

На правах рукописи



Завьялов Иван Сергеевич

**СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ РЕДУКЦИОННЫХ АЛГОРИТМОВ РАСЧЕТА
ПЛАСТИН ПРИ СТАТИЧЕСКИХ И ДИНАМИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ
С ПОМОЩЬЮ МКЭ В ФОРМЕ КЛАССИЧЕСКОГО СМЕШАННОГО
МЕТОДА**

2.1.9. Строительная механика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата технических наук

Волгоград – 2025

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Волгоградский государственный технический университет»

**Научный
руководитель:**

Игнатъев Александр Владимирович – доктор технических наук, доцент, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Волгоградский государственный технический университет», кафедра «Цифровые технологии в урбанистике, архитектуре и строительстве», профессор

**Официальные
оппоненты:**

Тюкалов Юрий Яковлевич – доктор технических наук, доцент, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Вятский государственный университет», кафедра «Строительные конструкции и машины», профессор

Джабраилов Арсен Шахнавазович – кандидат технических наук, доцент, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования Волгоградский государственный аграрный университет», кафедра «Высшая математика», доцент

**Ведущая
организация:**

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет»

Защита состоится «03» июня 2025 года в 10:00 часов на заседании диссертационного совета 24.2.282.05, созданного на базе ФГБОУ ВО «Волгоградский государственный технический университет» по адресу: 400074, г. Волгоград, ул. Академическая, 1, ауд. Б-203.

С диссертацией можно ознакомиться в информационно-библиотечном центре ФГБОУ ВО «Волгоградский государственный технический университет» и на официальном сайте <https://www.vstu.ru>.

Автореферат разослан «___» _____ 2025 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета



Корниенко Сергей
Валерьевич

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Расчет конструкций современных зданий и сооружений с использованием метода конечных элементов (МКЭ) неизбежно приводит к решению систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). В последнее время наблюдается устойчивая тенденция к увеличению количества неизвестных в расчетных моделях МКЭ. Это ведет к росту размерности систем уравнений и, как следствие, к ресурсоемким вычислениям, что требует применения специализированных алгоритмов и высокопроизводительных вычислительных систем.

Сложность решения задач усугубляется тем, что матрицы коэффициентов часто сильно разрежены. Это вызвано наличием конечных элементов с различной жесткостью, стыковкой различных типов элементов и другими факторами. В условиях плохо обусловленных систем традиционные методы решения СЛАУ оказываются крайне неэффективными, что может привести к медленной сходимости решения и значительно увеличить время расчета, делая его непрактичным.

Важно также отметить, что в рамках одного проекта задачи могут решаться многократно. Например, это может касаться оценки прочности конструкции под разными нагрузками, анализа поведения конструкции при изменении геометрических параметров или динамических нагрузок и т.д.

Следует также отметить, что решение задач динамики конструкций также связано со значительным возрастанием вычислительной сложности. Исследование динамических характеристик конструкций требует применения адекватного математического аппарата, в частности, эффективных алгоритмов решения задачи на собственные значения (СЗ) и соответствующие им собственные вектора (СВ).

Традиционные методы решения СЛАУ в таких случаях оказываются неэффективными. Поэтому существует острая необходимость разработки и внедрения в расчетные программные комплексы высокоэффективных алгоритмов решения систем уравнений МКЭ высоких порядков.

Степень разработанности проблемы. Вопросами разработки методов решения больших задач, возникающих при моделировании зданий и сооружений, занимались многие отечественные и зарубежные исследователи. К настоящему времени наметились и используются несколько групп решений или обхода данной проблемы.

В развитие методов, связанных с непосредственным решением больших СЛАУ, которые включают в себя различные варианты упорядочения и преобразования матрицы коэффициентов, а также использование итерационных процедур, большой вклад внесли С.Ю. Фиалко, Д.К. Фаддеев, В.Н. Фаддеева, Г.И. Марчук, А.А. Самарский, А.Б. Золотов, В.В. Фрадкин, Benzi M., Tuma M., Scott J., Chen Q.

Разработке физических моделей сложных конструкций с поэтапным переходом от простой модели к более сложной посвящены работы таких авторов, как И.С. Пржеминичкий, Г. Крон, Н.Н. Шапошников, В.А. Постнов, И.Я.

Хархурим, В.А. Игнатъев, О.М. Игнатъева, А.И. Сапожников, Ю.И. Немчинов, Л.А. Розин, Г.И. Пшеничников.

При решении проблемы СЗ традиционные итерационные методы оказываются неэффективными. Одним из способов решения данной проблемы является использование редуцированных и конденсационных методов.

Анализ методов и алгоритмов решения задачи определения СЗ и СВ изложены в работах Зу-Квинг-Ку (Zu-Qing Qu), Дж. Х. Уилкинсона и А. Ф. Бертолини.

В работах К. Бате, Е. Вилсон, А. Дженнингс предложена идея о разделении всех алгоритмов решения проблемы собственных значений на четыре большие группы:

- метод обратных итераций;
- методы преобразования исходных матриц, основанные на свойстве ортогональности векторов;
- методы, использующие свойство последовательности Штурма обобщённой собственной проблемы;
- методы вычисления собственных значений с помощью характеристических полиномов.

Помимо этих применяются методы приведения исходной задачи высокого порядка к задаче существенно меньшей размерности (методы редукции). Среди наиболее значимых публикаций, посвященных этой теме, следует отметить работы С.Я. Землянухина, Я.Л. Нудельмана, Л.С. Ляховича, Р.Р. Матевосяна, Р. Гайана, В.И. Ивантеева, В.Д. Чубаня, Н.И. Гриненко, В.В. Мокеева, С.Ю. Фиалко.

Игнатъевым В.А. и Игнатъевой О.М. был разработан оптимизированный алгоритм частотно-динамической конденсации. Предлагаемый метод предполагает редукцию размерности системы посредством последовательного исключения вспомогательных степеней свободы, основываясь на определенных собственных значениях отдельных парциальных систем. Этот метод получил дальнейшее развитие в работах В.А. Игнатъева и А.В. Игнатъева.

В работе П.А. Акимова и М.Л. Мозгалевой проведен обзор современных методов решения СЛАУ, возникающих при решении задач строительной механики с применением МКЭ. Следует отметить, что этот обзор преимущественно посвящен анализу методов формирования и решения СЛАУ, возникающих при использовании МКЭ в форме метода перемещений.

При этом методы формирования и решения СЛАУ, связанные с применением смешанных и гибридных формулировок, до сих пор остаются мало изученными в рамках современной строительной механики. Учитывая растущий интерес к использованию смешанных и гибридных формулировок МКЭ, разработка алгоритмов редуцирования систем уравнений МКЭ высокого порядка, получаемых с использованием таких вариантов МКЭ при моделировании сложных конструкций, является актуальной проблемой.

Целью диссертационной работы является разработка и совершенствование алгоритмов редуцирования СЛАУ высокого порядка,

получаемых при расчете пластин на статическое и динамическое воздействие с использованием МКЭ в форме классического смешанного метода.

Задачи исследования:

1. Разработка базового алгоритма редукции СЛАУ, получаемых на основе МКЭ в форме классического смешанного метода (КСМ) при расчете пластин на статическое и динамическое воздействие.
2. Разработка специализированных и комбинированных алгоритмов редукции СЛАУ, получаемых на основе МКЭ в форме КСМ при расчете пластин на статическое и динамическое воздействие.
3. Разработка комплексного подхода к расчету плит на упругом основании с изменяющейся жесткостью, находящихся под статическими нагрузками, основанного на редукции основных неизвестных и методе компенсирующих нагрузок.
4. Анализ эффективности разработанных алгоритмов по сравнению с алгоритмами, реализующими подходы и методы других исследователей.

Методология и методы исследования

В диссертации использовались теория и основанные на ней методы строительной механики, общепринятые в ней гипотезы и допущения, методы линейной алгебры, результаты исследований по формированию и решению СЛАУ высокого порядка, а также результаты изучения методов решения алгебраической проблемы СЗ для таких СЛАУ. Вычисления производились с использованием современных ПЭВМ, пакета прикладных математических программ SciLab, и математических библиотек языка Python. Выполнялось сравнение результатов с решением в ПК ЛИРА.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Базовый алгоритм редукции СЛАУ, получаемых на основе МКЭ в форме КСМ при расчете пластин на статическое и динамическое воздействие, являющийся общей платформой для реализации специализированных частных алгоритмов расчета для каждого из видов нагрузок.
2. Специализированные частные и комплексные алгоритмы редукции СЛАУ, получаемых на основе МКЭ в форме КСМ при расчете пластин на статическое и динамическое воздействие.
3. Комплексный подход к расчету плит на упругом основании с изменяющейся жесткостью, находящихся под статическими нагрузками, основанного на редукции основных неизвестных и методе компенсирующих нагрузок.
4. Результаты сопоставительного анализа эффективности разработанных алгоритмов в сравнении с алгоритмами расчета пластин на статическое и динамическое воздействие, основанными на других подходах и методах.

Научная новизна полученных в диссертации результатов заключается в следующем:

1. Разработан и впервые предложен базовый алгоритм редуцирования СЛАУ, получаемых на основе МКЭ в форме КСМ при расчете пластин на статическое и

динамическое воздействие, в основе которого лежит идея интерполяции основных неизвестных.

2. На основе базового алгоритма разработаны специализированные частные алгоритмы редуцирования СЛАУ, получаемых при расчете пластин на статическое и динамическое воздействие на основе МКЭ в форме КСМ, в которых для интерполяции основных неизвестных используется билинейная интерполяция, или используется неполный бикубический полином.

3. Разработаны и впервые предложены комбинированные алгоритмы редуцирования частотных уравнений, сочетающие в себе преимущества алгоритма на основе интерполяции основных неизвестных и методов статической и последовательной частотно-динамической конденсации в форме классического смешанного метода.

4. Впервые на основе МКЭ в форме классического смешанного метода разработан комплексный подход к расчету плит на упругом основании с изменяющейся жесткостью, находящихся под статическими нагрузками, сочетающий преимущества разработанных редуцированных алгоритмов и метода компенсирующих нагрузок.

5. Доказана эффективность впервые разработанных редуцированных алгоритмов в расчетах изгибаемых пластин при статических и динамических нагрузках. Для ряда задач установлены количественные характеристики эффективности, заключающиеся в уменьшении порядка решаемой СЛАУ, приводящей к достоверному результату расчета.

Теоретическая значимость работы заключается в разработке и теоретическом обосновании новых алгоритмов редуцирования СЛАУ, получаемых на основе МКЭ в форме классического смешанного метода. Данные алгоритмы расширяют теоретические основы этой формы МКЭ для решения задач, связанных с расчетом пластин под статическими и динамическими нагрузками.

Практическая значимость работы состоит в том, что впервые разработанные в диссертации алгоритмы редуцирования СЛАУ могут быть использованы как для создания новых расчетных программ, так и для расширения уже существующих, реализующих МКЭ в форме КСМ. Разработанные программы могут быть рекомендованы для применения в проектных и научно-исследовательских организациях, а также материалы исследования могут быть включены в учебные пособия и учебники курса строительной механики для студентов и магистрантов по направлению «Строительство».

Соответствие диссертации паспорту научной специальности

Диссертационные исследования соответствуют паспорту специальности 2.1.9. Строительная механика: п. 4 (Численные и численно-аналитические методы расчета зданий, сооружений и их элементов на прочность, жесткость, устойчивость при статических, динамических, температурных нагрузках и других воздействиях).

Достоверность полученных результатов обеспечивается корректным использованием основных гипотез и допущений строительной механики, обоснованных численных методов решения СЛАУ и подтверждается сравнением

результатов решения задач с имеющимися аналитическим решением, принимаемым за точное, а также решениями, полученными другими методами.

Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на конференциях: 5 международная научно-практическая конференция «Актуальные проблемы и перспективы развития строительного комплекса» (Волгоград, 2023); XIII Международный научный форум молодых ученых, студентов и школьников «Потенциал интеллектуально-одаренной молодежи – развитию науки и образования» (Астрахань, 2024); Международная научно-техническая конференция «Строительство, архитектура и техносферная безопасность» (Сочи, 2023); Заседание секции строительной механики и надежности конструкций имени профессора Н. К. Снитко» (Санкт-Петербург, 2024); 59-я внутривузовская научная конференция (Волгоград, 2022); 60-я внутривузовская научная конференция (Волгоград, 2023); 61-я внутривузовская научная конференция (Волгоград, 2024).

Публикации. По материалам диссертации опубликовано 12 работ. Из них 7 статей в ведущих рецензируемых научных журналах и изданиях, 2 статьи в изданиях, индексируемых в международной наукометрической базе данных «Scopus», 3 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ.

Личный вклад автора состоит в разработке унифицированного алгоритма редуцирования СЛАУ, полученных на основе МКЭ в форме классического смешанного метода, который является базовой платформой для разработанных специализированных частных алгоритмов расчета пластин на статическое и динамическое воздействие, и специализированных частных алгоритмов, которые в свою очередь, отражают особенности применения различных вариантов аппроксимирующего полинома. В разработке и применении комплексного подхода к расчету плит на упругом основании с изменяющейся жесткостью, находящихся под статическими нагрузками, основанного на редукции основных неизвестных и методе компенсирующих нагрузок.

Структура и объём работы

Диссертация состоит из: введения, четырех глав, заключения, списка литературы (142 наименования источников) приложений (копии свидетельств о регистрации программ для ЭВМ и акта о внедрении результатов исследования в учебный процесс). Работа изложена на 164 страницах, содержит 65 рисунков и 17 таблиц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дано обоснование актуальности темы диссертации, сформулированы цели и задачи исследования, основные положения, приведена аннотация всех глав работы.

В первой главе выполнен краткий обзор работ по теории и методам редуцирования задач большой размерности, приводящих к СЛАУ высоких порядков.

Во второй главе рассматриваются алгоритмы редуцирования систем уравнений МКЭ в форме классического смешанного метода с использованием интерполяции основных неизвестных для статического расчета пластин.

Базовый алгоритм построения редуцированной системы уравнений, описывающей напряженно-деформированное состояние двумерной конструкции, основан на интерполяции основных неизвестных смешанного метода в узлах конечно-элементной сетки с мелкими ячейками через значения тех же неизвестных в узлах конечно-элементной сетки с крупными ячейками и состоит из нескольких этапов:

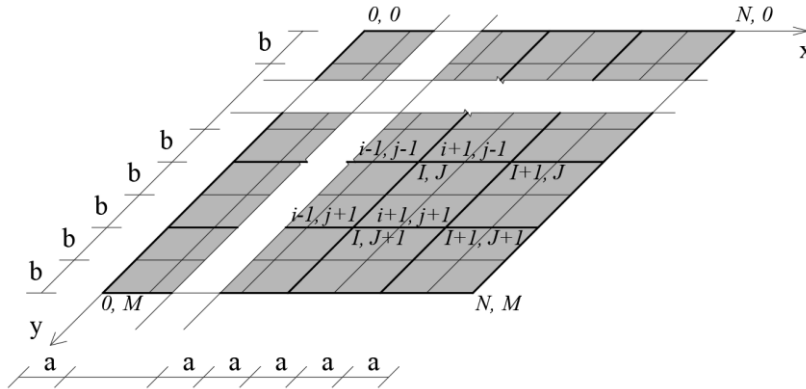


Рисунок 1. Конечно-элементная модель пластины с разбиением на две системы областей

1. Пластина разбивается на две системы конечных элементов (рисунок 1). С крупными ячейками и обозначением узлов I, J (главные узлы), и с мелкими ячейками и обозначением узлов i, j (второстепенные узлы).

2. Для каждого из разбиений составляется система разрешающих уравнений метода конечных элементов в форме классического смешанного метода (МКЭ в форме КСМ), представленная в виде (1).

$$[D] \begin{Bmatrix} q \\ \tilde{q} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_F \\ \Delta_F \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (1)$$

где $[D]$ - матрица откликов.

3. Выбирается интерполяционный полином, после чего находятся его коэффициенты, позволяющие выразить значения основных неизвестных смешанного метода во второстепенных узлах мелкой сетки через те же значения неизвестных в главных узлах.

4. Значения основных неизвестных смешанного метода в узлах мелкой сетки, выраженные через значения тех же узловых неизвестных крупной сетки, вводятся в систему уравнений МКЭ в форме КСМ для каждой из рассматриваемых областей конструкции. Глобальная система разрешающих уравнений записывается в виде (2).

$$\begin{bmatrix} r & \tilde{r} \\ \tilde{\delta} & \delta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q^* \\ \tilde{q}^* \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_F \\ \Delta_F \end{Bmatrix} = \{0\}. \quad (2)$$

5. Получившаяся редуцированная система уравнений решается любым из наиболее эффективных способов решения СЛАУ.

6. В обратном порядке вычисляются параметры, описывающие напряженно-деформированное состояние в конечных элементах рассматриваемой области.

7. На следующем этапе численного расчета выполняется уменьшение размеров ячейки сетки с узлами I, J .

На основе базового алгоритма были построены два алгоритма с использованием билинейной интерполяции (БЛ интерполяция) и интерполяции с использованием неполного бикубического полинома (НБКП интерполяция), выбираемых на 3-м шаге базового алгоритма.

Алгоритм №1

В данном алгоритме для установления связи между смешанными неизвестными во второстепенных и главных узлах используется билинейная интерполяция.

Алгоритм №2

В данном алгоритме для установления связи между смешанными неизвестными во второстепенных и главных узлах используется неполный бикубический полиномом (3).

$$w(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3. \quad (3)$$

Для оценки эффективности разработанных специализированных алгоритмов редуцирования основных неизвестных при расчете изгибаемых прямоугольных пластин на действие статических нагрузок, было выполнено решение ряда тестовых задач. Расчеты были выполнены по МКЭ в форме классического смешанного метода в трех вариантах: без редукиции основных неизвестных, и с использованием предложенных редукиционных алгоритмов с билинейной интерполяцией (БЛ интерполяция) и интерполяцией с использованием неполного бикубического полинома (НБКП интерполяция). Результаты расчета сравнивались с аналитическим решением, а также с результатами расчетов, полученных при решении этих задач, с использованием МКЭ в форме метода перемещений.

Пример 1 Исследовано напряженно-деформированное состояние пластины, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q и имеющей по контуру шарнирные опоры, препятствующие вертикальному смещению.

При расчете были приняты следующие исходные данные:

$$a=b=1\text{м}; h=0,0082\text{м}; \mu_x = \mu_y = 0,3; E=198 \text{ ГПа}; q=9,80665 \text{ кН/м}^2.$$

Расчеты, выполненные по МКЭ в форме классического смешанного метода без редукиции основных неизвестных, выполнены для разбиений 4x4, 6x6, 8x8, 10x10. При таких же разбиениях выполнялись расчеты в ПК ЛИРА.

При вычислениях с использованием предложенных редукиционных алгоритмов с применением билинейной интерполяции и интерполяции с использованием неполного бикубического полинома для редукиции использовались следующие комбинации мелких и крупных сеток:

- Мелкая сетка 8x8 → Крупная сетка 4x4 (обозначение: 4x4);
- Мелкая сетка 12x12 → Крупная сетка 6x6 (обозначение: 6x6);
- Мелкая сетка 16x16 → Крупная сетка 8x8 (обозначение: 8x8);
- Мелкая сетка 20x20 → Крупная сетка 10x10 (обозначение: 10x10).

Результаты выполненных численных расчетов представлены в таблице 1 (значения прогиба w в центральном узле $(a/2, b/2)$) и таблице 2 (значения изгибающих моментов $M_x = M_y$, в центральном узле $(a/2, b/2)$).

Таблица 1 – Численные значения прогиба w в центральном узле $(a/2, b/2)$

$w(a/2, b/2)$, мм					
Метод решения	КЭ-сетка				AP
	4x4	6x6	8x8	10x10	
КСМ МКЭ (без редуцирования СЛАУ)	4,125	4,111	4,09	4,08	4,06
КСМ МКЭ (БЛ интерполяция)	4,09	4,077	4,071	4,068	
КСМ МКЭ (НБКП интерполяция)	4,165	4,111	4,09	4,08	
МКЭ в форме метода перемещений	4,325	4,18	4,13	4,11	

Таблица 2 – Численные значения изгибающих моментов $M_x = M_y$, в центральном узле $(a/2, b/2)$

$M_x(a/2, b/2)$, кН·м					
Метод решения	КЭ-сетка				AP
	4x4	6x6	8x8	10x10	
КСМ МКЭ (без редуцирования СЛАУ)	0,4844	0,4756	0,4727	0,4717	0,4697
КСМ МКЭ (БЛ интерполяция)	0,4913	0,4786	0,4746	0,4727	
КСМ МКЭ (НБКП интерполяция)	0,4776	0,4737	0,4717	0,4707	
МКЭ в форме метода перемещений	0,4099	0,4433	0,4550	0,4599	

Анализ представленных результатов позволяет сделать следующие выводы:

Результаты, полученные с использованием билинейной интерполяции и интерполяции с использованием неполного бикубического полинома, демонстрируют близость численных значений расчетных величин (прогибы и изгибающие моменты).

Порядок редуцированной системы уравнений для сетки 4×4 составил $n = 27$, в то время как для полной системы без редукции (система на сетке 8×8) он равен $n = 147$. Это существенное снижение порядка системы подтверждает эффективность редуцированных алгоритмов.

Пример 2 Решена задача статического расчета жестко защемленной по контуру пластины, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивность q . Были приняты следующие исходные данные:

$$a=b=1\text{м}; h=0,0082\text{м}; \mu_x = \mu_y = 0,3; E=198\text{ ГПа}; q=9,80665\text{ кН/м}^2.$$

Расчеты выполнялись в вариантах, аналогичных примеру 1.

Результаты полученных выполненных расчетов представлены в таблице 3 (значения прогиба w в узлах сечения 2-2) и таблице 4 (значения изгибающих моментов M_x , в узлах сечения 2-2).

Таблица 3 – Численные значения прогибов узлов $w \cdot 10^3 \text{ м}$

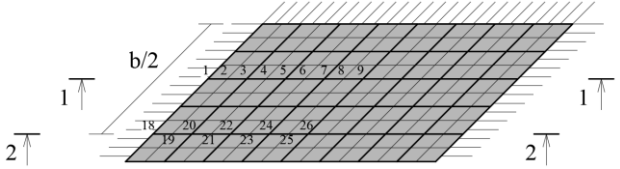
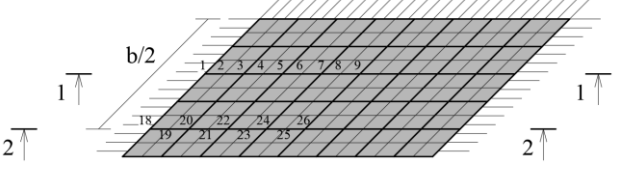
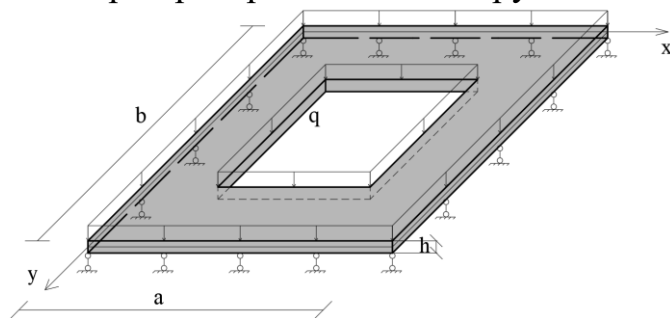
	Номер Узла								
	Сечение 2-2								
	18	19	20	21	22	23	24	25	26
Аналитическое решение	0	0,084	0,279	0,520	0,761	0,972	1,134	1,236	1,260
МКЭ в форме КСМ с учетом редукции (КЭ сетка 8x8)	0	0,146	0,291	0,543	0,795	0,991	1,186	1,257	1,328
МКЭ в форме КСМ без редукции (8x8)	0	-	0,293	-	0,800	-	1,193	-	1,336
МКЭ в форме КСМ без редукции (16x16)	0	0,085	0,282	0,526	0,769	0,983	1,147	1,249	1,284

Таблица 4 – Численные значения изгибающих моментов $M_x \cdot 10^2 \text{ кН} \cdot \text{м}$

	Номер Узла								
	Сечение 2-2								
	18	19	20	21	22	23	24	25	26
Аналитическое решение	-50,308	-26,890	-9,816	2,363	10,797	16,446	19,996	21,928	22,653
МКЭ в форме КСМ с учетом редукции (КЭ сетка 8x8)	-49,710	-29,155	-8,610	1,785	12,170	16,769	21,369	22,634	23,909
МКЭ в форме КСМ без редукции (8x8)	-49,386	-	-8,493	-	12,141	-	21,261	-	23,791
МКЭ в форме КСМ без редукции (16x16)	-50,112	-26,664	-9,552	2,628	11,072	16,711	20,251	22,183	22,800

Основываясь на анализе табличных данных, можно сделать вывод, что результат решения редуцированной системы уравнений, составленной относительно главных узлов, показал достаточную точность, сопоставимую с результатами, полученными при более густой сетке без процедуры редуцирования (например: редуцированная система 4x4 дает результат сопоставимый с 6x6 без редуцирования), т.е. применение алгоритма дает возможность к сокращению вычислительных ресурсов с обеспечением достаточной точности численных расчетов.

Пример 3 Выполнен расчет шарнирно опертой по контуру пластины с квадратным отверстием размером $\frac{1}{2}$ от ее габаритного размера, загруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивность q (рисунок 2).



Были приняты следующие исходные данные:

$$a=b=1\text{м}; h=0,0082\text{м}; \mu_x = \mu_y = 0,3;$$

$$E=198\text{ ГПа}; q=9,80665\text{ кН/м}^2$$

Результаты расчетов приведены в таблицах 5, 6.

Рисунок 2. Физическая модель шарнирно опертой по контуру пластинки с квадратным отверстием размером $\frac{1}{2}$ от ее габаритного размера

Таблица 5 – Численные значения прогибов узлов w , мм

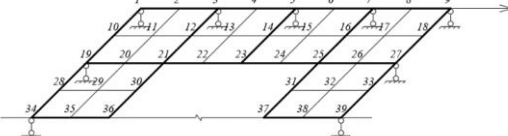
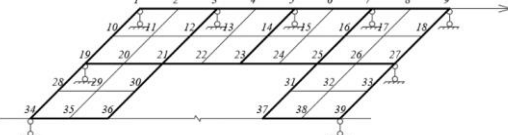
	КЭ сетка	Номер узла		
		21	23	25
		w , мм		
МКЭ в форме КСМ (без редуцирования СЛАУ)	4x4	2,5123	3,3945	2,5123
	8x8	2,3306	3,2371	2,3306
	16x16	2,3115	3,2083	2,3115
МКЭ в форме метода перемещений	4x4	2,2453	3,1526	2,2453
	8x8	2,2658	3,1738	2,2658
	16x16	2,285	3,1864	2,285
МКЭ в форме КСМ (БЛ интерполяция)	4x4	2,2381	3,1037	2,2381
МКЭ в форме КСМ (НБКП интерполяция)	4x4	2,3256	3,119	2,3256

Таблица 6 – Численные значения изгибающих моментов M_x кН·м

	КЭ сетка	Номер узла		
		21	23	25
		M_x , кН·м		
МКЭ в форме КСМ (без редуцирования СЛАУ) КЭ сетка 4x4	4x4	0,2913	0,1814	0,2913
	8x8	0,4021	0,2138	0,4021
	16x16	0,4952	0,2226	0,4952
МКЭ в перемещениях КЭ сетка 4x4	4x4	0,1069	0,1589	0,1069
	8x8	0,1471	0,2020	0,1471
	16x16	0,1971	0,2197	0,1971
МКЭ в форме КСМ (БЛ интерполяция)	4x4	0,3893	0,2265	0,3893
МКЭ в форме КСМ (НБКП интерполяция)	4x4	0,3648	0,2501	0,3648

Основываясь на анализе табличных данных, можно сделать вывод, что применение разработанных редукционных алгоритмов для численного расчета пластин с отверстиями позволяют получить приемлемую точность с использованием меньшего количества уравнений в конечно-элементной модели.

В третьей главе рассмотрен комплексный подход к расчету плит на упругом основании с изменяющейся жесткостью с использованием интерполяции основных неизвестных и метода компенсирующих нагрузок.

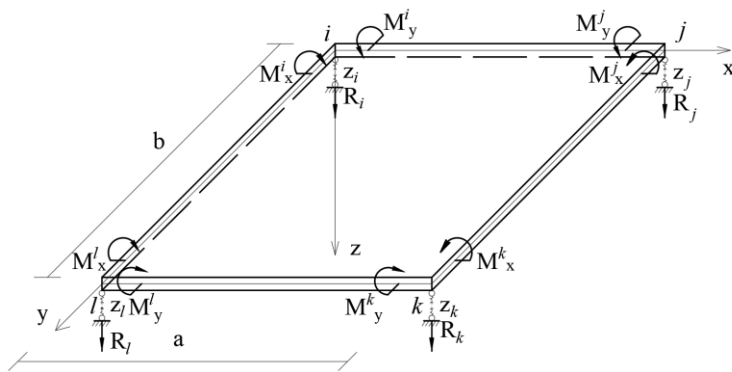


Рисунок 3 Основная схема пластинчатого КЭ на упруго-податливых опорах

Для моделирования упругого Винклеровского основания используется модифицированный пластинчатый конечный элемент, показанный на рисунке 3, в котором в качестве основных неизвестных приняты:

q_{IJ} – перемещение узла I, J по направлению работы упруго-податливой опоры;

$M_x^{IJ}(x, y)$ – изгибающий момент по направлению оси X ;

$M_y^{IJ}(x, y)$ – изгибающий момент по направлению оси Y ;

$R_{I,J}$ – реакция дискретной связи.

При этом для описания характеристик упруго-податливых связей используются диаграммы их работы, которые могут быть представлены в виде кусочных функций.

Приведем предлагаемый алгоритм расчета.

1. Конструкция разбивается на две системы: одну, содержащую главные узлы редукции, и вторую – второстепенные.

2. Для системы, включающей главные и второстепенные узлы, формируется система разрешающих уравнений. Необходимые уравнения включают как кинематические, так и силовые неизвестные.

3. Устанавливается связь между перемещениями и усилиями узлов i, j и I, J с помощью интерполяционного полинома (3). Вычисляются коэффициенты, интерполяционного полинома (3), позволяющие выразить значения основных неизвестных смешанного метода в узлах мелкой сетки через значения в узлах крупной сетки.

4. Значения основных неизвестных в узлах мелкой сетки вводятся в систему уравнений МКЭ в форме КСМ, формируя глобальную систему разрешающих уравнений.

5. Полученная редуцированная система уравнений решается одним из эффективных методов решения СЛАУ. При этом все упруго-податливые связи полагаются работающими линейно. Жесткость связей принимается равной её значению на участке $0 \leq \Delta^{(i)} \leq \Delta_0^{(i)}$ кусочной функции, описывающей значения перемещений в опорах, необходимых для определения величин реакций 1-го и последующих приближений. Решение, полученное на этом этапе, используется для расчета конструкции с учетом разупрочнения упругих односторонних опор.

где $\Delta^{(i)}$ – перемещение, возникающее в i -ой опоре

$\Delta_0^{(i)}$ – перемещение, при достижении которого работа опоры происходит по следующему участку кусочной функции.

6. В соответствии с алгоритмом, приведенным в работе М.И. Бочкова, итерационно определяется очередность изменения несущей способности упруго-податливых связей с изменяющейся жесткостью. При расчете систем с учетом разупрочняющихся опор в расчетной схеме по направлению таких опор вводятся нагрузки, компенсирующие изменение жесткости этих опор. Система уравнений дополняется вектором узловых компенсирующих нагрузок. Этот вектор определяется по алгоритмам, разработанным В.П. Алениным, и модифицированным для расчета с помощью МКЭ в форме КСМ М.И. Бочковым.

$$\begin{bmatrix} r & \tilde{r} \\ \tilde{\delta} & \delta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ \tilde{q} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} r_p \\ \delta_p \end{Bmatrix} + \{F\} = 0.$$

где $\{F\}$ – вектор компенсирующих нагрузок, приложенных в упруго-податливых опорах. Величина компенсирующей определяется выражением:

$$\Delta F_i^{(1)} = -C_0 \cdot y_i^{(1)},$$

где C_0 – коэффициент жесткости основания.

7. Производится расчет основной системы, загруженной компенсирующими нагрузками и внешней нагрузкой, в результате которого производится корректировка величины компенсирующих нагрузок.

8. Для выхода из алгоритма найденным значениям компенсирующих нагрузок на (j) и $(j+1)$ итерации необходимо выполнение условия:

$$\frac{F_{(j+1)} - F_{(j)}}{F_{(j+1)}} < \Delta_{огр},$$

где $F_{(j)}$ – величина компенсирующей нагрузки на (j) -й итерации;

$F_{(j+1)}$ – величина компенсирующей нагрузки на $(j+1)$ -й итерации;

$\Delta_{огр}$ – значение критерия выхода из итерационного цикла, задаваемое в момент начала расчета.

Пример 4. Для верификации предлагаемого алгоритма выполнен расчет фундаментной плиты габаритными размерами 12 x 12 м, изображенной на рисунке 4.

Жесткостные характеристики плиты: $h=0,3\text{м}$; $\mu_x = \mu_y = 0,2$; $E=30 \cdot 10^{-3} \text{ МПа}$.

При расчетах работа сваи в грунте была представлена как работа отдельно стоящей, упруго-податливой опоры.

Для описания характеристик этой опоры используются результаты испытания грунтов сваями статическими вдавливающими нагрузками, представленные в виде диаграммы, представленной на рисунке 5.

Эти результаты могут быть представлены в виде кусочной функции (4)

$$R^{(i)} = \begin{cases} 120570 \cdot \Delta^{(i)}, & 0 \leq \Delta^{(i)} \leq 0,35 \cdot 10^{-3}; \\ 23115 \cdot \Delta^{(i)} + 34,105, & 0,35 \cdot 10^{-3} < \Delta^{(i)} \leq 2,18 \cdot 10^{-3}; \\ 4788 \cdot \Delta^{(i)} + 74,015, & \Delta^{(i)} > 2,18 \cdot 10^{-3}. \end{cases} \quad (4)$$

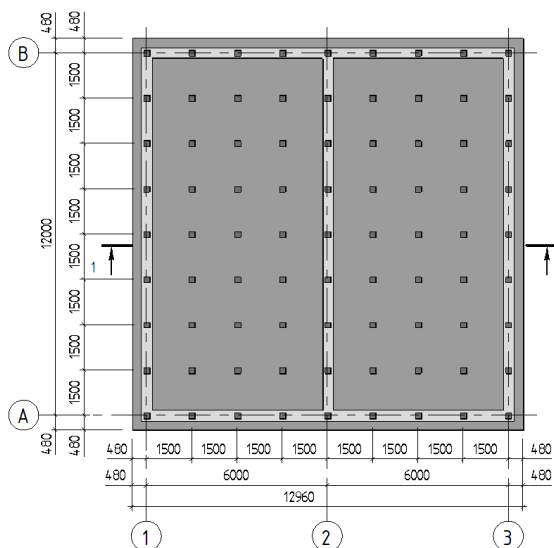


Рисунок 4 Фундаментная плита габаритными размерами 12x12 м

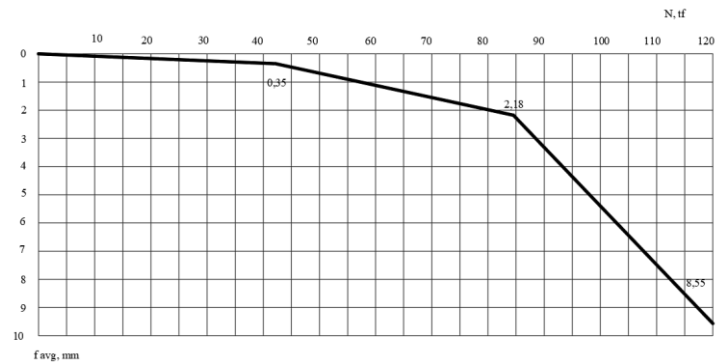


Рисунок 5. Диаграмма жесткости упруго-податливой опоры

Рассматривались два варианта нагружения этой плиты:

- равномерно распределенной нагрузкой $q = 39,2266 \text{ кН} / \text{м}^2$;
- с нагрузкой от стен, распределенной по её контуру и вдоль линии симметрии по оси Y.

Расчеты были выполнены в трех вариантах:

1. На основе МКЭ в форме КСМ с использованием метода компенсирующих нагрузок без редукции основных неизвестных при разбиении плиты конечно-элементной сеткой 16x16.

2. На основе МКЭ в форме КСМ с использованием метода компенсирующих нагрузок и редукцией основных неизвестных с использованием билинейной интерполяции, когда в качестве крупного разбиения используется КЭ-сетка 16x16, а мелкого 32x32.

3. На основе МКЭ в форме метода перемещений с использованием ПК ЛИРА с последовательным разбиением КЭ сетками 16х16, 32х32 и 64х64.

Результаты расчета фундаментной плиты загруженной равномерно распределенной нагрузкой $q = 39,2266 \text{ кН} / \text{м}^2$, приведены в таблице 7.

Таблица 7 – Численные значения прогибов w , изгибающих моментов M_x , M_y и реакций в опорах R , полученные при решении плиты на действие равномерно распределенной нагрузки

	МКЭ в КСМ	МКЭ в КСМ по редуцированной расчетной схеме	ПК ЛИРА САПР		
			16х16	32х32	64х64
<i>КЭ сетка</i>	16х16	16х16	16х16	32х32	64х64
$w(0,b/2)$, мм	-0,3916	-0,3916	-0,3797	-0,3795	-0,3793
$w(a/2,b/2)$, мм	-0,7640	-0,7639	-0,7632	-0,7632	-0,7631
$M_x(0,b/2)$, кН·м	0,000	0,000	7,540	4,883	3,152
$M_y(0,b/2)$, кН·м	-11,685	-11,676	1,003	-3,686	-10,009
$M_x(a/2,b/2)$, кН·м	-11,691	-12,065	-0,770	-5,233	-10,828
$M_y(a/2,b/2)$, кН·м	-11,691	-12,065	-0,770	-5,233	-10,828
$R(0,b/2)$, кН	-46,308	-46,308	-44,898	-44,869	-44,853
$R(a/2,b/2)$, кН	-90,332	-90,335	-90,235	-90,236	-90,231

Из таблицы видно, что результаты расчетов, выполненных МКЭ в форме классического смешанного метода, показывают близкие значения с данными, полученными в верифицированном программном комплексе (ПК ЛИРА). Это наблюдается при различных разбиениях плиты на конечные элементы — 16х16, 32х32 и 64х64.

При этом следует отметить, что результаты, полученные с использованием предлагаемого алгоритма, когда в качестве крупного разбиения используется КЭ-сетка 16х8, а мелкого 32х32, позволяет выявить, что даже с меньшим количеством элементов (16х16) можно достичь высокой точности численных расчетов. Это подчеркивает эффективность предложенного подхода.

Пример 5. При расчете фундаментной плиты с загрузкой по второму варианту, распределенная нагрузка от собственного веса стен и перекрытий, а также эксплуатационных нагрузок, приложенных к перекрытию, моделируется как линейно-распределенная нагрузка вдоль осей стен. Величина нагрузки составляет 176,52 кН/м вдоль центральной стены, параллельной оси Y и 88,26 кН/м вдоль крайних стен, параллельных оси Y . Для крайних стен, параллельных оси X , линейно-распределенная нагрузка составляет 29,42 кН/м. В рамках упрощенной расчетной схемы, распределенная нагрузка эквивалентно заменена сосредоточенными силами, приложенными в узлах расчетной модели вдоль линий, соответствующих расположению осей стен.

На первом этапе выполнен расчет без учета разупрочнения опор, когда в матрицу откликов в качестве жесткости упруго-податливой опоры входит жесткость свай, равной её значению на промежутке $0 \leq \Delta^{(i)} \leq 0,35 \cdot 10^{-3}$ функции (4).

Далее выполнен расчет с учетом нелинейной работы упруго-податливых связей, согласно предлагаемому алгоритму.

Так как, согласно результатам статических испытаний грунтов сваями, функция, описывающая её поведение имеет вид кусочной функции, состоит из трех промежутков, перебор был проведён в два этапа: на первом этапе произведён перебор всех связей, перемещение в которых соответствует условию $\Delta^{(i)} > 0,35 \cdot 10^{-3}$ на втором промежутке функции. На втором этапе произведён перебор всех связей, перемещение в которых соответствует условию $\Delta^{(i)} > 2,18 \cdot 10^{-3}$ на третьем промежутке функции.

Результаты этого расчета приведены в таблице 8.

Таблица 8 – Численные значения прогибов w , изгибающих моментов M_x , M_y и реакций в опорах R , полученные при решении плиты на действие нагрузки от стен без разупрочнения опор

	МКЭ в КСМ	МКЭ в КСМ по редуцированной расчетной схеме	ПК ЛИРА САПР		
			16x16	32x32	64x64
<i>КЭ сетка</i>	16x16	16x16	16x16	32x32	64x64
$w(0,b/2)$, мм	-0,9308	-0,9306	-0,9310	-0,9300	-0,9290
$w(a/2,b/2)$, мм	-1,0585	-1,0580	-1,0590	-1,0590	-1,0590
$M_x(0,b/2)$, кН·м	0,000	0,000	-5,560	-2,393	-0,049
$M_y(0,b/2)$, кН·м	-26,727	-26,878	-0,873	-10,228	-24,301
$M_x(a/2,b/2)$, кН·м	50,573	49,840	39,648	46,170	45,719
$M_y(a/2,b/2)$, кН·м	-2,138	-2,603	8,198	4,648	-1,608
$R(0,b/2)$, кН	-110,055	-110,030	-110,089	-109,962	-109,913
$R(a/2,b/2)$, кН	-125,151	-125,094	-125,162	-126,133	-125,172

Если выхода из алгоритма принять $\Delta_{огр} = 0.01$, то для решения задачи на первом этапе перебора потребуется 19 итераций, и 8 на втором этапе перебора.

Для расчета с учетом нелинейной работы упруго-податливых связей в верифицированном программном комплексе, основанном на МКЭ в форме метода перемещений, было задано 50 шагов разбиения нагрузки.

Результаты расчета приведены в таблице 9

Таблица 9 – Численные значения прогибов w , изгибающих моментов M_x , M_y и реакций в опорах R , полученные при решении плиты на действие нагрузки от стен с учетом нелинейной работы упруго-податливых связей

	МКЭ в КСМ	МКЭ в КСМ по редуцированной расчетной схеме	ПК ЛИРА САПР		
			16x16	32x32	64x64
<i>КЭ сетка</i>	16x16	16x16	16x16	32x32	64x64
$w(0,b/2)$, мм	-2,2620	-2,2700	-2,3360	-2,3520	-2,3500
$w(a/2,b/2)$, мм	-1,8870	-1,8870	-1,8500	-1,8720	-1,8790
$M_x(0,b/2)$, кН·м	0	0	-12,033	-5,668	-1,942
$M_y(0,b/2)$, кН·м	-22,065	-22,167	-4,992	-10,581	-20,604
$M_x(a/2,b/2)$, кН·м	78,885	78,483	58,399	68,882	71,814
$M_y(a/2,b/2)$, кН·м	5,727	5,433	7,581	7,296	4,227
$R(0,b/2)$, кН	-83,180	-83,425	-83,504	-83,582	-83,572
$R(a/2,b/2)$, кН	-75,354	-76,109	-76,453	-76,982	-77,149

Анализ полученных результатов показал, что учет нелинейной работы свай приводит к значительному увеличению перемещений, например, в центре рассматриваемой фундаментной плиты он изменился от -1,058 мм в линейном расчете до -1,887 мм в нелинейном. Моменты M_x в центре рассматриваемой конструкции изменились от 50,573 кН·м в линейном расчете до 78,885 кН·м в нелинейном, а момент M_y в центре плиты изменился от -2,138 кН·м до 5,727 кН·м, что указывает на существенное влияние нелинейной упруго-податливой работы свай на напряженно-деформированное состояние ростверка. При этом нагрузка на сваи значительно уменьшилась, что свидетельствует о более равномерном перераспределении нагрузки на совместно работающее и связанное ростверком свайное поле.

В четвертой главе рассматривается модификация базового алгоритма редуцирования систем конечно-элементных уравнений статического расчета двумерных конструкций, в основе которого заложена зависимость между неизвестными смешанного метода в узлах конечно-элементной сетки с мелкими ячейками через значения тех же неизвестных в узлах конечно-элементной сетки с крупными ячейками для его применения в формировании редуцированных систем частотных уравнений.

В этой модификации алгоритма помимо редуцирования матрицы откликов выполняется редуцирование матрицы масс, причем для её редуцирования, путем приведения масс к узлам крупной КЭ-сетки используется отдельная процедура.

Данный алгоритм позволяет эффективно редуцировать систему частотных уравнений МКЭ для задач динамики пластин.

При редуцировании матрицы масс возможно использование двух вариантов динамической матрицы масс:

1. **Согласованная матрица масс:** обеспечивает более точное описание динамического поведения конструкции, где масса распределена по всем степеням свободы редуцированной системы.

2. **Диагональная матрица масс:** упрощает вычисления, позволяя сосредоточиться на основном вкладе массы с минимальными затратами вычислительных ресурсов.

На основе базового алгоритма редуцирования частотных уравнений с использованием интерполяции основных неизвестных были построены два алгоритма с использованием билинейного и неполного бикубического интерполяционных полиномов, выбираемых на 3-м шаге базового алгоритма.

Алгоритм №1 Редуцирования частотных уравнений с использованием билинейной интерполяции

Алгоритм №2 Редуцирования частотных уравнений с использованием неполного бикубического полинома.

Комбинированные алгоритмы редуцирования частотных уравнений МКЭ в форме классического смешанного метода с использованием интерполяции основных неизвестных и конденсационных методов. Их суть заключается в следующем:

1) Сначала происходит редуцирование системы частотных уравнений путем использования интерполяции основных неизвестных.

2) Затем к полученной редуцированной системе частотных применяется один из конденсационных методов (метод статической конденсации, метод частотно-динамической конденсации, метод последовательной частотно-динамической конденсации).

С использованием предлагаемых алгоритмов были решены тестовые примеры.

Пример 6. В качестве задачи-теста выполнен динамический расчет квадратной пластины, опертой на шарнирные опоры по четырем сторонам (рисунок 6).

С использованием предложенных алгоритмов были исследованы СЗ и СВ при сгущении конечно-элементной сетки на действие постоянной нагрузки от собственного веса. При расчете были приняты следующие исходные данные:

$$a=b=1\text{м}; h=0,01\text{м}; \mu_x = \mu_y = 0,3; E=109,2 \text{ ГПа}; \rho = 2,5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

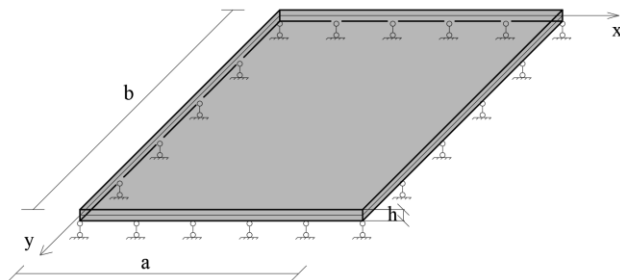


Рисунок 6. Физическая модель шарнирно опертой по контуру пластины

Расчет собственных частот (СЗ) и собственных форм колебаний (СВ) для этой пластины выполнен в следующих вариантах:

1. На основе МКЭ в форме КСМ без редуцирования исходной системы.

2. На основе МКЭ в форме КСМ с применением разработанного алгоритма редуцирования системы частотных уравнений, основанного на интерполяции основных неизвестных.

3. На основе МКЭ в форме КСМ с использованием конденсационных методов.

4. На основе МКЭ в форме КСМ с использованием разработанных комбинированных алгоритмов редуцирования системы частотных уравнений.

5. На основе МКЭ в форме метода перемещений с использованием ПК ЛИРА при использовании согласованной матрицы масс (СММ), диагональной матрицы масс (ДММ).

В таблице 10 представлены результаты вычисления собственных частот для нижней части спектра колебаний рассматриваемой пластины, полученные с использованием указанных расчетных методов. Также в таблице приведены данные аналитического решения, принимаемого за эталонное значение.

Таблица 10 – Численные значения частот собственных колебаний ω , полученные при расчете шарнирно опертой по контуру плиты

ω	КСМ 8x8 (ДММ)	КСМ 16X16→ 8x8 (ДММ)	КСМ 32X32→ 8x8 (ДММ)	СК 8X8	СК 16X16→ 8X8	СК 32X32→ 8X8	ЛИРА ССАПР8 x8 (ДММ)	ЛИРА САПР 8x8 (СММ)	А.Р.
1	62,740	62,785	62,897	61,563	61,607	61,619	61,747	61,752	62,832
2	155,648	155,794	155,839	152,650	152,796	152,842	153,565	153,680	157,080
3	155,648	155,794	155,839	152,650	152,796	152,842	153,565	153,680	157,080
4	240,627	241,118	241,288	236,357	236,871	237,047	240,864	241,379	251,320
5	308,803	308,968	309,054	304,295	304,485	304,578	306,183	307,247	314,159
6	308,803	308,968	309,054	304,295	304,485	304,578	306,183	307,247	314,159

Пример 7. В качестве задачи-теста выполнен динамический расчет квадратной жестко заземленной по контуру пластины (рисунок 7). На действие постоянной нагрузки от собственного веса была решена проблема СЗ и СВ с использованием предложенных алгоритмов. При расчете были приняты следующие исходные данные:

$$a=b=1\text{м}; h=0,01\text{м}; \mu_x = \mu_y = 0,3; E=109,2 \text{ ГПа}; \rho = 2,5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

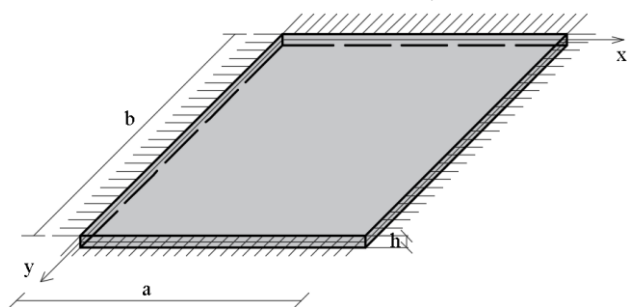


Рисунок 7. Физическая модель жестко заземленной по контуру пластины

Расчет собственных частот (СЗ) и собственных форм колебаний (СВ) для рассматриваемой пластины был выполнен в нескольких вариантах, аналогичных тем, которые использовались в примере 1.

В таблице 11 представлены результаты вычисления собственных частот для нижней части спектра колебаний рассматриваемой пластины, полученные с использованием указанных расчетных методов. Также в таблице приведены данные аналитического решения, принимаемого за эталонное значение для сравнения.

Таблица 11 – Численные значения частот собственных колебаний ω , полученные при расчете жестко заземленной по контуру плиты

ω	КСМ 8x8 (ДММ)	КСМ 16X16→8 x8 (ДММ)	СК 8X8	СК 16X16→8 X8	ЛИРА ССАПР8 x8 (ДММ)	ЛИРА САПР 8x8 (СММ)	А.Р.
1	113,265	113,583	111,026	111,243	111,794	111,844	113,091
2	228,597	229,101	224,679	224,998	226,736	227,228	230,602
3	228,597	229,101	224,679	224,998	226,736	227,228	230,602
4	322,203	322,325	317,723	317,671	325,564	327,133	340,027
5	404,741	405,166	401,629	401,797	404,722	408,059	414,370
6	407,603	408,166	404,505	404,803	407,371	410,767	414,370

Результаты решения задач-тестов позволяют сделать сравнение обсуждаемых вариантов конденсации как между собой, так и с имеющимися точными решениями и решениями, полученными при помощи коммерческих программных продуктов. Такое сравнение подтвердило эффективность и возможность достижения требуемой точности при значительно меньшем порядке решаемой системы частотных уравнений для каждого из вариантов конденсации.

Преимуществом предлагаемого алгоритма формирования редуцированной системы частотных уравнений на основе интерполяции основных неизвестных смешанного метода является отсутствие операций обращения матрицы коэффициентов при неизвестных для узлов разреженной сетки, которая также может иметь довольно высокий порядок, и является очень затратной операцией с точки зрения машинного времени.

Пример 8. Дополнительно была решена задача определения собственных частот и собственных форм колебаний для плиты на упругоподатливых опорах, изображенной на рисунке 4. Рассмотрен вариант нагружения такой плиты нагрузкой, приложенной по контуру плиты и вдоль линии симметрии по оси Y , а также нагрузкой от собственного веса.

Расчет СЗ и СВ для этой пластины выполнен в следующих вариантах:

1. На основе МКЭ в форме КСМ с использованием конденсационных методов.

2. На основе МКЭ в форме КСМ с использованием разработанных комбинированных алгоритмов редуцирования системы частотных уравнений.

3. На основе МКЭ в форме метода перемещений с использованием ПК ЛИРА при использовании согласованной матрицы масс (СММ), диагональной матрицы масс (ДММ).

В таблице 12 представлены результаты вычисления собственных частот для нижней части спектра колебаний рассматриваемой пластины, полученные с использованием указанных расчетных методов, а также результаты сравнения (за эталонное принято решение, полученное в ПК ЛИРА с использованием согласованной матрицы масс при разбиении плиты КЭ-сеткой 64х64).

Таблица 12 – Численные значения частот собственных колебаний ω , полученные при расчете плиты на упруго-податливых опорах

ω	КСМ 16х16	КСМ 32х32→16х16	ЛИРА 16х16	ЛИРА 32х32	ЛИРА 64х64	ЛИРА 64х64 СММ	Относительная погрешность	
							КСМ 16х16 и ЛИРА 64х64 (СММ)	КСМ 32х32→16х16 и ЛИРА 64х64 (СММ)
1	14,111	14,237	13,564	14,184	14,216	14,833	4,9	4,0
2	14,216	14,359	13,726	14,400	14,472	15,044	5,5	4,6
3	15,025	15,186	14,492	15,263	15,360	15,909	5,6	4,5
4	15,531	15,715	15,090	15,508	15,507	15,924	2,5	1,3
5	15,589	15,774	15,143	15,569	15,571	16,044	2,8	1,7
6	15,897	16,086	15,467	15,942	15,963	16,394	3,0	1,9

Результаты численных расчетов, представленные в таблице 12, показывают, что частоты собственных колебаний пластин на упруго-податливых опорах, полученные с использованием различных подходов, имеют достаточно близкие значения. Это свидетельствует о корректности разработанных алгоритмов редуцирования системы частотных уравнений.

Применение редукционных алгоритмов позволяет существенно снизить размерность системы частотных уравнений.

В целом, разработанные алгоритмы редуцирования системы динамических уравнений на основе интерполяции основных неизвестных и комбинированные подходы, продемонстрировали свою эффективность при вычислении собственных частот для нижней части спектра колебаний изгибаемых пластин.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Разработан унифицированный базовый алгоритм-платформа для редуцирования СЛАУ МКЭ в форме КСМ, основанный на интерполяции основных неизвестных смешанного метода. При необходимости определения полного поля перемещений/усилий на мелкой конечно-элементной сетке выполняется процедура обратного хода с использованием найденных коэффициентов интерполяции. Сходимость к точному решению при сгущении конечно-элементной сетки обеспечивается устойчивостью счета, как и при использовании классического алгоритма формирования разрешающей системы уравнений МКЭ в форме КСМ.

2. На основе базового унифицированного алгоритма разработаны частные специализированные алгоритмы редуцирования СЛАУ МКЭ в форме КСМ, описывающих напряженно-деформированное состояние конструкции на основе различных вариантов интерполяции основных неизвестных в узлах мелкой конечно-элементной сетки через значения неизвестных в узлах грубой сетки.

3. Разработан специализированный алгоритм редуцирования частотных уравнений на основе МКЭ в форме КСМ.

4. Разработаны комбинированные алгоритмы редуцирования частотных уравнений, сочетающие алгоритм на основе интерполяции неизвестных и методы конденсации в форме КСМ. Главной особенностью этих алгоритмов является применение статически редуцированной на основе интерполяции матрицы откликов, обеспечивающей достаточную точность при решении задач статики. В комбинации с алгоритмом блочной конденсации удастся значительно быстрее с достаточной точностью получить решение.

5. Эффективность разработанных алгоритмов подтверждена численным решением тестовых примеров: расчета пластин на статическое и динамическое воздействие, и сравнением с имеющимися аналитическими решениями и результатами, полученными другими исследователями.

Разработанные алгоритмы создают основу для разработки новых и внедрения в уже существующие, реализующие МКЭ в форме КСМ, программные средства.

Основные положения диссертации и результаты исследований изложены в следующих публикациях:

Публикации в ведущих рецензируемых научных журналах и изданиях:

1. Завьялов, И. С. Сравнительный анализ точности результатов расчета тонкой изгибаемой пластинки с использованием МКЭ в перемещениях и форме классического смешанного метода [Текст] / А. В. Игнатьев, И. С. Завьялов // Известия высших учебных заведений. Строительство. – 2022. – № 11(767). – С. 5-14. – DOI 10.32683/0536-1052-2022-767-11-5-14. – EDN BWNJXY.

2. Завьялов, И. С. Сравнительный анализ точности результатов расчета тонкой изгибаемой пластинки с использованием различных форм МКЭ [Текст] / И. С. Завьялов // Строительная механика и расчет сооружений. - 2022. - № 6. - С. 8-17. DOI: 10.37538/0039-2383.2022.6.8.17

3. Завьялов, И. С. Алгоритм расчета изгибаемой пластинки на основе МКЭ в форме классического смешанного метода с использованием прямоугольного КЭ с четырьмя основными неизвестными в углах [Текст] / В. А. Игнатьев, А. В. Игнатьев, И. С. Завьялов // Строительная механика и расчет сооружений. - 2021. - № 4 (297). - С. 12-16. DOI: 10.37538/0039-2383.2021.4.12.16

4. Завьялов, И. С. Техника формирования редуцированных конечно-элементных СЛАУ высоких порядков, описывающих напряженно-деформированное состояние одномерных и двумерных конструкций [Текст] / В. А. Игнатьев, А. В. Игнатьев, И. С. Завьялов // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Строительство и архитектура. - 2024. - Вып. 1 (94). - С. 115-126.

5. Завьялов, И. С. Алгоритм редуцирования систем уравнений МКЭ высоких порядков с использованием полиномиальной интерполяции основных смешанных неизвестных [Текст] / А. В. Игнатьев, И. С. Завьялов, М. И. Бочков // Известия высших учебных заведений. Строительство. - 2024. - № 7 (787). - С. 5-18. – DOI 10.32683/0536-1052-2024-787-7-5-18.

6. Завьялов, И. С. Расчет изгибаемых пластин, имеющих отверстия, с использованием полиномиальной интерполяции основных смешанных неизвестных [Текст] / А. В. Игнатьев, И. С. Завьялов, М. И. Бочков // Строительная механика и расчет сооружений. - 2024. - N 4. - С. 11-19. - DOI: 10.37538/0039-2383.2024.3.31.35.

7. Завьялов, И. С. Идеальное шарнирное соединение стержневых и пластинчатых конечных элементов смешанной формы [Текст] / А. В. Игнатьев, М. И. Бочков, С. А. Калиновский, И. С. Завьялов // Инженерно-строительный вестник Прикаспия. - 2024. - № 3 (49). - С. 5-10.

Публикации в изданиях, индексируемых в международной наукометрической базе данных «Scopus»:

1. Завьялов, И. С. The Efficiency of Application of Triangular Bending Finite Elements for Plate Calculation Using the Classical Mixed-Type Approach to the Finite-Element Method [Electronic version] / А. В. Игнатьев, В. А. Игнатьев, И. С. Завьялов // Proceedings of the International Conference on Networked Control Systems for Connected and Automated Vehicles / eds. A. Guda; Rostov State Transport University, Rostov-on-Don, Russia. - P. 963-971. - URL: https://doi.org/10.1007/978-3-031-11058-0_98. - (Book series: Lecture Notes in Networks and Systems (LNNS); vol. 509).

2. Завьялов, И. С. Technique for Solving Finite Element Systems of High-Order Linear Algebraic Equations Describing the Stress–Strain State of One-Dimensional and Two-Dimensional Structures [Electronic version] / А. В. Игнатьев, И. С. Завьялов // Proceedings of the 7th International Conference on Construction, Architecture and Technosphere Safety ICCATS 2023 (10-16 September 2023, Sochi, Russia) / eds.: A. A. Radionov [et al.] ; Moscow Polytechnic University [et al.]. – Springer Cham, 2024. - P. 232-243. - DOI : https://doi.org/10.1007/978-3-031-47810-9_22. - (Book ser.: Lecture Notes in Civil Engineering (LNCE, vol. 400).

Свидетельства о регистрации программ для ЭВМ:

1. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2023661448 Российская Федерация. Статический расчет тонких изгибаемых пластин по МКЭ в форме КСМ: № 2023619332 : заявл. 04.05.2023: опубл. 31.05.2023 / А. В. Игнатьев, И. С. Завьялов.

2. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2024683048 4 октября 2024 г. Российская Федерация Динамический расчет тонких изгибаемых пластин по МКЭ в форме КСМ (ДР ТИП МКЭ КСМ) / А. В. Игнатьев, М. И. Бочков, И. С. Завьялов, С. Н. Куцаев; ФГБОУ ВО ВолГТУ. - 2024.

3. Свид. о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2024683046 4 октября 2024 г. Российская Федерация Статический расчет тонких изгибаемых пластин по МКЭ в форме КСМ (СТАР ТИП МКЭ КСМ) / А. В. Игнатьев, М. И. Бочков, И. С. Завьялов, С. Н. Куцаев; ФГБОУ ВО ВолГТУ. - 2024.

ЗАВЬЯЛОВ ИВАН СЕРГЕЕВИЧ

СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ РЕДУКЦИОННЫХ АЛГОРИТМОВ РАСЧЕТА
ПЛАСТИН ПРИ СТАТИЧЕСКИХ И ДИНАМИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ С
ПОМОЩЬЮ МКЭ В ФОРМЕ КЛАССИЧЕСКОГО СМЕШАННОГО МЕТОДА

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук

Подписано в печать 06.03.2025 г. Формат 60х84/16

Бумага офсетная. Гарнитура таймс.

Усл. печ. л. 1,0.

Тираж 100 экз. Заказ №

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего
образования

«Волгоградский государственный технический университет»

400074, г. Волгоград, ул. Академическая, 1