{m}_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_r \\ \tilde{q}_s \end{Bmatrix} = 0, \quad (4.19)$$

С учетом этого первая группа уравнений (4.19) приводится к виду

$$(D_{cm(k)} - \lambda \mathbf{m}_{rr}) q_r = 0, \quad (4.20)$$

где $D_{cm(k)} = r_{rr} - \tilde{r}_{rs} \delta_{ss}^{-1} \tilde{\delta}_{rs} q_r$ – преобразованная с помощью статической конденсации матрица откликов, совпадающая с матрицей D_{cm} из системы уравнений (4.13);

$\mathbf{m}_{rr}$ – матрица масс, совпадающая с блоком $\mathbf{m}_{rr}$ матрицы $\mathbf{m}_{\text{дин}}$ (4.18).

После выполнения предварительной статической конденсации производится разделение всех динамических степеней свободы и связанных с ними узлов на две категории: главные и второстепенные.

При наличии точного решения можно провести анализ различных вариантов расположения главных узлов для выбора оптимального. Для этого рассматриваются разные варианты их расположения и решается соответствующее частотное уравнение. Результаты заносятся в таблицу следующего вида:

Вариант расположения узлов	СЗ
1	$\lambda_{1,1}, \lambda_{1,2}, \dots, \lambda_{1,r}$
2	$\lambda_{2,1}, \lambda_{2,2}, \dots, \lambda_{2,r}$
.....	

На основе сравнения полученных результатов с точным решением выбирается наилучшее расположение главных узлов.

Второй этап включает группировку всех второстепенных степеней свободы и узлов, связанных с ними, по степени близости к главным.

На третьем этапе создаются парциальные динамические системы.

На четвертом этапе для каждой из сформированных парциальных систем решается полная алгебраическая задача для нахождения собственных значений (СЗ) и собственных векторов (СВ).

На пятом этапе вычисляется динамическая матрица масс для редуцированной системы.

На шестом этапе определяются конденсационные добавки к массам в главных узлах от второстепенных степеней свободы.

На седьмом этапе все конденсационные добавки от масс всех второстепенных степеней свободы суммируются, формируя редуцированную матрицу масс. На основе полученной редуцированной матрицы масс решается полная алгебраическая задача относительно главных узлов конденсации.

4.4 Анализ результатов динамического расчета пластины с применением разработанных алгоритмов

4.4.1 Расчет шарнирно опертой по контуру пластины

В качестве задачи-теста выполнен динамический расчет квадратной пластины, опертой на шарнирные опоры по четырем сторонам (рисунок 4.4). С использованием предложенных алгоритмов были исследованы СЗ и СВ при сгущении конечно-элементной сетки на действие постоянной нагрузки от собственного веса. При выполнении численного расчета были приняты следующие исходные данные:

$$a=b=1\text{м}; h=0,01\text{м}; \mu_x = \mu_y = 0,3; E=109,2 \text{ ГПа}; \rho = 2,5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

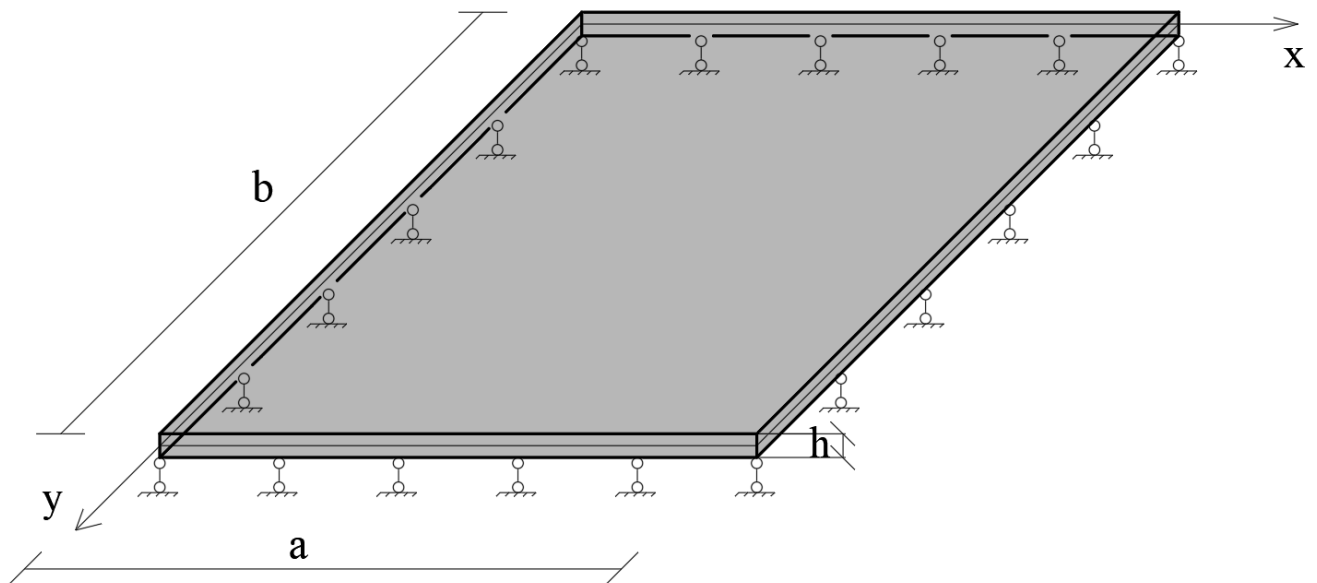


Рисунок 4.4 – Физическая модель шарнирно опертой по контуру пластины

Расчет собственных частот и собственных форм колебаний для этой пластины выполнен в следующих вариантах:

1. На основе МКЭ в форме КСМ без редуцирования исходной системы.
2. На основе МКЭ в форме КСМ с применением разработанного алгоритма редуцирования системы частотных уравнений, основанного на интерполяции основных неизвестных.

3. На основе МКЭ в форме КСМ с использованием конденсационных методов.

4. На основе МКЭ в форме КСМ с использованием разработанных комбинированных алгоритмов редуцирования системы частотных уравнений.

5. На основе МКЭ в форме метода перемещений с использованием ПК ЛИРА при использовании согласованной матрицы масс (СММ), диагональной матрицы масс (ДММ).

4.4.1.1 Анализ эффективности алгоритма редуцирования системы частотных уравнений на основе интерполяции основных неизвестных при расчете шарнирно опертой по контуру пластины

В соответствии с общей физической моделью (рисунок 4.4) представлен первый вариант расчетной схемы разбиением конечно-элементной сеткой 8×8 (рисунок 4.5) для проведения расчетов по исходной расчетной схеме и вариант, когда в качестве крупного разбиения используется КЭ-сетка 8×8 , а мелкого 16×6 (рисунок 4.6).

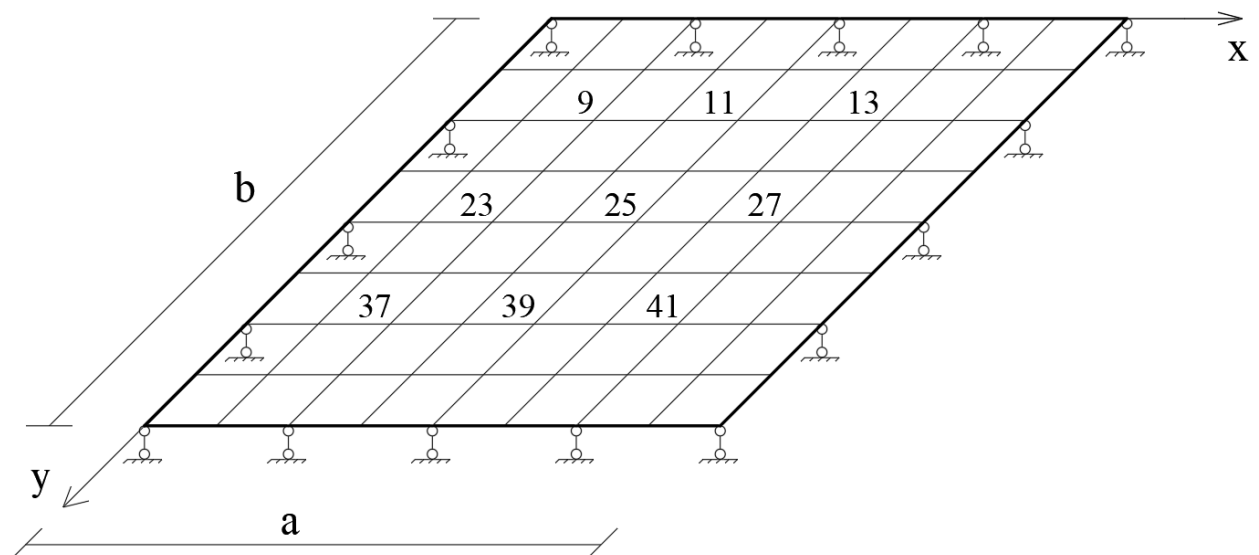


Рисунок 4.5 – Конечно-элементная модель шарнирно опертой по контуру пластины 8×8

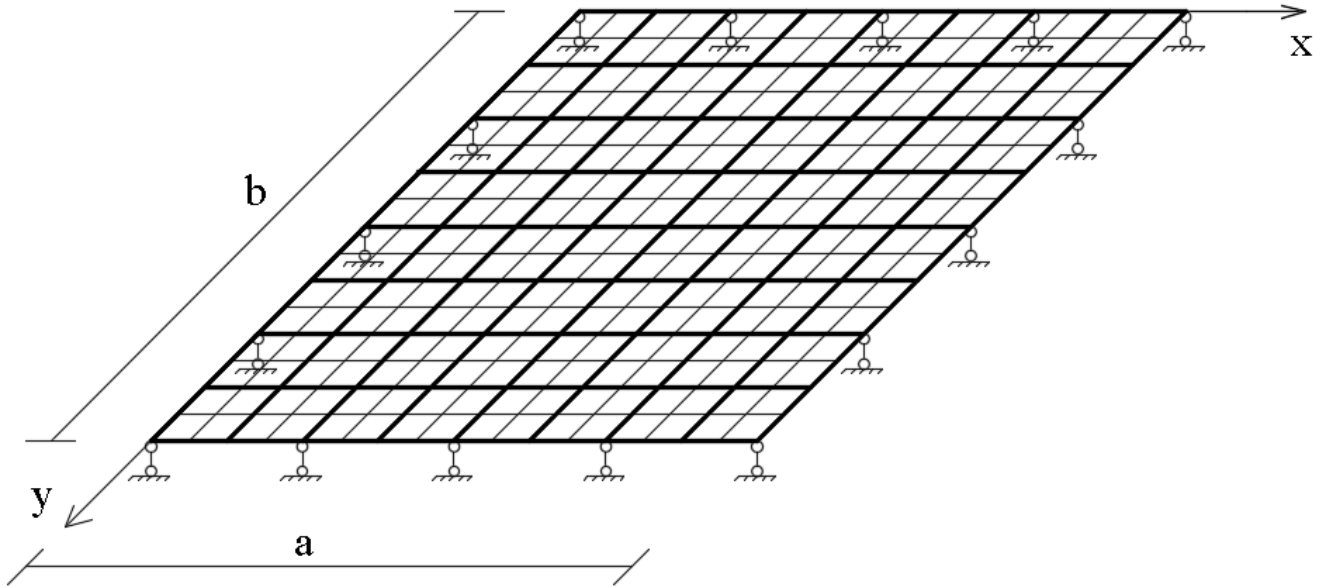


Рисунок 4.6 – Конечно-элементная модель шарнирно опертой по контуру пластины с мелкой сеткой 16x16

Частотное уравнение для этой рассматриваемой задачи состоит из статической матрицы откликов и динамической матрицы масс:

$$([D_{ст}] - \lambda[m])\{q\} = 0, \quad (4.21)$$

Определитель этого уравнения

$$\|c\| = \|D - \lambda m\| = 0. \quad (4.22)$$

где $[D_{cm}] = \begin{bmatrix} r_{rr} & \tilde{r}_{rs} \\ \tilde{\delta}_{sr} & \delta_{ss} \end{bmatrix}$ – статическая матрица откликов;

$[m_{дин}] = \begin{bmatrix} m_{rr} & \tilde{m}_{rs} \\ \tilde{m}_{sr} & m_{ss} \end{bmatrix}$ – матрица масс;

$\{\bar{q}\} = \begin{Bmatrix} q_r \\ \tilde{q}_s \end{Bmatrix}$ – вектор основных неизвестных (кинематических и силовых).

Система разрешающих уравнений в общем виде записывается:

$$\begin{aligned} 1) \quad & r_{rr}q_r + \tilde{r}_{rs}\tilde{q}_s - \lambda(m_{rr}q_r + m_{rs}\tilde{q}_s) = 0, \\ 2) \quad & \tilde{\delta}_{sr}q_r + \delta_{ss}\tilde{q}_s - \lambda(m_{sr}q_r + m_{ss}\tilde{q}_s) = 0. \end{aligned} \quad (4.23)$$

С учетом того, что расчеты проводятся при регулярной конечно-элементной сетке и для такого типа систем точность результатов при диагональной матрице не

сильно отличается от согласованной, то дальнейшие расчеты будем вести с использованием диагональной матрицы масс:

$$[m_{дин}] = \begin{bmatrix} m_{rr} & 0 \\ 0 & m_{ss} \end{bmatrix} - \text{диагональная матрица масс,} \quad (4.24)$$

Частотное уравнение МКЭ в форме КСМ (4.23) с учетом (4.24) может быть записано в виде системы разрешающих уравнений:

$$\begin{cases} (r_{r,r} - \lambda \mathbf{m}_r) q_r + \tilde{r}_{r,s} \tilde{q}_s = 0, \\ \tilde{\delta}_{s,r} q_r + (\delta_{s,s} - \lambda \mathbf{m}_s) \tilde{q}_s = 0. \end{cases} \quad (4.25)$$

Система разрешающих уравнений в расширенной записи для i -го узла записывается:

$$\begin{aligned} R_i &= r_{i,1} q_1 + r_{i,2} q_2 + \dots + (r_{i,i} - \lambda_i \mathbf{m}_i^k) q_i + r_{i,i+1} q_{i+1} + \dots + r_{i,n} q_n + \\ &+ \tilde{r}_{i,n+1} \tilde{q}_{n+1} + \dots + \tilde{r}_{i,n+m} \tilde{q}_{n+m} - R_{i,F} = 0, \quad (i = 1, \dots, n), \\ \Delta_{n+t} &= \tilde{\delta}_{n+t,1} q_1 + \tilde{\delta}_{n+t,2} q_2 + \dots + \tilde{\delta}_{n+t,n} q_n + \delta_{n+t,n+1} \tilde{q}_{n+1} + \dots + \\ &+ (\delta_{n+t,n+t} - \lambda_{n+t} \mathbf{m}_i^f) \tilde{q}_{n+t} + \dots + \delta_{n+t,n+m} \tilde{q}_{n+m} - \Delta_{n+t,F} = 0, \quad (t = 1, \dots, m). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Для проведения расчетов по 1 варианту расчетной схемы (рисунок 4.5) составим глобальную систему частотных уравнений в соответствии с (4.26). В итоге после учета граничных условий глобальная система уравнений для расчета по исходной схеме смешанного метода при сетке 8x8 состоит из 147 уравнений.

$$\left\{ \begin{array}{l}
R_{11} = (r_{11,11} - \lambda_{11} \mathbf{m}_{11}^k) q_{11} + \dots + r_{11,j} q_j + \dots + r_{11,71} q_{71} + \tilde{\delta}_{11,102} \tilde{q}_{102} + \\
+ \dots + \tilde{\delta}_{11,j} \tilde{q}_j + \dots + \tilde{\delta}_{11,223} \tilde{q}_{223}, \\
\dots \\
R_i = r_{i,11} q_{11} + \dots + (r_{i,j} - \lambda_i \mathbf{m}_i^k) q_j + \dots + r_{i,71} q_{71} + \tilde{\delta}_{i,102} \tilde{q}_{102} + \\
+ \dots + \tilde{\delta}_{i,j} \tilde{q}_j + \dots + \tilde{\delta}_{i,223} \tilde{q}_{223}, \\
\dots \\
R_{71} = r_{71,11} q_{11} + \dots + r_{71,j} q_j + \dots + (r_{71,71} - \lambda_{71} \mathbf{m}_{71}^k) q_{71} + \tilde{\delta}_{71,102} \tilde{q}_{102} + \dots + \\
+ \tilde{\delta}_{71,i} \tilde{q}_i + \dots + \tilde{\delta}_{71,223} \tilde{q}_{223}, \\
\dots \\
\Delta_{102} = r_{102,11} q_{11} + \dots + r_{102,j} q_j + \dots + r_{102,71} q_{71} + (\tilde{\delta}_{102,102} - \lambda_{102} \mathbf{m}_{102}^f) \tilde{q}_{102} + \dots + \\
+ \tilde{\delta}_{102,i} \tilde{q}_i + \dots + \tilde{\delta}_{102,223} \tilde{q}_{223}, \\
\dots \\
\Delta_i = r_{i,11} q_{11} + \dots + r_{i,j} q_j + \dots + r_{i,71} q_{71} + \tilde{\delta}_{i,102} \tilde{q}_{102} + \dots + (\tilde{\delta}_{i,j} - \lambda_i \mathbf{m}_i^f) \tilde{q}_j + \\
+ \dots + \tilde{\delta}_{i,223} \tilde{q}_{223}, \\
\dots \\
\Delta_{223} = r_{223,11} q_{11} + \dots + r_{223,j} q_j + \dots + r_{223,71} q_{71} + \tilde{\delta}_{223,102} \tilde{q}_{102} + \dots + \tilde{\delta}_{223,j} \tilde{q}_j + \\
+ \dots + (\tilde{\delta}_{223,223} - \lambda_{223} \mathbf{m}_{223}^f) \tilde{q}_{223}.
\end{array} \right. \quad (4.27)$$

где $q_i = y_i$ – неизвестные амплитуды колебаний масс m_i ;

$\tilde{q}_{n+t}$ – неизвестные усилия в отброшенных связях основной системы.

В матричном виде записывается:

$$\left(\begin{bmatrix} D_{\text{ст}} \end{bmatrix}_{147 \times 147} - \begin{bmatrix} \lambda \end{bmatrix}_{147 \times 147} \begin{bmatrix} \mathbf{m} \end{bmatrix}_{147 \times 147} \right) \begin{Bmatrix} q \end{Bmatrix}_{147 \times 1} = 0, \quad (4.28)$$

Для проведения расчетов по 2 варианту расчетной схемы (рисунок 4.6) в соответствии с общим алгоритмом составим глобальную систему частотных уравнений для исходной расчетной схемы 16x16. После учета граничных условий она состоит из 675 уравнений.

$$\left(\begin{bmatrix} D_{\text{ст}} \end{bmatrix}_{675 \times 675} - \begin{bmatrix} \lambda \end{bmatrix}_{675 \times 675} \begin{bmatrix} \mathbf{m} \end{bmatrix}_{675 \times 675} \right) \begin{Bmatrix} q \end{Bmatrix}_{675 \times 1} = 0, \quad (4.29)$$

После нахождения коэффициентов интерполяционного полинома, связывающего основные неизвестные в узлах мелкой сетки, выраженные через значения тех же узловых неизвестных крупной сетки, вводятся в систему уравнений МКЭ в форме КСМ.

В итоге получена редуцированная глобальная система уравнений смешанного метода при переходе от мелкой сетки 16x16 к сетке 8x8, состоящая из 147 уравнений, которая записывается в виде:

$$\left(\begin{bmatrix} D_{\text{ст}}^* \end{bmatrix}_{147 \times 147} - \lambda_{147 \times 147} \begin{bmatrix} \mathbf{m}^* \end{bmatrix}_{147 \times 147} \right) \{q\}_{147 \times 1} = 0, \quad (4.30)$$

В результате для матриц $\begin{bmatrix} D_{\text{ст}} \end{bmatrix}_{147 \times 147}$ и $\begin{bmatrix} D_{\text{ст(к)}}^* \end{bmatrix}_{147 \times 147}$ вычисляем матрицы СЗ и СВ

$$\begin{aligned} [\lambda] &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{147} \end{bmatrix}_{147 \times 147} && \begin{aligned} &\text{— диагональная матрица из 147} \\ &\text{собственных значений для матриц } \begin{bmatrix} D_{\text{ст}} \end{bmatrix}_{147 \times 147} \text{ и} \\ &\begin{bmatrix} D_{\text{ст(к)}}^* \end{bmatrix}_{147 \times 147} \end{aligned} \\ [v] &= \begin{bmatrix} v_{1,1} & v_{2,1} & \cdots & v_{147,1} \\ v_{1,2} & v_{2,2} & \cdots & v_{147,2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_{1,j} & v_{2,j} & \cdots & v_{147,j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_{1,147} & v_{2,147} & \cdots & v_{147,147} \end{bmatrix}_{147 \times 147} && \begin{aligned} &\text{— матрица из 147 соответствующих} \\ &\text{собственных векторов для матриц } \begin{bmatrix} D_{\text{ст}} \end{bmatrix}_{147 \times 147} \text{ и} \\ &\begin{bmatrix} D_{\text{ст(к)}}^* \end{bmatrix}_{147 \times 147} \end{aligned} \end{aligned}$$

Результаты расчетов представлены в виде матрицы, в которой приведены нижние части спектра собственных частот колебаний этой пластинки.

При вычислениях по исходной расчетной схеме и с использованием предложенных редукционных алгоритмов с применением билинейной интерполяции использовались следующие комбинации мелких и крупных сеток:

- Исходная сетка 8x8 (обозначение: $[\omega]$).
- Мелкая сетка 16x16 $\rightarrow$ Крупная сетка 8x8 (обозначение: $[\omega_1^*], [\nu_1^*]$).
- Мелкая сетка 32x32 $\rightarrow$ Крупная сетка 8x8 (обозначение: $[\omega_2^*]$).

$$[\omega] = \begin{bmatrix} 62,740 & & & & & & & \\ & 155,648 & & & & & & \\ & & 155,648 & & & & & \\ & & & 240,627 & & & & \\ & & & & 308,803 & & & \\ & & & & & 308,803 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 147 \times 147 \end{bmatrix}$$

$$[\omega_1^*] = \begin{bmatrix} 62,785 & & & & & & & \\ & 155,794 & & & & & & \\ & & 155,794 & & & & & \\ & & & 241,118 & & & & \\ & & & & 308,968 & & & \\ & & & & & 308,968 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 147 \times 147 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[v_1^* \right] = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 9 & -0,125 & -0,250 & 0,098 & 0,250 & 0,177 & 0,044 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 11 & -0,177 & -0,177 & -0,093 & 0,000 & 0,000 & -0,242 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 13 & -0,125 & 0,000 & -0,230 & -0,250 & 0,177 & 0,044 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 23 & -0,177 & -0,177 & 0,232 & 0,000 & 0,000 & 0,242 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 25 & -0,250 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & -0,354 & -0,087 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 27 & -0,177 & 0,177 & -0,232 & 0,000 & 0,000 & 0,242 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 37 & -0,125 & 0,000 & 0,230 & -0,250 & 0,177 & 0,044 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 39 & -0,177 & 0,177 & 0,093 & 0,000 & 0,000 & -0,242 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 41 & -0,125 & 0,250 & -0,098 & 0,250 & 0,177 & 0,044 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots \end{bmatrix} \\
& \qquad \qquad \qquad 147 \times 147
 \end{aligned}$$

Матрица из 147 соответствующих собственных векторов, в которой отражены результаты для узлов крупной сетки по редуцированной расчетной схеме (рисунок 4.6). На основе этих результатов построены первые 6 форм собственных колебаний пластины.

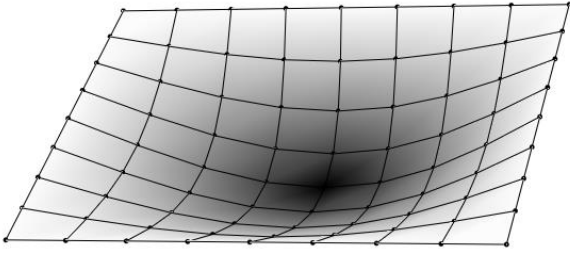


Рисунок 4.7 – 1 форма колебаний
шарнирно опертой по контуру
пластины

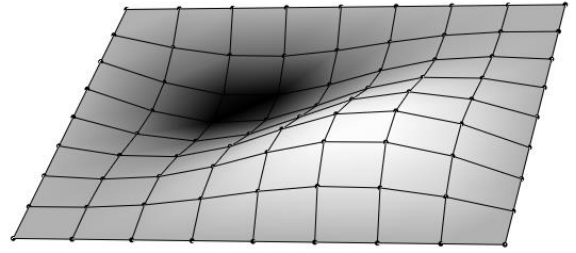


Рисунок 4.8 – 2 форма колебаний
шарнирно опертой по контуру
пластины

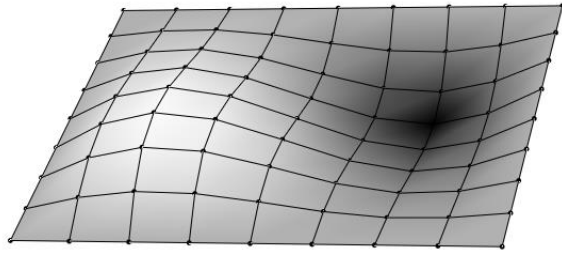


Рисунок 4.9 – 3 форма колебаний
шарнирно опертой по контуру
пластины

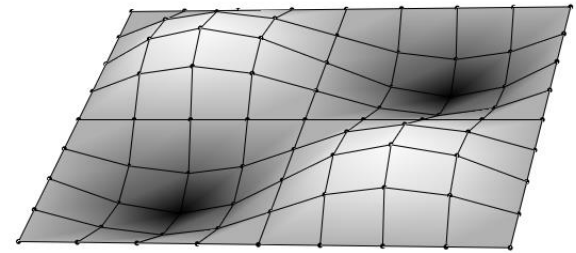


Рисунок 4.10 – 4 форма колебаний
шарнирно опертой по контуру
пластины

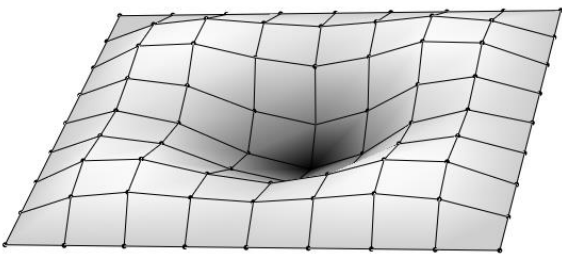


Рисунок 4.11 – 5 форма колебаний
шарнирно опертой по контуру
пластины

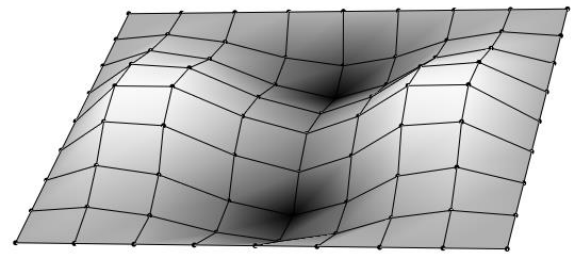


Рисунок 4.12 – 6 форма колебаний
шарнирно опертой по контуру
пластины

Для данной задачи также была исследована возможность увеличения соотношения узлов мелкого и крупного разбиения, когда в качестве крупного разбиения используется КЭ-сетка 8×8 , а мелкого 32×32 (рисунок 4.13). Условно показана четверть пластины.

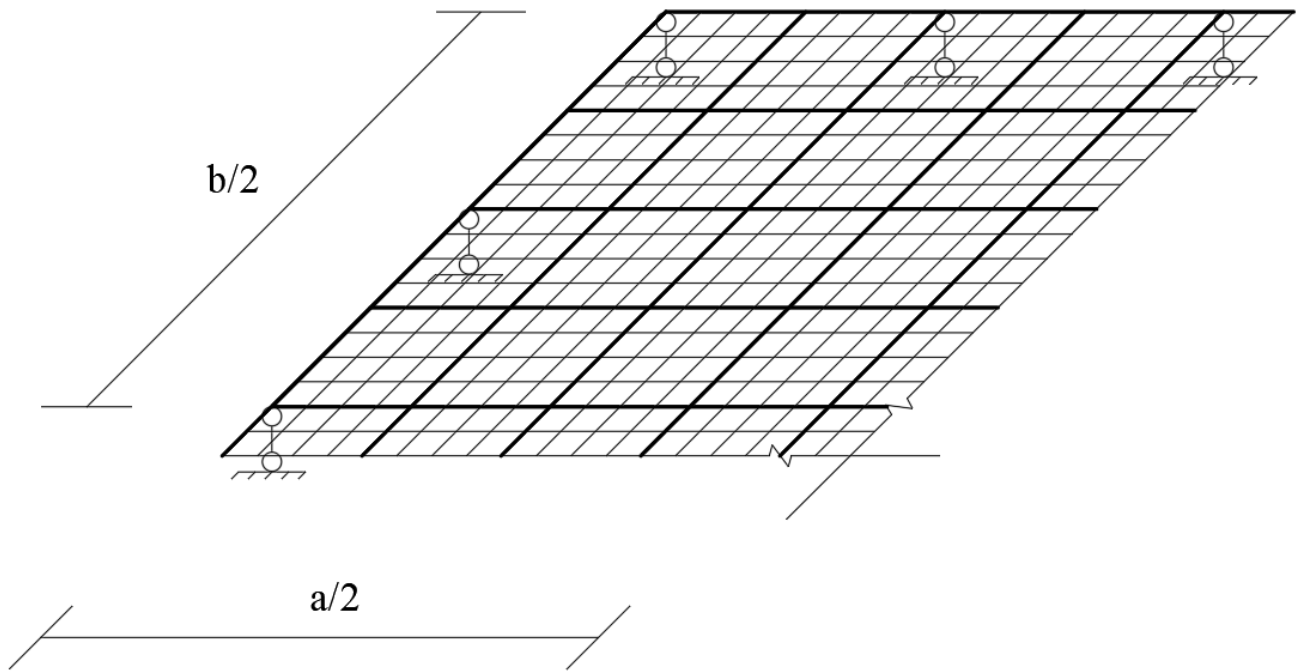


Рисунок 4.13 – Четверть расчетной схемы пластины

После учета граничных условий система уравнений состоит из 2883 уравнений.

$$\left(\begin{matrix} [D_{\text{ст}}] \\ 2883 \times 2883 \end{matrix} - \lambda \begin{matrix} [m] \\ 2883 \times 2883 \end{matrix} \right) \begin{matrix} \{q\} \\ 2883 \times 1 \end{matrix} = 0, \quad (4.31)$$

Редуцированная глобальная система уравнений смешанного метода при переходе от мелкой сетки 32x32 к сетке 8x8, состоящая из 147 уравнений, которая записывается в виде:

$$\left(\begin{matrix} [D_{\text{ст}}^*] \\ 147 \times 147 \end{matrix} - \lambda \begin{matrix} [m^*] \\ 147 \times 147 \end{matrix} \right) \begin{matrix} \{q\} \\ 147 \times 1 \end{matrix} = 0, \quad (4.32)$$

В результате для матрицы $\begin{bmatrix} D_{\text{ст(к)}}^* \\ 147 \times 147 \end{bmatrix}$ вычисляем

$$[\omega_2^*] = \begin{bmatrix} 62,897 & & & & & & & \\ & 155,839 & & & & & & \\ & & 155,839 & & & & & \\ & & & 241,288 & & & & \\ & & & & 309,054 & & & \\ & & & & & 309,054 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

147×147

4.4.1.2 Анализ эффективности конденсационных и комбинированных алгоритмов редуцирования системы частотных уравнений при расчете шарнирно опертой по контуру пластины

Далее решалась задача определения редуцированного спектра частот на основе алгоритмов статической конденсации при разбиении на конечно-элементную сетку 8x8 (рисунок 4.5) для проведения расчетов по исходной расчетной схеме и вариант, когда в качестве крупного разбиения используется КЭ-сетка 8x8, а мелкого 16x6 (рисунок 4.6).

Частотное уравнение МКЭ в форме КСМ при использовании согласованной матрицы масс запишем в виде:

$$\begin{cases} (r_{r,r} - \lambda \mathbf{m}_r) q_r + \tilde{r}_{r,s} \tilde{q}_s = 0, \\ \tilde{\delta}_{s,r} q_r + (\delta_{s,s} - \lambda \mathbf{m}_s) \tilde{q}_s = 0. \end{cases} \quad (4.33)$$

Следуя основной идее статической конденсации, влиянием объемных масс можно пренебречь, то есть положить $\mathbf{m}_f = 0$. Тогда второе уравнение в (4.33) принимает вид

$$\tilde{\delta}_{s,r} q_r + \delta_{s,s} \tilde{q}_s = 0. \quad (4.34)$$

Из него следует

$$\tilde{q}_s = -\delta_{s,s}^{-1} \tilde{\delta}_{s,r} q_r \quad (4.35)$$

Подставив (4.35) в первое уравнение в (4.33), получим частотное уравнение вида

$$\left[D_{\text{ст}(k)} - \lambda \mathbf{m}_k \right] \{q_k\} = 0, \quad (4.36)$$

где $D_{\text{ст}(k)} = (r_{r,r} - \tilde{r}_{r,s} \delta_{s,s}^{-1} \tilde{\delta}_{s,r})$ – преобразованная с помощью статической конденсации матрица откликов $D_{\text{ст}}$.

После выполнения процедуры статической конденсации система уравнений по первому варианту расчетной схемы запишется в виде:

$$\left(\left[\begin{matrix} D_{\text{ст}(k)} \\ 47 \times 47 \end{matrix} \right] - \lambda \begin{matrix} \mathbf{m}_k \\ 47 \times 47 \end{matrix} \right) \begin{matrix} \{q\} \\ 47 \times 1 \end{matrix} = 0, \quad (4.37)$$

При реализации комбинированного алгоритма статической конденсации система уравнений по второму варианту расчетной схемы запишется в виде:

$$\begin{cases} R_{37} = (r_{(cm,k)37,37}^* - \lambda_{37} \mathbf{m}_{37}^k) q_{37} + \dots + r_{(cm,k)37,j}^* q_j + \dots + r_{(cm,k)37,253}^* q_{253}, \\ \dots \\ R_i = r_{(cm,k)i,37}^* q_{37} + \dots + (r_{(cm,k)i,j}^* - \lambda_i \mathbf{m}_i^k) q_j + \dots + r_{(cm,k)i,253}^* q_{253}, \\ \dots \\ R_{253} = r_{(cm,k)253,37}^* q_{37} + \dots + r_{(cm,k)253,j}^* q_j + \dots + (r_{(cm,k)253,253}^* - \lambda_{253} \mathbf{m}_{253}^k) q_{253}, \end{cases} \quad (4.38)$$

Где $r_{cm(k)} = (r_{r,r} - \tilde{r}_{r,s} \delta_{s,s}^{-1} \tilde{\delta}_{s,r})$.

$$\left(\left[\begin{matrix} D_{\text{ст}(k)}^* \\ 47 \times 47 \end{matrix} \right] - \lambda \begin{matrix} \mathbf{m}^* \\ 47 \times 47 \end{matrix} \right) \begin{matrix} \{q\} \\ 47 \times 1 \end{matrix} = 0, \quad (4.39)$$

В результате для матриц $\left[\begin{matrix} D_{\text{ст}(k)} \\ 47 \times 47 \end{matrix} \right]$ и $\left[\begin{matrix} D_{\text{ст}(k)}^* \\ 47 \times 47 \end{matrix} \right]$ вычисляем матрицы редуцированные на основе комбинированного алгоритма статической конденсации СЗ и СВ

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{47} \end{bmatrix}_{47 \times 47}$$

– диагональная матрица из 47 собственных значений уравнения для редуцированных

матриц $\left[\begin{matrix} D_{\text{ст}(k)} \\ 47 \times 47 \end{matrix} \right]$ и $\left[\begin{matrix} D_{\text{ст}(k)}^* \\ 47 \times 47 \end{matrix} \right]$

$$[v] = \begin{bmatrix} v_{1,1} & v_{2,1} & \cdots & v_{47,1} \\ v_{1,2} & v_{2,2} & \cdots & v_{47,2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_{1,j} & v_{2,j} & \cdots & v_{47,j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_{1,47} & v_{2,47} & \cdots & v_{47,47} \end{bmatrix}$$

47×47

– матрица из 47 соответствующих
собственных векторов для редуцированных
матриц $[D_{\text{ст(к)}}]_{47 \times 47}$ и $[D_{\text{ст(к)}}^*]_{47 \times 47}$

При вычислениях по исходной расчетной схеме и с использованием конденсационных алгоритмов использовались следующие комбинации мелких и крупных сеток:

- Исходная сетка 8x8 (обозначение: $[\omega]$).
- Мелкая сетка 16x16 $\rightarrow$ Крупная сетка 8x8 (обозначение: $[\omega_1^*]$).
- Мелкая сетка 32x32 $\rightarrow$ Крупная сетка 8x8 (обозначение: $[\omega_2^*]$).

$$[\omega] = \begin{bmatrix} 61,563 & & & & & & & \\ & 152,650 & & & & & & \\ & & 152,650 & & & & & \\ & & & 236,357 & & & & \\ & & & & 304,295 & & & \\ & & & & & 304,295 & & \\ & & & & & & \ddots & \end{bmatrix}$$

49×49

$$[\omega_1^*] = \begin{bmatrix} 61,607 & & & & & & & \\ & 152,796 & & & & & & \\ & & 152,796 & & & & & \\ & & & 236,871 & & & & \\ & & & & 304,485 & & & \\ & & & & & 304,485 & & \\ & & & & & & \ddots & \end{bmatrix}$$

49×49

$$[\omega_2^*] = \begin{bmatrix} 61,619 & & & & & & & \\ & 152,842 & & & & & & \\ & & 152,842 & & & & & \\ & & & 237,047 & & & & \\ & & & & 304,578 & & & \\ & & & & & 304,578 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

49×49

Результаты численных расчетов, полученных при реализации алгоритмов статической конденсации в смешанной форме при сгущении конечно-элементной сетки представлены в таблице 4.1. Количество степеней свободы при реализации алгоритма статической конденсации указано для каждого разбиения.

Таблица 4.1 – Численные значения частот собственных колебаний ω , полученные при расчете шарнирно опертой по контуру плиты при сгущении конечно-элементной сетки

Свободно опертая по контуру пластинка					Аналитическое решение
сетка КЭ	4x4	6x6	8x8	10x10	
N/n	9/27	25/75	49/147	81/243	
КСМ комбинированная СК					
ω_1	59,218	60,980	61,607	61,899	62,832
ω_2	143,580	150,277	152,796	153,965	157,080
ω_3	143,580	150,277	152,796	153,965	157,080
ω_4	203,097	227,287	236,871	241,419	251,320
ω_5	274,276	298,734	304,485	307,307	314,159
ω_6	274,276	298,734	304,485	307,307	314,159
КСМ СК					
ω_1	59,089	60,907	61,563	61,870	62,832
ω_2	143,044	150,085	152,650	153,861	157,080
ω_3	143,044	150,085	152,650	153,861	157,080
ω_4	202,553	226,721	236,357	241,032	251,320
ω_5	273,040	297,889	304,295	307,126	314,159
ω_6	273,040	297,889	304,295	307,126	314,159

Далее решалась задача определения редуцированного спектра частот на основе алгоритмов последовательной частотно-динамической конденсации по

исходной и редуцированной расчетной схеме. Расположение узлов конденсации для исходной расчетной схемы представлено на рисунке 4.14.

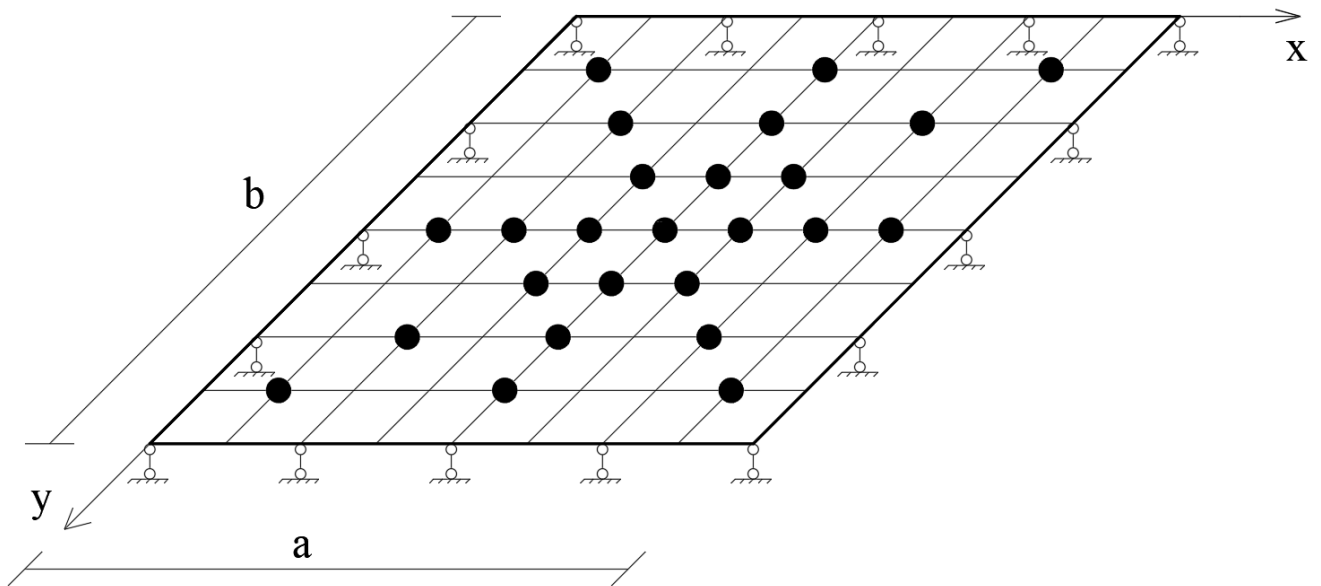


Рисунок 4.14 – Расположение узлов конденсации исходной расчетной схемы

Расположение узлов конденсации для редуцированной расчетной схемы представлено на рисунке 4.15.

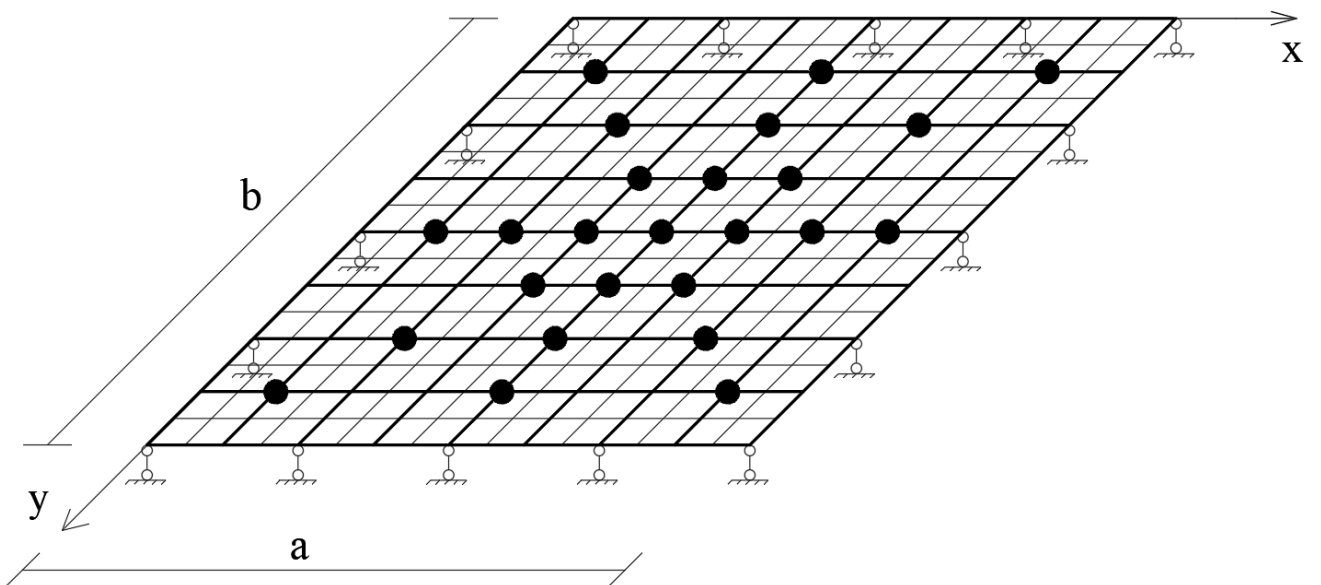


Рисунок 4.15 – Расположение узлов конденсации редуцированной расчетной схемы

Выделим из n узлов конечно-элементной сетки с расположенными в них точечными массами $\mathbf{m}_k$, N узлов конденсации (главные узлы), в которые должны быть приведены эти массы.

Тогда уравнение (4.33) можно представить в виде

$$\begin{cases} (r_{b,b} - \lambda \mathbf{m}_b) q_b + r_{b,s} q_s = 0, \\ r_{s,b} q_b + (r_{s,s} - \lambda \mathbf{m}_s) q_s = 0, \end{cases} \quad (4.40)$$

где $b = 1, 2, \dots, N$ – основные степени свободы;

$s = N + 1, N + 2, \dots, n$ – второстепенные степени свободы.

Выполнив вновь статическую конденсацию к основным степеням свободы $b = 1, 2, \dots, N$, получим новое редуцированное частотное уравнение:

$$[D_{\text{ст}(b)} - \lambda \mathbf{m}_b] \{q_b\} = 0, \quad (4.41)$$

где $D_{\text{ст}(b)} = (r_{b,b} - r_{b,s} r_{s,s}^{-1} r_{s,b})$.

Для проведения расчетов по первому варианту выбора основных узлов конденсации $N=13$ по исходной расчетной схеме 8×8 (рисунок 4.14) после выполнения процедуры предварительной статической конденсации система уравнений запишется в виде:

$$\begin{bmatrix} D_{\text{ст}(b)} - \lambda \mathbf{m}_b \\ 13 \times 13 \quad 13 \times 13 \quad 13 \times 13 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_b \\ 13 \times 1 \end{Bmatrix} = 0, \quad (4.42)$$

При реализации комбинированного алгоритма ЧДК система уравнений по второму варианту расчетной схемы (рисунок 4.15) запишется в виде:

$$\begin{cases} R_{37} = (r_{(cm,\kappa)43,43}^* - \lambda_{43} \mathbf{m}_{43}^k) q_{43} + \dots + r_{(cm,\kappa)43,j}^* q_j + \dots + r_{(cm,\kappa)43,247}^* q_{247}, \\ \dots \\ R_i = r_{(cm,\kappa)i,43}^* q_{43} + \dots + (r_{(cm,\kappa)i,j}^* - \lambda_i \mathbf{m}_i^k) q_j + \dots + r_{(cm,\kappa)i,247}^* q_{247}, \\ \dots \\ R_{253} = r_{(cm,\kappa)247,43}^* q_{43} + \dots + r_{(cm,\kappa)247,j}^* q_j + \dots + (r_{(cm,\kappa)247,247}^* - \lambda_{247} \mathbf{m}_{247}^k) q_{247}, \end{cases} \quad (4.43)$$

Здесь нумерация уравнений соответствует нумерации узлов для конечно-элементной сетки 16x16.

Где $r_{cm(\kappa)} = (r_{b,b} - \tilde{r}_{b,s} \delta_{s,s}^{-1} \tilde{\delta}_{s,b})$.

$$\left[D_{13 \times 13}^{* \text{ст}(b)} - \lambda_{13 \times 13} \mathbf{m}_{13 \times 13}^* \right] \left\{ q_b \right\}_{13 \times 1} = 0, \quad (4.44)$$

В результате для матриц $\left[D_{\text{ст}(b)} \right]_{13 \times 13}$ и $\left[D_{\text{ст}(b)}^* \right]_{13 \times 13}$ вычисляем матрицы СЗ и СВ

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{13} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{— диагональная матрица из 13 собственных} \\ \text{значений матриц уравнения (4.41)} \end{array}$$

$$[v] = \begin{bmatrix} v_{1,1} & v_{2,1} & \cdots & v_{13,1} \\ v_{1,2} & v_{2,2} & \cdots & v_{13,2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_{1,j} & v_{2,j} & \cdots & v_{13,j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_{1,13} & v_{2,13} & \cdots & v_{13,13} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{— матрица из 13 соответствующих} \\ \text{собственных векторов уравнения (4.41)} \end{array}$$

Разделяем все второстепенные степени свободы на отдельные группы, включающие M_i степеней свободы, по степени их близости к узлам конденсации.

Создаются парциальные динамические системы, каждая из которых включает главные степени свободы и одну из групп второстепенных:

$$\begin{cases} (r_{\bar{b},\bar{b}} - \lambda \mathbf{m}_{\bar{b}}) q_{\bar{b}} + r_{\bar{b},\bar{s}} q_{\bar{s}} = 0, \\ r_{\bar{s},\bar{b}} q_{\bar{b}} + (r_{\bar{s},\bar{s}} - \lambda \mathbf{m}_{\bar{s}}) q_{\bar{s}} = 0, \end{cases} \quad (4.45)$$

где $\bar{b} = 1, 2, \dots, N, N+1, N+2, \dots, N+M_i$;

$\bar{s} = N+M_i+1, N+M_i+2, \dots, n$.

Для каждой парциальной системы решается алгебраическая задача нахождения собственных значений (СЗ) и собственных векторов (СВ) для частотного уравнения:

$$\left[D_{\text{ст}(\bar{b})} - \lambda \mathbf{m}_{\bar{b}} \right] \{q_{\bar{b}}\} = 0, \quad (4.46)$$

где $D_{\text{ст}(\bar{b})} = \begin{pmatrix} r_{\bar{b},\bar{b}} & -r_{\bar{b},\bar{s}} & r_{\bar{s},\bar{s}}^{-1} & r_{\bar{s},\bar{b}} \end{pmatrix}$.

Решив это уравнение, найдем для парциальной системы (4.46) соответствующие матрицы $\left[\lambda_k^{(i)} \right]$ и $\left[v^{(i)} \right]$, состоящие из $N + M_i$ СЗ и СВ.

Возвращаясь снова к частотному уравнению (4.41), найдем такую матрицу масс $\mathbf{m}_b$, при которой все N собственных значений и собственных векторов этого уравнения совпадали бы с N низшими собственными частотами и формами колебаний, найденными для уравнения (4.46).

Для этого заменим матрицу $\mathbf{m}_b$ в (4.41) матрицей

$$\bar{\mathbf{m}}_b = \mathbf{m}_b + \Delta \mathbf{m}_b^{(i)}, \quad (4.47)$$

где $\Delta \mathbf{m}_b^{(i)}$ – конденсационные добавки к имеющимся массам в узлах b от i -ой группы второстепенных масс M_i , обеспечивающие равенство N собственных частот и форм колебаний уравнений (4.41) и (4.46).

Подставив в (4.41) вместо $\mathbf{m}_b$ матрицу $\bar{\mathbf{m}}_b$ и найденные для (4.46) N собственных значений $\lambda_k^{(i)}$, ($k=1, 2, \dots, N$) и собственных векторов $v_{jk}^{(i)}$, получим следующее уравнение:

$$\left[\left[D_{\text{ст}(b)} \right] - \left[\lambda_k^{(i)} \right] \left[\bar{\mathbf{m}}_b \right] \right] \left[v^{(i)} \right] = 0, \quad (4.48)$$

Решая уравнение (4.48), находим:

$$\left[\bar{\mathbf{m}}_b \right] = \left[\mathbf{m}_b + \Delta \mathbf{m}_b^{(i)} \right] = \left[D_{\text{ст}(b)} \right] \left[v^{(i)} \right] \left[\lambda_k^{(i)} \right] \left[v^{(i)} \right]^{-1}. \quad (4.49)$$

Результатом решения данного уравнения является матрица порядка $b \times b$

Для приведения ее к диагональному виду исходной матрицы $\mathbf{m}_b$ необходимо все ее строки просуммировать и записать в виде диагональной матрицы. Матрица конденсационных добавок от i -ой группы второстепенных масс:

$$\Delta \mathbf{m}_b^{(i)} = \bar{\mathbf{m}}_b^{(i)} - \mathbf{m}_b.$$

$$\Delta \mathbf{m}_b^{(i)} = \left[D_{\text{ст}(b)} \right] \left[v^{(i)} \right] \left[\lambda_k^{(i)} \right] \left[v^{(i)} \right]^{-1} - \left[\mathbf{m}_b \right] \quad (4.50)$$

Суммируя добавки для всех парциальных систем, получим конденсированную к выбранным N узлам b редуцированную матрицу масс рассматриваемой конструкции:

$$\mathbf{m}_b^{(\text{ред})} = \mathbf{m}_b + \sum_{i=1}^T \Delta \mathbf{m}_b^{(i)}, \quad (4.51)$$

где T – число парциальных систем.

При реализации алгоритма частотно-динамической конденсации на этапе определения конденсационных добавок, коэффициенты матрицы масс, соответствующие основным неизвестным, изменяются за счет включения в себя матрицы добавок, учитывающей влияние второстепенных степеней свободы. Это позволяет повысить точность численного расчета собственных частот в верхней части спектра исходной системы.

Подставив в (4.48) вместо $\bar{\mathbf{m}}_b$ матрицу масс $\mathbf{m}_b^{(\text{ред})}$, решим полученное редуцированное частотное уравнение:

$$\left[\left[D_{\text{ст}(b)} \right] - \left[\lambda_k \right] \left[\mathbf{m}_b^{(\text{ред})} \right] \right] \{q_b\} = 0. \quad (4.52)$$

В результате найдем редуцированный к выбранным узлам конденсации b спектр собственных значений СЗ $[\lambda_k]$ и собственных векторов СВ $[v_{j,k}]$.

где $k = 1, 2, \dots, N$, $j = 1, 2, \dots, N$.

4.4.1.3 Сводный анализ эффективности разработанных алгоритмов редуцирования системы частотных уравнений

Результаты численных расчетов представлены в таблице 4.2, в которой приведено сравнение нижней части спектра собственных частот колебаний этой пластинки с решением, полученными в ПК ЛИРА, а также аналитическим решением.

Таблица 4.2 – Численные значения частот собственных колебаний ω , полученные при расчете шарнирно опертой по контуру плиты

ω	КСМ 8x8 (ДММ)	КСМ 16X16→8x8 (ДММ)	КСМ 32X32→8x8 (ДММ)	СК 8X8	СК 16X16→ 8X8	СК 32X32→ 8X8	ПК ЛИРА 8x8 (ДММ)	ПК ЛИРА 8x8 (СММ)	А.Р.
1	62,740	62,785	62,897	61,563	61,607	61,619	61,747	61,752	62,832
2	155,648	155,794	155,839	152,650	152,796	152,842	153,565	153,680	157,080
3	155,648	155,794	155,839	152,650	152,796	152,842	153,565	153,680	157,080
4	240,627	241,118	241,288	236,357	236,871	237,047	240,864	241,379	251,320
5	308,803	308,968	309,054	304,295	304,485	304,578	306,183	307,247	314,159
6	308,803	308,968	309,054	304,295	304,485	304,578	306,183	307,247	314,159

Результаты решения задач-тестов позволяют сделать сравнение обсуждаемых вариантов конденсации как между собой, так и с имеющимися точными решениями и решениями, полученными при помощи коммерческих программных продуктов. Такое сравнение подтвердило эффективность и возможность достижения требуемой точности при значительно меньшем порядке решаемой системы частотных уравнений для каждого из вариантов конденсации.

4.4.2 Расчет жестко заземленной по контуру пластины

В качестве задачи-теста выполнен динамический расчет квадратной жестко заземленной по контуру пластины (рисунок 4.16). На действие постоянной нагрузки от собственного веса была решена проблема СЗ и СВ с использованием предложенных алгоритмов.

При выполнении численного расчета были приняты следующие исходные данные:

$$a=b=1\text{м}; h=0,01\text{м}; \mu_x = \mu_y = 0,3; E=109,2 \text{ ГПа}; \rho = 2,5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

Выбор данного примера обусловлен тем, что задача о колебаниях жестко заземленной пластинки является классической и имеет известное аналитическое решение. Это позволяет провести сравнительный анализ результатов, полученных с использованием разработанных алгоритмов редукции и конденсации, с

эталонным решением и результатами, полученными в коммерческом программном комплексе.

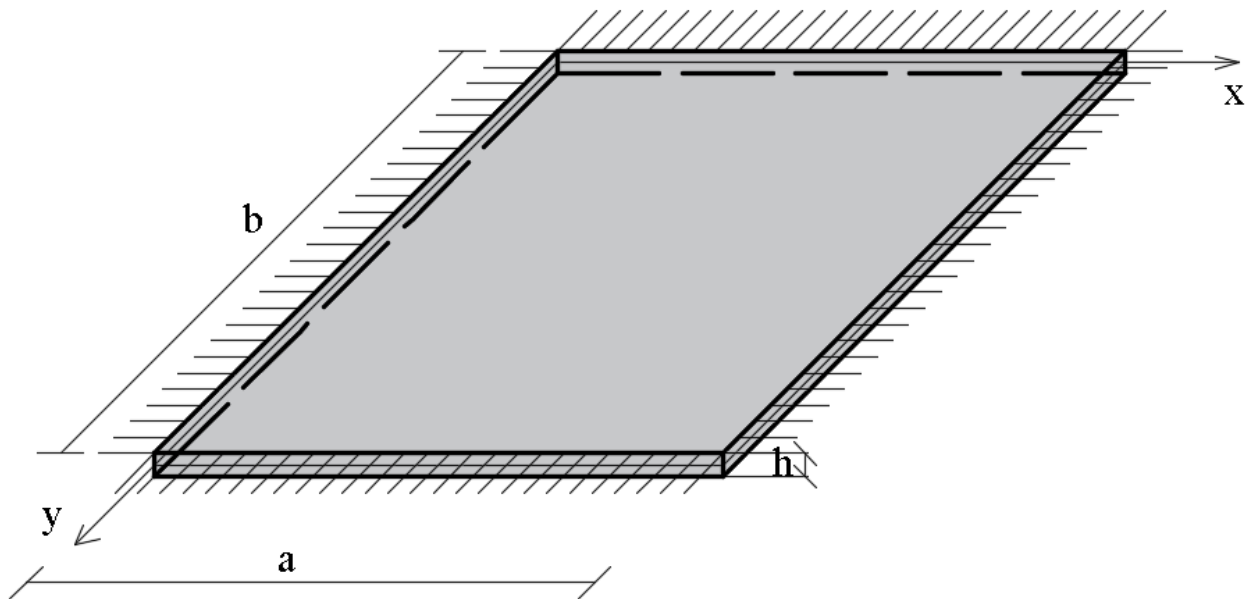


Рисунок 4.16 – Физическая модель жестко защемленной пластины

4.4.1.1 Анализ эффективности алгоритма редуцирования системы частотных уравнений на основе интерполяции основных неизвестных при расчете жестко защемленной по контуру пластины

Решение полной проблемы СЗ и СВ МКЭ в форме КСМ выполнено при представлении данной пластины 64 и 256 прямоугольными КЭ-пластинками при равномерно распределенной массе по площади расчетной модели. Разбиение модели конечно-элементной сеткой 8x8 (рисунок 4.17) привело к формированию системы уравнений, содержащей $n = 243$ уравнений, сеткой 16x16 (рисунок 4.18) привело к формированию системы уравнений, содержащей $n = 867$ уравнений.

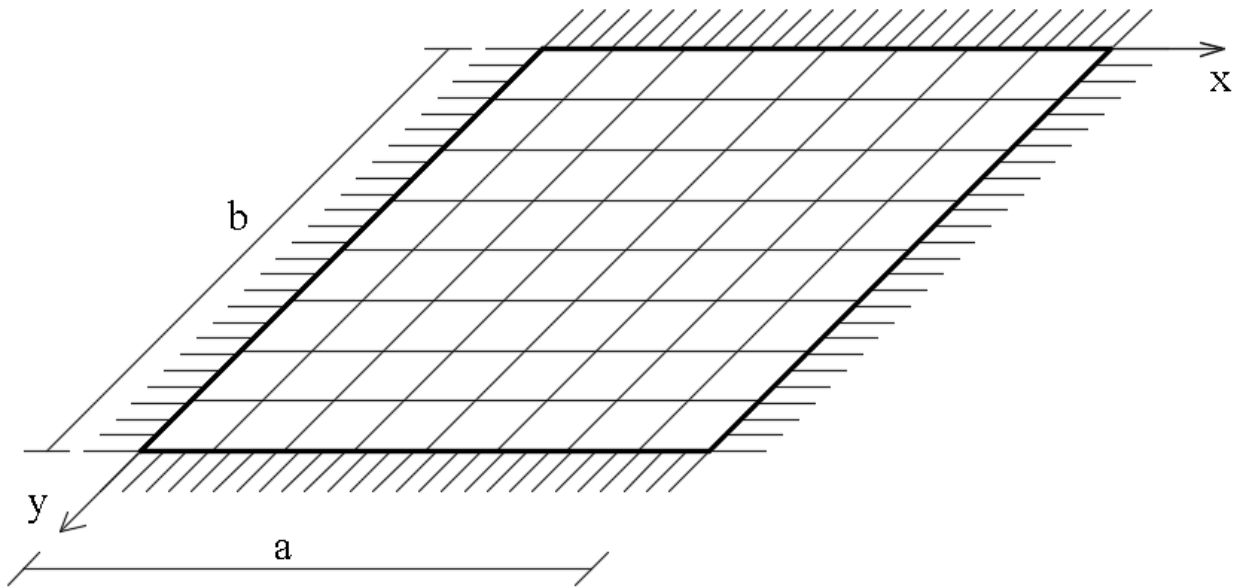


Рисунок 4.17 – Конечно-элементная модель жестко заземленной по контуру пластины 8x8

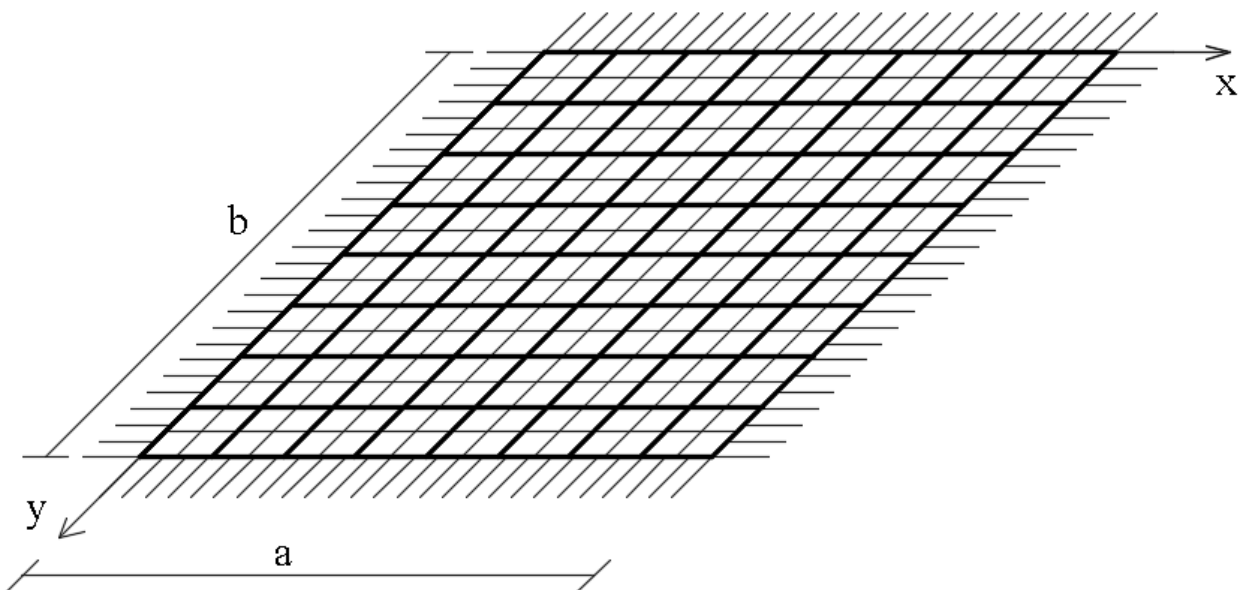


Рисунок 4.18 – Конечно-элементная модель жестко заземленной по контуру пластины с мелкой сеткой 16x16

Для проведения расчетов по 1 варианту расчетной схемы (рисунок 4.17) составим глобальную систему частотных уравнений. В итоге после учета граничных условий глобальная система уравнений для расчета по исходной схеме смешанного метода при сетке 8x8 состоит из 211 уравнений.

В матричном виде записывается:

$$\left(\begin{bmatrix} D_{\text{ст}} \end{bmatrix}_{211 \times 211} - \lambda_{211 \times 211} \begin{bmatrix} \mathbf{m} \end{bmatrix}_{211 \times 211} \right) \{q\}_{211 \times 1} = 0, \quad (4.53)$$

Для проведения расчетов по 2 варианту расчетной схемы (рисунок 4.18) в соответствии с общим алгоритмом составим глобальную систему частотных уравнений для исходной расчетной схемы 16x16. После учета граничных условий она состоит из 803 уравнений.

$$\left(\begin{bmatrix} D_{\text{ст}} \end{bmatrix}_{803 \times 803} - \lambda_{803 \times 803} \begin{bmatrix} \mathbf{m} \end{bmatrix}_{803 \times 803} \right) \{q\}_{803 \times 1} = 0, \quad (4.54)$$

После выполнения алгоритма редуцирования получена редуцированная глобальная система уравнений смешанного метода при переходе от мелкой сетки 16x16 к сетке 8x8, состоящая из 211 уравнений, которая записывается в виде:

$$\left(\begin{bmatrix} D_{\text{ст}}^* \end{bmatrix}_{211 \times 211} - \lambda_{211 \times 211} \begin{bmatrix} \mathbf{m}^* \end{bmatrix}_{211 \times 211} \right) \{q\}_{211 \times 1} = 0, \quad (4.55)$$

В результате для матриц $\begin{bmatrix} D_{\text{ст}} \end{bmatrix}_{211 \times 211}$ и $\begin{bmatrix} D_{\text{ст(к)}}^* \end{bmatrix}_{211 \times 211}$ вычисляем матрицы СЗ и СВ

$$\begin{aligned} [\lambda] &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{211} \end{bmatrix}_{211 \times 211} && \begin{aligned} &\text{— диагональная матрица из 211} \\ &\text{собственных значений для матриц } \begin{bmatrix} D_{\text{ст}} \end{bmatrix}_{211 \times 211} \text{ и} \\ &\begin{bmatrix} D_{\text{ст(к)}}^* \end{bmatrix}_{211 \times 211} \end{aligned} \\ [v] &= \begin{bmatrix} v_{1,1} & v_{2,1} & \cdots & v_{211,1} \\ v_{1,2} & v_{2,2} & \cdots & v_{211,2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_{1,j} & v_{2,j} & \cdots & v_{211,j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_{1,211} & v_{2,211} & \cdots & v_{211,211} \end{bmatrix}_{211 \times 211} && \begin{aligned} &\text{— матрица из 211 соответствующих} \\ &\text{собственных векторов для матриц } \begin{bmatrix} D_{\text{ст}} \end{bmatrix}_{211 \times 211} \text{ и} \\ &\begin{bmatrix} D_{\text{ст(к)}}^* \end{bmatrix}_{211 \times 211} \end{aligned} \end{aligned}$$

Приведены результаты численного расчета нижней части спектра собственных частот колебаний для варианта, в котором за основные степени

свободы приняты линейные и вращательные инерционные составляющие при реализации МКЭ в форме КСМ.

для матрицы $[D_{\text{ст}}]_{211 \times 211}$:

$$[\omega] = \begin{bmatrix} 113,265 & & & & & & \\ & 228,597 & & & & & \\ & & 228,597 & & & & \\ & & & 322,203 & & & \\ & & & & 404,741 & & \\ & & & & & 407,603 & \\ & & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

211×211

для матрицы $[D_{\text{ст}(k)}^*]_{211 \times 211}$:

$$[\omega^*] = \begin{bmatrix} 113,583 & & & & & & \\ & 229,101 & & & & & \\ & & 229,101 & & & & \\ & & & 322,325 & & & \\ & & & & 405,166 & & \\ & & & & & 408,166 & \\ & & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

211×211

Точность вычисления СЗ при использовании предлагаемых алгоритмов несколько выше, чем при расчете МКЭ в форме КСМ без редуцирования основных неизвестных. Это происходит за счет дополнительного учета влияния редуцированных второстепенных неизвестных.

4.4.1.2 Анализ эффективности конденсационных и комбинированных алгоритмов редуцирования системы частотных уравнений при расчете жестко заземленной по контуру пластины

На втором этапе решалась задача определения редуцированного спектра собственных частот колебаний пластинки с использованием модифицированных

алгоритмов статической конденсации. За основные степени свободы приняты только линейные перемещения из плоскости пластины. Решение неполной проблемы СЗ и СВ выполнялось для двух вариантов разбиения на конечно-элементные сетки (рисунок 4.17) и (рисунок 4.18).

После выполнения процедуры статической конденсации система уравнений по первому варианту расчетной схемы (рисунок 4.17) запишется в виде:

$$\left(\begin{bmatrix} D_{\text{ст(к)}} \end{bmatrix}_{47 \times 47} - \lambda_{47 \times 47} \begin{bmatrix} \mathbf{m}_k \end{bmatrix}_{47 \times 47} \right) \{q\}_{47 \times 1} = 0, \quad (4.56)$$

При реализации комбинированного алгоритма статической конденсации система уравнений по второму варианту расчетной схемы (рисунок 4.18) запишется в виде:

$$\begin{cases} R_{37} = (r_{(cm,k)37,37}^* - \lambda_{37} \mathbf{m}_{37}^k) q_{37} + \dots + r_{(cm,k)37,j}^* q_j + \dots + r_{(cm,k)37,253}^* q_{253}, \\ \dots \\ R_i = r_{(cm,k)i,37}^* q_{37} + \dots + (r_{(cm,k)i,j}^* - \lambda_i \mathbf{m}_i^k) q_j + \dots + r_{(cm,k)i,253}^* q_{253}, \\ \dots \\ R_{253} = r_{(cm,k)253,37}^* q_{37} + \dots + r_{(cm,k)253,j}^* q_j + \dots + (r_{(cm,k)253,253}^* - \lambda_{253} \mathbf{m}_{253}^k) q_{253}, \end{cases} \quad (4.57)$$

где $r_{cm(k)} = (r_{r,r} - \tilde{r}_{r,s} \delta_{s,s}^{-1} \tilde{\delta}_{s,r})$.

$$\left(\begin{bmatrix} D_{\text{ст(к)}}^* \end{bmatrix}_{47 \times 47} - \lambda_{47 \times 47} \begin{bmatrix} \mathbf{m}^* \end{bmatrix}_{47 \times 47} \right) \{q\}_{47 \times 1} = 0, \quad (4.58)$$

В результате для матриц $\begin{bmatrix} D_{\text{ст(к)}} \end{bmatrix}_{47 \times 47}$ и $\begin{bmatrix} D_{\text{ст(к)}}^* \end{bmatrix}_{47 \times 47}$ вычисляем матрицы СЗ и СВ:

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{47} \end{bmatrix}_{47 \times 47}$$

– диагональная матрица из 47 собственных значений уравнения для редуцированных

матриц $\begin{bmatrix} D_{\text{ст(к)}} \end{bmatrix}_{47 \times 47}$ и $\begin{bmatrix} D_{\text{ст(к)}}^* \end{bmatrix}_{47 \times 47}$

$$[v] = \begin{bmatrix} v_{1,1} & v_{2,1} & \cdots & v_{47,1} \\ v_{1,2} & v_{2,2} & \cdots & v_{47,2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_{1,j} & v_{2,j} & \cdots & v_{47,j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_{1,47} & v_{2,47} & \cdots & v_{47,47} \end{bmatrix}$$

47×47

– матрица из 47 соответствующих
собственных векторов для редуцированных
матриц $[D_{\text{ст(к)}}]_{47 \times 47}$ и $[D_{\text{ст(к)}}^*]_{47 \times 47}$

При вычислениях по исходной расчетной схеме и с использованием конденсационных алгоритмов использовались следующие комбинации мелких и крупных сеток:

- Исходная сетка 8x8 (обозначение: $[\omega]$).
- Мелкая сетка 16x16 → Крупная сетка 8x8 (обозначение: $[\omega_1^*]$).

$$[\omega] = \begin{bmatrix} 111,026 & & & & & & & \\ & 224,679 & & & & & & \\ & & 224,679 & & & & & \\ & & & 317,723 & & & & \\ & & & & 401,629 & & & \\ & & & & & 404,505 & & \\ & & & & & & \ddots & \end{bmatrix}$$

49×49

$$[\omega_1^*] = \begin{bmatrix} 111,243 & & & & & & & \\ & 224,998 & & & & & & \\ & & 224,998 & & & & & \\ & & & 317,671 & & & & \\ & & & & 401,797 & & & \\ & & & & & 404,803 & & \\ & & & & & & \ddots & \end{bmatrix}$$

49×49

4.4.1.3 Сводный анализ эффективности разработанных алгоритмов редуцирования системы частотных уравнений

Результаты численных расчетов, полученных при реализации алгоритмов конденсации в смешанной форме, представлены в таблице 4.3, в которой приведено сравнение нижней части спектра собственных частот колебаний этой пластинки.

Таблица 4.3 – Численные значения частот собственных колебаний ω , полученные при расчете жестко заземленной по контуру плиты

ω	КСМ 8x8 (ДММ)	КСМ 16X16→8 x8 (ДММ)	СК 8X8	СК 16X16→8 X8	ПК ЛИРА 8x8 (ДММ)	ПК ЛИРА 8x8 (СММ)	А.Р.
1	113,265	113,583	111,026	111,243	111,794	111,844	113,091
2	228,597	229,101	224,679	224,998	226,736	227,228	230,602
3	228,597	229,101	224,679	224,998	226,736	227,228	230,602
4	322,203	322,325	317,723	317,671	325,564	327,133	340,027
5	404,741	405,166	401,629	401,797	404,722	408,059	414,370
6	407,603	408,166	404,505	404,803	407,371	410,767	414,370

Анализ результатов численных расчетов, представленных в этой таблице, позволяет сделать вывод, что использование комбинированных алгоритмов конденсации позволяет повысить точность расчета СЗ системы содержащей основные степени свободы в сторону верхней части спектра СЗ исходной системы.

При использовании комбинированных алгоритмов, сочетающих интерполяцию неизвестных и конденсационные методы, система частотных уравнений отличается от системы частотных уравнений, полученных при использовании МКЭ в форме КСМ без редуцирования основных неизвестных. Это происходит за счет дополнительного учета влияния редуцированных второстепенных неизвестных. Точность вычисления СЗ несколько выше, чем с использованием классического варианта конденсации.

4.4.3 Расчет пластины на упруго-податливых опорах

Для верификации предлагаемого комбинированного алгоритма решена задача определения СЗ и СВ пластины, опирающейся на упруго-податливые опоры габаритными размерами 12 х 12 м, представленной в главе 3 (рисунок 3.3). Рассмотрен вариант нагружения этой плиты нагрузкой, приложенной по контуру плиты и вдоль линии симметрии по оси Y , а также нагрузкой от собственного веса. Характеристики плиты:

$$h=0,3\text{м}; \mu_x = \mu_y = 0,2; E=30 \cdot 10^3 \text{ МПа}; \rho = 2,5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$$

Конечно-элементная модель и процесс формирования редуцированной глобальной матрицы откликов для задачи статического расчета этой плиты описаны в п. 3.2.

Численный расчет СЗ и СВ для этой пластины выполнен в следующих вариантах:

1. На основе МКЭ в форме КСМ с использованием конденсационных методов.
2. На основе МКЭ в форме КСМ с использованием разработанных комбинированных алгоритмов редуцирования системы частотных уравнений.
3. На основе МКЭ в форме метода перемещений с использованием ПК ЛИРА при использовании согласованной матрицы масс (СММ), диагональной матрицы масс (ДММ).

4.4.3.1 Анализ эффективности конденсационных и комбинированных алгоритмов редуцирования системы динамических уравнений при расчете пластины на упруго-податливых опорах

Редуцированная глобальная система частотных уравнений к сетке 16х16 имеет 880 уравнений и записывается в общем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l}
R_1 = (r_{1,1} - \lambda_1 \mathbf{m}_1^k) q_1 + \dots + r_{1,j} q_j + \dots + r_{1,289} q_{289} + \tilde{\delta}_{1,292} \tilde{q}_{292} + \dots + \tilde{\delta}_{1,j} \tilde{q}_j + \dots + \\
+ \tilde{\delta}_{1,880} \tilde{q}_{880}, \\
\dots \\
R_i = r_{i,1} q_1 + \dots + (r_{i,j} - \lambda_i \mathbf{m}_i^k) q_j + \dots + r_{i,289} q_{289} + \tilde{\delta}_{i,292} \tilde{q}_{292} + \dots + \tilde{\delta}_{i,j} \tilde{q}_j + \dots + \\
+ \tilde{\delta}_{i,880} \tilde{q}_{880}, \\
\dots \\
R_{289} = r_{289,1} q_1 + \dots + r_{289,j} q_j + \dots + (r_{289,289} - \lambda_{289} \mathbf{m}_{289}^k) q_{289} + \tilde{\delta}_{289,292} \tilde{q}_{292} + \dots + \\
+ \tilde{\delta}_{289,i} \tilde{q}_i + \dots + \tilde{\delta}_{289,880} \tilde{q}_{880}, \\
\dots \\
\Delta_{292} = r_{292,1} q_1 + \dots + r_{292,j} q_j + \dots + r_{292,289} q_{289} + (\tilde{\delta}_{292,292} - \lambda_{292} \mathbf{m}_{292}^f) \tilde{q}_{292} + \dots + \\
+ \tilde{\delta}_{292,i} \tilde{q}_i + \dots + \tilde{\delta}_{292,880} \tilde{q}_{880}, \\
\dots \\
\Delta_i = r_{i,1} q_1 + \dots + r_{i,j} q_j + \dots + r_{i,289} q_{289} + \tilde{\delta}_{i,292} \tilde{q}_{292} + \dots + (\tilde{\delta}_{i,j} - \lambda_i \mathbf{m}_i^f) \tilde{q}_j + \\
+ \dots + \tilde{\delta}_{i,880} \tilde{q}_{880}, \\
\dots \\
\Delta_{880} = r_{880,1} q_1 + \dots + r_{880,j} q_j + \dots + r_{880,289} q_{289} + \tilde{\delta}_{880,292} \tilde{q}_{292} + \dots + \tilde{\delta}_{880,j} \tilde{q}_j + \dots + \\
+ (\tilde{\delta}_{880,880} - \lambda_{880} \mathbf{m}_{880}^f) \tilde{q}_{880}.
\end{array} \right. \quad (4.59)$$

При реализации комбинированного алгоритма статической конденсации система уравнений по второму варианту расчетной схемы запишется в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l}
R_1 = (r_{(cm,\kappa)1,1}^* - \lambda_1 \mathbf{m}_1^k) q_1 + \dots + r_{(cm,\kappa)1,j}^* q_j + \dots + r_{(cm,\kappa)1,289}^* q_{289}, \\
\dots \\
R_i = r_{(cm,\kappa)i,1}^* q_1 + \dots + (r_{(cm,\kappa)i,j}^* - \lambda_i \mathbf{m}_i^k) q_j + \dots + r_{(cm,\kappa)i,289}^* q_{289}, \\
\dots \\
R_{289} = r_{(cm,\kappa)289,1}^* q_1 + \dots + r_{(cm,\kappa)289,j}^* q_j + \dots + (r_{(cm,\kappa)289,289}^* - \lambda_{289} \mathbf{m}_{289}^k) q_{289},
\end{array} \right. \quad (4.60)$$

где $r_{cm(\kappa)} = (r_{r,r} - \tilde{r}_{r,s} \delta_{s,s}^{-1} \tilde{\delta}_{s,r})$.

В итоге получена редуцированная система уравнений смешанного метода к сетке 16x16, которая имеет 289 уравнений.

После выполнения процедуры статической конденсации система уравнений по первому варианту расчетной схемы запишется в виде:

$$\left(\begin{bmatrix} D_{\text{ст(к)}} \\ 289 \times 289 \end{bmatrix} - \frac{\lambda}{289 \times 289} \begin{bmatrix} \mathbf{m}_k \\ 289 \times 289 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} q \end{Bmatrix}_{289 \times 1} = 0, \quad (4.61)$$

При реализации комбинированного алгоритма статической конденсации система уравнений по второму варианту расчетной схемы запишется в виде:

$$\left(\begin{bmatrix} D_{\text{ст(к)}}^* \\ 289 \times 289 \end{bmatrix} - \frac{\lambda}{289 \times 289} \begin{bmatrix} \mathbf{m}^* \\ 289 \times 289 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} q \end{Bmatrix}_{289 \times 1} = 0, \quad (4.62)$$

В результате для матриц $\begin{bmatrix} D_{\text{ст(к)}} \\ 289 \times 289 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} D_{\text{ст(к)}}^* \\ 289 \times 289 \end{bmatrix}$ вычисляем редуцированные на основе комбинированного алгоритма статической конденсации матрицы СЗ и СВ.

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{289} \end{bmatrix}_{289 \times 289} \quad \begin{array}{l} \text{— диагональная матрица из} \\ \text{289 собственных значений уравнения для} \\ \text{редуцированных матриц } \begin{bmatrix} D_{\text{ст(к)}} \\ 289 \times 289 \end{bmatrix} \text{ и} \\ \begin{bmatrix} D_{\text{ст(к)}}^* \\ 289 \times 289 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$[v] = \begin{bmatrix} v_{1,1} & v_{2,1} & \cdots & v_{289,1} \\ v_{1,2} & v_{2,2} & \cdots & v_{289,2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_{1,j} & v_{2,j} & \cdots & v_{289,j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_{1,289} & v_{2,289} & \cdots & v_{289,289} \end{bmatrix}_{289 \times 289} \quad \begin{array}{l} \text{— матрица из 289 соответствующих} \\ \text{собственных векторов для} \\ \text{редуцированных матриц } \begin{bmatrix} D_{\text{ст(к)}} \\ 289 \times 289 \end{bmatrix} \text{ и} \\ \begin{bmatrix} D_{\text{ст(к)}}^* \\ 289 \times 289 \end{bmatrix} \end{array}$$

4.4.1.2 Сводный анализ эффективности разработанных алгоритмов редуцирования системы частотных уравнений при расчете пластины на упруго-податливых опорах

Результаты численных расчетов представлены в таблице 4.4, в которой приведено сравнение нижней части спектра собственных частот колебаний пластины на упруго-податливых опорах с решением, полученными в ПК ЛИРА.

Таблица 4.4 – Численные значения частот собственных колебаний ω , полученные при расчете плиты на упруго-податливых опорах

ω	КСМ 16x16	КСМ 32x32→16x16	ЛИРА 16x16	ЛИРА 32x32	ЛИРА 64x64	ЛИРА 64x64 СММ	Относительная погрешность	
							КСМ 16x16 и ЛИРА 64x64 СММ	КСМ 32x32→16x16 и ЛИРА 64x64 (СММ)
1	14,111	14,237	13,564	14,184	14,216	14,833	4,9	4,0
2	14,216	14,359	13,726	14,400	14,472	15,044	5,5	4,6
3	15,025	15,186	14,492	15,263	15,360	15,909	5,6	4,5
4	15,531	15,715	15,090	15,508	15,507	15,924	2,5	1,3
5	15,589	15,774	15,143	15,569	15,571	16,044	2,8	1,7
6	15,897	16,086	15,467	15,942	15,963	16,394	3,0	1,9

Результаты численных расчетов, представленные в таблице 4.4, показывают, что частоты собственных колебаний пластин на упруго-податливых опорах, полученные с использованием различных подходов, имеют достаточно близкие значения. Это свидетельствует о корректности разработанных алгоритмов редуцирования системы частотных уравнений.

4.5 Выводы по главе 4

1. Разработанные алгоритмы редуцирования системы динамических уравнений на основе интерполяции основных неизвестных и комбинированные подходы, продемонстрировали свою эффективность при расчете динамических характеристик пластины.

2. Применение редукционных алгоритмов позволяет существенно снизить размерность системы частотных уравнений. Например, глобальная система частотных уравнений, сформированная для сетки 16x16, состоит из 675 уравнений. После редукции до сетки 8x8 система была уменьшена до 147 уравнений, что подтверждает эффективность редукционных подходов в уменьшении вычислительной сложности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Разработан унифицированный базовый алгоритм-платформа для редуцирования СЛАУ МКЭ в форме КСМ, основанный на интерполяции основных неизвестных смешанного метода. При необходимости определения полного поля перемещений/усилий на мелкой конечно-элементной сетке выполняется процедура обратного хода с использованием найденных коэффициентов интерполяции. Сходимость к точному решению при сгущении конечно-элементной сетки обеспечивается устойчивостью счета, как и при использовании классического алгоритма формирования разрешающей системы уравнений МКЭ в форме КСМ.

2. На основе базового унифицированного алгоритма разработаны частные специализированные алгоритмы редуцирования СЛАУ МКЭ в форме КСМ, описывающих напряженно-деформированное состояние конструкции на основе различных вариантов интерполяции основных неизвестных в узлах мелкой конечно-элементной сетки через значения неизвестных в узлах грубой сетки.

3. Разработан специализированный алгоритм редуцирования частотных уравнений на основе МКЭ в форме КСМ.

4. Разработаны комбинированные алгоритмы редуцирования частотных уравнений, сочетающие алгоритм на основе интерполяции неизвестных и методы конденсации в форме КСМ. Главной особенностью этих алгоритмов является применение статически редуцированной на основе интерполяции матрицы откликов, обеспечивающей достаточную точность при решении задач статики. В комбинации с алгоритмом блочной конденсации удастся значительно быстрее с достаточной точностью получить решение.

5. Эффективность разработанных алгоритмов подтверждена численным решением тестовых примеров: расчета пластин на статическое и динамическое воздействие, и сравнением с имеющимися аналитическими решениями и результатами, полученными другими исследователями.

Разработанные алгоритмы создают основу для разработки новых и внедрения в уже существующие, реализующие МКЭ в форме КСМ, программные средства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акимов, П.А. Многоуровневые дискретные и дискретно-континуальные методы локального расчета строительных конструкций [Текст]: монография / П. А. Акимов, М. Л. Мозгалева – Москва: МГСУ, 2014. - 632 с. – ISBN 978-5-7264-0907-8
2. Александров, А.В. Строительная механика. Тонкостенные пространственные системы [Текст] / А.В. Александров, Б.Я. Лашеников, Н.Н. Шапошников – М. : Стройиздат, 1983. - 488с.
3. Александров, А.В. Методы расчета стержневых систем, пластин и оболочек с использованием ЭВМ [Текст] / А.В. Александров, Б.Я. Лашеников, Н.Н. Шапошников, В.А. Смирнов. ЭВМ. Под ред. А.Ф. Смирнова. Ч. I. М.: Стройиздат, 1976. - 248 с.
4. Алёнин, В. П. Итерационные методы расчета систем с внешними и внутренними односторонними связями [Текст]: дис. д-ра техн. наук / Алёнин В. П. - Волгоград, 2002. - 325 с.
5. Баженов, В.Г. О конечно-разностном решении волновых уравнений теории оболочек типа Тимошенко [Текст] / В.Г. Баженов, Д.Т. Чекмарев // Прикладные проблемы прочности и пластичности, 1981. - с. 41-50.
6. Бате, К. Численные методы анализа и метод конечных элементов: пер. с англ. [Текст] / К. Бате, Е. Вилсон. М.: Стройиздат, 1982. – 466 с.
7. Бате, К. Методы решения задач на собственные значения в строительной механике: пер. с англ. [Текст] / К. Бате, Е. Вилсон. Л. : 1983. - 38 с.
8. Бахвалов, Н.С. Численные методы [Текст] / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков – М. : Бином. Лаборатория знаний, 2008. - 640 с.
9. Белый, М.В. Численные методы статического и динамического расчета конструкций на основе многоуровневых подходов [Текст]: дис. на соиск. учен. степ. д-ра техн. наук: 05.23.17. –М. : МГСУ, 1994. - 345 с.

10. Бельский, В.Г. Оптимизация формы области в задаче теории упругости [Текст]: дис. на соиск. уч.степ. канд. техн. наук: 01.02.03. – М.: МИСИ им. В.В. Куйбышева, 1983. - 215 с.
11. Блохина, И.В. Сплайновые суперэлементы для расчета пластинчатых систем на динамические воздействия [Текст] / И.В. Блохина, О.М. Игнатьева // Волгоградский инж.-строит. Ин-т. Волгоград, 1987. 9с. Деп. В ВИНТИ 22.10.87. №7437
12. Бочков, М.И. Анализ эффективности решения задач статики систем с односторонними связями на основе МКЭ в форме классического смешанного метода [Текст]: диссертация кандидата технических наук : 2.1.9. - Волгоград, 2022. - 136 с.
13. Постнов, В.А. Метод суперэлементов в расчетах инженерных сооружений [Текст] // Судостроение, 1979. - 288с.
14. Вороненок, Е.Я. Интерполяционное редуцирование матриц жесткости при решении задач строительной механики методом суперэлементов [Текст] / Е.Я. Вороненок, С.В. Сочинский // Прикладная механика. 1981. т.17, №6, с. 114-118
15. Габова, В.В. Применение смешанной формы МКЭ к расчетам стержневых систем [Текст]: диссертация кандидата технических наук: 05.23.17 – Волгоград, 2011. - 196 с.
16. Гайан, Р. Дж. Приведение матриц жесткости и масс [Текст] // Ракетная техника и космонавтика. 1965. т. 3. №2. - с. 287.
17. Головин, О.А. Конденсация в задачах на собственные колебания с использованием изопараметрических элементов [Текст] / О.А. Головин, О.А. Троицкая // Ленингр. политех. Ин-т. Л., 1986. 12 с. Деп. В ВИНТИ №6509-B86
18. Гриненко, Н.И. О задачах исследования колебаний конструкций методом конечных элементов [Текст] / Н.И. Гриненко, В.В. Мокеев // Прикладная механика. 1985. т. 21. №3. с.12-15
19. Гриненко, Н.И. О повышении эффективности метода конечных элементов в задачах проектирования динамических систем [Текст] / Н.И. Гриненко, В.В.

Мокеев // Расчет и управление надежностью больших механических систем. Свердловск- Ташкент, 1988. - с. 20-25.

20. Гулд, С. Вариационные методы в задачах о собственных значения [Текст]: пер. с англ. / С. Гулд. М. : Мир, 1970. - 328 с.

21. Гусев, С.С. Особенности применения метода суперэлементов в задачах устойчивости и свободных колебаний [Текст] / СС. Гусев, Б.А. Куранов // ТР. XIV Всесоюзной конф. По теории пластин и оболочек, Кутаиси, 20-23 октября 1987. Тбилиси : Изд-во Тбилис. Ун-та, 1987. Т. 1. - с. 445-449.

22. Деммель, Дж. Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения [Текст] / Дж. Деммель. – М. : Мир, 2001. - 430 с.

23. Джордж, А. Численное решение больших разреженных систем уравнений [Текст] / А. Джордж, Дж. Лю. –М.: Мир, 1984. - 334 с.

24. Жданов, А.П. Исследование и расчет арочных мостов с учетом совместной работы арок и сквозного строения для проезжей части [Текст]: дисс. Канд. Техн. наук. М. : МАДИ, 1953.

25. Зенкевич, О. Метод конечных элементов в технике [Текст]: Пер. с англ. / О. Зенкевич ; Под ред. Б. Е. Победри. - Москва : Мир, 1975. - 541 с

26. Ивантеев, В.И. Расчет форм и частот свободных колебаний конструкций методом многоуровневой динамической конденсации [Текст] / В.И. Ивантеев, В.Д. Чубань // Ученые записки ЦАГИ. 1984. Т. 15, №4. С.81-92.

27. Ивенсен, Д. Расчет колебаний многократно симметричных конструкций [Текст] // Ракетная техника и космонавтика. 1976. Т. 14Б. №4 С 39-47.

28. Игнатьев, В.А. Расчет коробчатых систем по методу суперэлементов со сплайн-интерполяцией перемещений [Текст] / Игнатьев, В.А., Горелов С.Ф. //Изв. Вузов. Строительство и Архитектура. 1986. №11. С.-30-34

29. Игнатьев, В.А. Расчет регулярных стержневых систем [Текст] / В. А. Игнатьев ; Мин. обороны СССР. СВВХУ. - Саратов, 1973. - 433 с.

30. Игнатьев, В.А. Расчет стержневых пластинок и оболочек [Текст]: Метод дискрет. конеч. элементов / В. А. Игнатьев. - Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1988. - 159 с.

31. Игнатьев, В.А. Применение метода частотно-динамической конденсации к решению неполной алгебраической проблемы собственных значений и собственных векторов [Текст] / В.А. Игнатьев, О.М. Игнатьева // Контактные задачи и их применение в строительном производстве: Тезисы докладов. – Волгоград: Волгоградский инж. – строит. Ин-т, 1987. - с.57-69
32. Игнатьев, В.А. Новый вариант энергетического варианта метода частотно-динамической конденсации в задачах на собственные значения [Текст] / В.А. Игнатьев, О.М. Игнатьева // Численные методы решения задач строительной механики, теории упругости и пластичности: Тезисы докладов. – Волгоград: Волгоградский инж.-строит. Ин-т, 1990. – С.3-5
33. Игнатьев, В.А. Новый вариант частотно-динамической конденсации с покомпонентным синтезом собственных форм [Текст] / В.А. Игнатьев, А.В. Макаров // Численные методы решения задач строительной механики, теории упругости и пластичности : Тезисы докладов. – Волгоград: Волгоградский инж. – строит. Ин-т, 1990. - с.53
34. Игнатьев, В.А. Решение неполной алгебраической проблемы собственных значений по методу последовательной частотно-динамической конденсации [Текст] / Игнатьев В.А., Макаров А.В. // Волгоградский инж.-строит. Ин-т. – Волгоград. 1991. -25с. Деп. В ВИНТИ 18.02.91., №803-B91
35. Игнатьев, В.А. Теория и методы расчета регулярных стретневых систем [Текст]: диссертация ... доктора технических наук : 01.02.03. - Саратов, 1980. - 376 с.
36. Игнатьев, В.А. Расчет пластинок и оболочек : учеб. пособие [Текст] / В. А. Игнатьев, А. В. Игнатьев, О. В. Душко, И. С. Завьялов, С. С. Рекунов ; М-во науки и высш. образования Рос. Федерации, Волгогр. гос. техн. ун-т. - Волгоград : Изд-во ВолГТУ, 2023. - 135с.
37. Игнатьев, В.А. Метод конечных элементов в форме классического смешанного метода строительной механики (теория, математические модели и алгоритмы) [Текст] / В. А. Игнатьев, А. В. Игнатьев. - Москва : Издательство АСВ, 2022. - 303 с. ISBN 978-5-4323-0431-5

38. Игнатьев, В.А. Методы супердискретизации в расчетах сложных стержневых систем [Текст] / В. А. Игнатьев; Под ред. А. К. Носова. - Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1981. - 107 с.
39. Игнатьев, В.А. Редукционные методы расчета в статике и динамике пластинчатых систем [Текст] / В. А. Игнатьев. - Саратов : Изд-во Саратовского ун-та. - 1992. - 142 с.
40. Игнатьев, В. А. Практический метод расчета плит на одностороннем основании типа Винклера. Исследования по теории расчета и проектирования сооружений [Текст] / В. А. Игнатьев, В. П. Аленин - Саратов : СПИ. 1984. 327 с.
41. Игнатьев, В. А. Нелинейная строительная механика стержневых систем. Основы теории. примеры расчета [Текст] / В. А. Игнатьев, А. В. Игнатьев, В. В. Галишникова, Е. В. Онищенко; М-во образования и науки Рос. Федерации, Волгогр. гос. архит.-строит. ун-т. - Волгоград : ВолгГАСУ, 2014. - 97с.
42. Игнатьев, А.В. Алгоритм формирования глобальной матрицы откликов плоской стержневой системы [Текст] / А.В. Игнатьев, В.В. Габова / Вестник ВолгГАСУ. – 2009. –вып. 14. – с. 71-74
43. Игнатьев, А.В. Расчет конструкций с односторонними связями [Текст]: учеб. пособие / А. В. Игнатьев, М. И. Бочков, И. С. Завьялов; Волгогр. гос. техн. ун-т. - Волгоград: Изд-во ВолгГТУ, 2024. - 81с.
44. Игнатьев А.В., Развитие метода конечных элементов в форме классического смешанного метода строительной механики [Текст]: диссертация ... доктора технических наук : 05.23.17 - Волгоград, 2019. - 294 с
45. Игнатьев, А. В. The mathematical modeling of the incomplete algebraic eigenvector and eigenvalue problem for obtaining the reduced frequency equation and its solution [Текст] / А. В. Игнатьев, В. А. Игнатьев // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. Vol. 456 : VII International Symposium Actual Problems of Computational Simulation in Civil Engineering (Novosibirsk, Russian Federation, 1-8 July, 2018) / Russian Academy of Architecture and Civil Engineering Sciences (RAACS). – [IOP Publishing], 2018. – URL : <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/456/1/012109/pdf>

46. Игнатьев, А. В. Моделирование неполной алгебраической проблемы собственных значений и векторов методом частотно-динамической конденсации на основе МКЭ в форме классического смешанного метода [Текст] / А. В. Игнатьев, А. В. Чумаков, В. В. Гилка // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. - 2019. - Т. 15, № 1. - С. 62-68.
47. Клаф, Р. Динамика сооружений [Текст] / Р. Клаф, Дж. Пензиен. – М.: Стройиздат, 1979. - 320 с.
48. Лантух-Лященко, А.И. Возможности дискретно-континуальной формы МКЭ в расчетах тонкостенных конструкций [Текст] // Строительная механика и расчет сооружений. -1985. №3. –с.60-62
49. Леонтьев, Н.Н. Аналитические и численные методы расчета прямоугольных пластинок [Текст] / Н.Н. Леонтьев, А.Н. Леонтьев, Д.Н. Соболев, В.И. Травуш - М.: МИСИ им. В.В. Куйбышева, 1986. - 86 с.
50. Леонтьев, Н.Н. К решению плоской задачи теории упругости вариационным методом Власова в матричной формулировке [Текст] // Изв. Вузов Строительство и архитектура. – 1970. -№1. С 68-74
51. Леонтьев, Н.Н. Обобщенный вариант вариационного метода Власова-канторовича и его применение для решения двумерной задачи теории пластин и оболочек [Текст] // Проблемы расчета пространственных конструкций. –М., 1980. С 65-78
52. Любинский, В.Ю. Численные исследования точности приближенных моделей суперэлементов [Текст] / Любинский В.Ю., Малачевский Л.Д. // Автоматиз. Проектиров. Объектов гражд. Стр-ва. –Киев, 1984. –с. 69-75
53. Макаров, А.В. Применение метода частотно-динамической конденсации для решения задач динамики в форме метода перемещений [Текст] // Актуальные проблемы прикладной математики. –Саратов. : Изд-во Саратовского ун-та, 1991.- С.208-213
54. Макаров, А.В. Решение неполной алгебраической проблемы собственных значений, записанной в форме метода перемещений [Текст] / А.В. Макаров, И.Г.

Макарова // Волгоградский инж.-строит. Ин-т.-Волгоград. 1992. – 19с. Деп. В ВИНТИ 04.03.92 №707-B92

55. Марчук, Г.И. Методы вычислительной математики [Текст]: учебное пособие / Г. И. Марчук. - Изд. 4-е, стер. - Санкт-Петербург [и др.] : Лань, 2009. - 608 с

56. Масленников, А. М. Расчет строительных конструкций методом конечных элементов [Текст] : учеб. пособие / А. М. Масленников. – Ленинград : Изд-во ЛГУ, 1977. - 78 с.

57. Масленников, А. М. Расчет строительных конструкций численными методами [Текст] / А. М. Масленников. – Ленинград : Изд-во ЛГУ, 1987. - 224 с.

58. Немчинов, Ю.И. Использование конденсации динамических переменных в методе пространственных конечных элементов [Текст] / Ю.И. Немчинов, А.А. Козырь // Строительная механика и расчет сооружений. -1985. №1. –с.10-13

59. Перельмутер, А.В. Расчетные модели сооружений и возможности их анализа [Текст] / А.В. Перельмутер, В.И. Сливкер – Киев: Сталь, 2002. – 445 с.

60. Писсанецки, С. Технология разреженных матриц [Текст] / С. Писсанецки; Перевод с англ. Х. Д. Икрамова, И. Е. Капорина; Под ред. Х. Д. Икрамова. - Москва : Мир, 1988. - 411 с

61. Постнов, В.А. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций [Текст] / В. А. Постнов, И. Я. Хархурим. - Ленинград : Судостроение, 1974. - 344 с.

62. Постнов, В.А. Метод суперэлементов в расчетах инженерных сооружений [Текст] / В.А. Постнов, С.А. Дмитриев, Б.К. Елтышев, А.А. Родионов. Л.: Судостроение, 1979. – 288 с.

63. Постнов, В. А. Численные методы расчёта судовых конструкций [Текст] / В. А. Постнов. – Ленинград : Судостроение, 1977. - 280 с.

64. Пржеминичский, Е.С. Матричный метод исследования конструкций на основе анализа подструктур [Текст] // Ракетная техника и космонавтика, 1963, т. 1 – с. 165-174

65. Репях, В.В. Применение одного варианта метода суперэлементов к решению плоской задачи теории упругости [Текст] // Вычислительная математика и математическая физика. -1986. Том.26, №11. –с. 1643-1653
66. Самарский, А.А. Методы решения сеточных уравнений [Текст] / А.А. Самарский, Е.С. Николаев – М.: Наука, 1978.– 592 с.
67. Сапожников, А.И. Методы суперэлементов в статике и динамике панельных зданий [Текст] // Изв. Вузов Строительство и архитектура, 1980, №9. –с. 33-37
68. Тьюарсон, Р. Разреженные матрицы [Текст] / Р. Тьюарсон ; Пер. с англ. Э.М. Пейсаховича ; Под ред. Х.Д. Икрамова. - Москва : Мир, 1977. - 189 с
69. Тимошенко, С.П. Пластинки и оболочки [Текст] / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер ; Пер. с англ. В. И. Контовта ; Под ред. Г. С. Шапиро. - [2-е изд., перераб.]. - Москва : Физматгиз, 1963. - 635 с
70. Уилкинсон, Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений [Текст] / пер. с англ. В. В. Воеводина и В. Н. Фаддеевой. - Москва : Наука, 1970. - 564 с
71. Фаддеев, Д.К. Вычислительные методы линейной алгебры [Текст] / Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева. - Москва : Физматгиз, 1960. - 656 с.
72. Федоренко, Р.П. Введение в вычислительную физику [Текст]: учеб. пособие для вузов по направлениям "Математика", "Физика", спец. "Математика", "Прикл. математика", "Физика" / Р. П. Федоренко. - Москва : Изд-во Моск. физ.-техн. ин-та, 1994. - 526 с.
73. Фиалко, С.Ю. Прямые методы решения систем линейных уравнений в современных МКЭ-комплексах [Текст] / С. Ю. Фиалко. - Москва : Изд-во СКАД СОФТ, 2009. – 159с.
74. Фиалко, С.Ю. Агрегатный многоуровневый метод решения конечно-элементных задач строительной механики [Текст]: Автореф. дис. на соиск. уч. степ. докт. техн. наук: 05.23.17. –Киев: Киевский национальный университет строительства и архитектуры, 2004. – 36 с.
75. Фиалко, С.Ю. Агрегатный многоуровневый метод конечных элементов для анализа больших задач – моделей строительных зданий и сооружений [Текст] // Вісник Одеського національного морського університету, 10, 2003, с. 112 -118.

76. Харті, В Динамический анализ конструкций, основанный на исследовании форм колебаний отдельных элементов [Текст] // Ракетная техника и космонавтика. 1965. Т. 3. №4. С. 132-138.
77. Шапошников, Н.Н. Применение метода последовательного удвоения суперэлемента для расчета осесимметричных конструкций на действие статических нагрузок [Текст] / Н.Н. Шапошников, В.В. Юдин // МИИГ.-М., 1983.- 22с.
78. Batalov, M. On Parallel Multigrid Methods for Solving Systems of Linear Algebraic Equations [Text] / M. Batalov, Y. Gurieva, V. Ilyin, A. Petukhov // Communications in Computer and Information Science. 2023. Pp. 93-109. 10.1007/978-3-031-38864-4_7.
79. Bathe, K.-J. Finite Element Procedures [Text] / K. J. Bathe // Prentice Hall, Englewood Cliffs. - 1996. 1036 P.
80. Benfield, W.A. Vibration analysis of structures by component mode substitution [Text] / W.A. Benfield, R.F. Hrudá // AIAA J. 1971. 9. – p. 1255
81. Benzi, M. A robust incomplete factorization preconditioner for positive definite matrices [Text] / M. Benzi, M. Tuma // Numer Linear Algebra Appl. - 2001. - Vol. 99. - P. 1-20.
82. Bertolini, A.F. Review of eigensolution procedures for linear dynamic finite element analysis [Text] // Transactions of the ASME. Appl. Mech. Vol. 51. 1998. № 2.
83. Bitoulas, N. An optimized computer implementation of the incomplete Choleski factorization [Text] / N. Bitoulas, M. Papadrakakis // Comput. Systems Engrg., 1994, №5(3), pp. 265-274.
84. Bitzarakis, S. Parallel solution techniques in computational structural mechanics [Text] / S. Bitzarakis, M. Papadrakakis, A. Kotsopoulos // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 1997, №148, pp. 75-104.
85. Bourquin, F. Analysis and comparison of several component mode synthesis methods on one dimensional domains [Text] / F. Bourquin // Numer Math. - 1990. - Vol. 58 (1). - P. 11–33.

86. Burova, I. Local Interpolation Splines and Solution of Integro-Differential Equations of Mechanic's Problems [Text] / WSEAS TRANSACTIONS ON APPLIED AND THEORETICAL MECHANICS. 2022. DOI: 10.37394/232011.2022.17.14.
87. Burova, I. Solution of Integral Equations Using Local Splines of the Second Order [Text] / I. Burova, G. Alcybeev // WSEAS TRANSACTIONS ON APPLIED AND THEORETICAL MECHANICS. 2022. DOI: 10.37394/232011.2022.17.31.
88. Chen, Q. HIFIR: Hybrid Incomplete Factorization with Iterative Refinement for Preconditioning Ill-conditioned and Singular Systems [Text] / Q. Chen, X. Jiao / ACM Transactions on Mathematical Software. 2022. DOI: 10.48550/arXiv.2106.09877.
89. Cheung, Y.K. Finite Strip Method in Structural Analysis [Text] / – Oxford etc. : Pergamon press, 1976. - 233 p.
90. Cheung, Y.K. The finite strip method in the analysis of elastic plates with two opposite simply supported ends [Text] // Proc. Inst. Civ. Eng. 1968. Vol.40 P.1-7
91. Cheung, Y.K. Static analysis of right box girder bridges by spline finite strip method [Text] / Y.K. Cheung, S.C. Fan // Proc. Inst. Civ. Eng.m Part 2, 1983, 75, 311-323
92. Cheung, Y.K. Free vibration and static analysis of general plate by spline finite strip [Text] / Y.K. Cheung, L.G. Tham, W.Y. Li // Computational Mechanics 3, 187–197 (1988). <https://doi.org/10.1007/BF00297445>
93. Chowdhury, P.S. An alternative to the normal mode method [Text] // J. Computand Struct. 1975. Vol. 5. №5 – 6. P. 315
94. Collier, W A Comparison of Time Domain Seismic Analysis Methods for Offshore Wind Turbine Structures: Superelement Approach Versus Integrated Approach [Text] / W. Collier, L. Alblas, J. Wu // IOWTC2021-3552.
95. Dinh-Cong, Du A comparative study of different dynamic condensation techniques applied to multi-damage identification of FGM and FG-CNTRC plates [Text] / DU Dinh-Cong, Tan Truong-Thi, T. Nguyen-Thou // Engineering with Computers. 38. 1-25. 10.1007/s00366-021- 01312-y.

96. Egeland, O. SESAM-69-A general purpose finite element method program [Text] / O. Egeland, Per O. Araldsen // Computers & Structures, Volume 4, Issue 1, 1974, P. 41-68
97. Ericsson, T. The spectral transformation Lanczos method for the numerical solution of large sparse generalize symmetric eigenvalue problem [Text] / T. Ericsson, A. Ruhe // Math. Comput. 1980, №35, pp. 1251-1268.
98. Falk, S. Das Jacobische Rotationsverfahren fur Reellsymmetrische Matrizenpaare Elektronische Datenverarbeitung [Text] / S. Falk, P. Langemeyen. – 1960. S.30-34.
99. Fan, S.C. Analysis of shallow shells by spline finite strip method [Text] / S.C. Fan, Y.K. Cheung // Engineering Structures, October 1983, n. 4, v. 5. – pp. 255-263
100. Fialko, S. Aggregation Multilevel Iterative Solver for Analysis of Large-Scale Finite Element Problems of Structural Mechanics: Linear Statics and Natural Vibrations [Text] // LNCS 2328, pp. 663.
101. Fialko, S. High-performance iterative and sparse direct solvers in Robot software for static and dynamic analysis of large-scale structures [Text] // Proceedings of the second European conference on computational mechanics. Cracow, Poland, June 26-29, 2001, pp. 18.
102. Fialko, S.Yu. High-performance aggregation element-by-element iterative solver for largescale complex shell structure problems [Text] // Archives of Civil Engineering, XLV, 2, 1999. P.193-207.
103. Fialko, S. High-performance aggregation element-by-element Ritz-gradient method for structure dynamic response analysis [Text] // CAMES, 2000, №7, pp. 537-550
104. Fialko, S.Yu A block Lanczos method with spectral transformations for natural vibrations and seismic analysis of large structures in SCAD software [Text] / S. Yu Fialko, E.Z. Kriksunov, V.S. Karpilovsky // CMM-2003 – Computer Methods in Mechanics June 3-6, 2003, Gliwice, Poland. Pp.129-130
105. Fialko, S.Yu. About analysis of large problems of structural mechanics on multi-core computers [Text] // Magazine of Civil Engineering. 2013. 40(4). Pp. 116–124. (rus). DOI: 10.5862/MCE.40.13.

106. Forsythe, G. E. The cyclic Jacobi method for computing the principal values of a complex matrix [Text] / G.E. Forsythe, P. Henrici // Transactions of the American Mathematical Society. -1960 Vol.94, - P. 1-23.
107. Galanin, M.P. Substantiation of the finite superelement method [Text] / M.P. Galanin, E. Savenkov // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2003. 43. – p. 680-695.
108. Guyan, R. J. Reduction of Stiffness and Mass Matrices [Text] / R. J. Guyan // AIAA Journal. - 1965. - Vol. 3, No. 2. - P. 380.
109. Givens, S.W. Method of Computing eigenvalues and eigenvectors suggested by classical results on Symmetric matrices [Text] // National bureau of standards applied mathematics series 29, Government printing office-Washington, D.C., L.953. P.1 17-122.
110. Grimes, R.G. A shifted block Lanczos algorithm for solving sparse symmetric generalized eigenproblems [Text] / R.G. Grimes, J.G. Lewis, H.D. Simon // SIAM J. Matrix Anal. Appl., 1994, V.15, 1: pp. 1-45
111. Gupta, K.K. Vibration of frames and other structures with banded stiffness matrix [Text] // Int. J. of numerical methods in engineering. 1970. Vol. 2. P. 221-228.
112. Gupta, K.K. Solution of eigenvalue problems by the Sturm sequence method [Text] // Int. J. of numerical methods in engineering. 1972. Vol.4. P. 379-404.
113. Han, J.-G. A spline wavelet finite-element method in structural mechanics [Text] / J.-G. Han, W.-X. Ren, Y. Huang // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2006. DOI: 10.1002/nme.1551.
114. Huang, S. Superelement Method Based Structure Simulation of Large Pallet Structure [Text] / S. Huang, P. Li // 2010 2nd International Conference on Computer Engineering and Applications, ICCEA 2010. 1. 92 - 95. 10.1109/ICCEA.2010.25.
115. Hughes, T.J.R. Large-scale vectorized implicit calculations in solid mechanics on CRAY X-MP/48 utilizing EBE preconditioned conjugate gradients [Text] / T.J.R. Hughes, R.M. Ferencz, J.O. Hallquist // Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg., 1987, 61, pp. 215-248.

116. Hughes, T.J.R. The finite element method [Text] // Reprint. Originally published: Englewood Cliffs, N.J. : Prentice-Hall, 1987. – 682 p.
117. Irons B. A frontal solution of program for finite element analysis [Text] // Int. J. Numer. Meth. Engrg., 1970, 2, pp. 5-32. doi:10.1002/nme.1620020104
118. Kumari, R. Topical Advancements in Various Spline Techniques for Boundary Value Problems [Text] // International journal for research in applied science and engineering technology. 2017. v.5
119. Kwon, Hee-Dae Efficient Parallel Implementations of Finite Element Methods Based on the Conjugate Gradient Method [Text] // Applied Mathematics and Computation. 2003. - pp. 869-880. doi:. 10.1016/S0096-3003(03)00279-0.
120. Lee, D. Generalized polynomial chaos expansion by reanalysis using static condensation based on substructuring [Text] / D. Lee, S. Chang, J .Lee // Applied Mathematics and Mechanics. 45. 2024. – pp. 819-836. doi: 10.1007/s10483-024-3108-8.
121. Li, W.Y. Spline finite strip analysis of general plates [Text] / W.Y. Li, Y.K. Cheung, L.G. Tham // ASCE J. Eng. Mech. 112/1. 1986. pp. 43–54
122. Manolis, P. An efficient superelement-by-superelement method for large finite element computations [Text] / P. Manolis, N. Bitoulas, K. Hatjikonstantinou // Computing Systems in Engineering. 1991. DOI: 10.1016/0956-0521(91)90055-A.
123. Marín, J. Balanced incomplete factorization preconditioner with pivoting. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas [Text] / J. Marín, J. Mas // Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A, Matemáticas 117(1). 2022. DOI: 10.1007/s13398-022-01334-1.
124. Mohan, S.C. Two Stage SEREP Method for Condensation of Space Frame Structure for Dynamic Analysis [Text] / S.C. Mohan, N. Panwar, AjayC.B. Maniteja // ASPS Conference Proceedings. 1. – pp. 1087-1094. doi:10.38208/acp.v1.625.
125. Mokryakov, V. Numerical simulation of functionally graded plane elastic medium by finite superelement method [Text] // AIP Conference Proceedings. 2018. doi: 10.1063/1.5019038.

126. Nagibovich, A. Superelement simulation of dynamic characteristics of large-size combined systems «Foundation –reinforced concrete structures – metal structures» [Text] // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 698(2): 022063. 2019. doi:10.1088/1757-899X/698/2/022063.
127. Octega, J. The LLT and QR methods for symmetric tridiagonal matrices [Text] / J. Octega, H. Kaiser // Computer Journal. 1963. Vol. 6. P. 99-101.
128. Papadrakakis, M. Solving large-scale problems in mechanics [Text] // Wiley; 1st edition. 1993. – 488p.
129. Parlett, B.N. The Symmetric Eigenvalue Problem [Text] / B. N. Parlett/ // 2nd ed., SIAM. - Philadelphia, 1997.
130. Pearson, J. Preconditioners for Krylov subspace methods [Text]: An overview / J. Pearson, J. Pestana // GAMM-Mitteilungen. 2020;43:e202000015. <https://doi.org/10.1002/gamm.202000015>
131. Rutishauser, H. Computational Aspects of F.L. Bauer's Simultaneous Iteration Method [Text] // Numerische Mathematik. 1969. V. 13. P.4-13
132. Scott, J. Algorithms for Sparse Linear Systems [Text] / J. Scott, M. Tũma // Cham: Springer International Publishing, 2023. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-25820-6>
133. Scott, J. Sparse LU Factorizations [Text] / J. Scott, M. Tũma // Algorithms for Sparse Linear Systems. 2023. – pp. 89-111. doi: 10.1007/978-3-031-25820-6_6.
134. Shamloofard, M. Development of a shell superelement for large deformation and free vibration analysis of composite spherical shells [Text] / M. Shamloofard, A. Hosseinzadeh, M. Movahhedy // Engineering with Computers. 37. 10.1007/s00366-020-01015-w.
135. Tsybenko, A Numerical method for determining stiffness characteristics of an arbitrary form superelement [Text] / A. Tsybenko, A. Konyukhov, H. Tsybenko // Appl Comput Syst 18(1). 2015. <https://doi.org/10.1515/acss-2015-0019>
136. Wang, H. A Sparse Reconstruction Algorithm Based on Constrained Inhomogeneous Grid Optimization [Text] / H. Wang, F.A. Wang // Circuits Systems and Signal Processing. 2023. – pp. 1-27. DOI: 10.1007/s00034-023-02333-2.

137. Wang, X. Application of the Substructure Method in Direct Calculation of Hull Structures [Text] / X. Wang, J. Li, Z. Zhang // Journal of Physics: Conference Series. 2566. 012049. 10.1088/1742-6596/2566/1/012049.
138. Wilson, E.L. Three dimensional dynamic analysis of structures. Computers and Structures [Text] // Inc..Berkeley, California, USA, 1996.
139. Wilson, E.L. The static condensation algorithm [Text] // Int. J. Num. Meths. Eng. 1974. 8. P. 198-203.
140. Yamada, K. Substructure elimination method for evaluating bending vibration of beams [Text] / K. Yamada, J. Ji // Mechanical Engineering Journal. 10. 10.1299/mej.23-00293.
141. Yang, H.Y. Finite strip method with X-spline functions [Text] / H.Y. Yang, K.P. Chong // Computers & Structures, Volume 18, Issue 1. 1984. pp. 127-132
142. Zu-Qing Qu. Model Order Reduction Techniques with Applications in Finite Element Analysis [Text] / Qu Zu-Qing // Springer Publications, 2004. – 369 p.

Приложение А. Свидетельства о регистрации программ для ЭВМ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО
о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2023661448

**Статический расчет тонких изгибаемых пластин по
МКЭ в форме КСМ**

Правообладатели: **Игнатъев Александр Владимирович (RU),
Завьялов Иван Сергеевич (RU)**

Авторы: **Игнатъев Александр Владимирович (RU), Завьялов
Иван Сергеевич (RU)**



Заявка № **2023619332**
Дата поступления **04 мая 2023 г.**
Дата государственной регистрации
в Реестре программ для ЭВМ **31 мая 2023 г.**

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Ю.С. Зубов

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
Сертификат 423b6a04c3853354ba19d183b73b4aa7
Владелец: **Зубов Юрий Сергеевич**
Действителен с 10.03.2023 по 02.08.2024

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2024683046

Статический расчет тонких изгибаемых пластин по МКЭ в форме КСМ (СТАР ТИП МКЭ КСМ)

Правообладатель: **Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Волгоградский государственный технический университет» (RU)**

Авторы: **Игнатъев Александр Владимирович (RU), Бочков Максим Иванович (RU), Завьялов Иван Сергеевич (RU), Куцаев Сергей Николаевич (RU)**



Заявка № 2024682779

Дата поступления **04 октября 2024 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ **04 октября 2024 г.**

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

документ подписан электронной подписью
Сертификат: 0092e7d067006f5542640970f0e0a2706
Владелец: **Зубов Юрий Сергеевич**
Действителен с: 10.10.2024 по 03.10.2025

Ю.С. Зубов

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2024683048

Динамический расчет тонких изгибаемых пластин по МКЭ в форме КСМ (ДР ТИП МКЭ КСМ)

Правообладатель: **Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Волгоградский государственный технический университет» (RU)**

Авторы: **Игнатъев Александр Владимирович (RU), Бочков Максим Иванович (RU), Завьялов Иван Сергеевич (RU), Куцаев Сергей Николаевич (RU)**

Заявка № 2024682794

Дата поступления **04 октября 2024 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ **04 октября 2024 г.**



Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

документ подписан электронной подписью
Сертификат: 3092e76106100085402401670100027008
Владелец: **Зубов Юрий Сергеевич**
Действителен с 10.07.2014 по 03.10.2025

Ю.С. Зубов

Приложение Б. Акт о внедрении результатов диссертационной работы

Первый проректор –
директор ИАиС ВолгГТУ
доктор технических наук, доцент
О.В. Душко
2025 г.



АКТ

о внедрении результатов научных исследований,
полученных в диссертации Завьялова Ивана Сергеевича
«Совершенствование редуционных алгоритмов расчета пластин
при статических и динамических воздействиях с помощью МКЭ
в форме классического смешанного метода»

Результаты диссертационной работы И.С. Завьялова
«Совершенствование редуционных алгоритмов расчета пластин при
статических и динамических воздействиях с помощью МКЭ в форме
классического смешанного метода» внедрены в учебный процесс института
архитектуры и строительства ФГБОУ ВО «Волгоградский государственный
технический университет».

Разработанные И.С. Завьяловым алгоритмы и решённые им в
диссертационном исследовании задачи используются при изучении
дисциплин обучающимися факультета строительства и жилищно-
коммунального хозяйства ИАиС ВолгГТУ в рамках следующих
образовательных программ высшего образования:

08.04.01 Строительство (Промышленное и гражданское строительство:
проектирование): «Методы механики деформируемого твёрдого тела в
расчётах строительных конструкций»;

08.05.01 Строительство уникальных зданий и сооружений
(Строительство высотных и большепролетных зданий и сооружений):
«Теория расчета пластин и оболочек».

Заместитель директора
ИАиС ВолгГТУ по учебной работе

Е.А. Захаров