

УДК 531.36

DOI 10.35211/1990-5297-2025-9-304-57-61

Л. Д. Смирная, И. П. Вершинина, Е. В. Дементьев

ОБ УПРАВЛЕНИИ ПОСТУПАТЕЛЬНЫМ ДВИЖЕНИЕМ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ПОЛЕ СИЛЫ ТЯГОТЕНИЯ ЗА СЧЕТ НАЛОЖЕНИЯ СВЯЗЕЙ*

Волгоградский государственный технический университет

smirnaya@vstu.ru, ipvershinina@vstu.ru, evg7360@yandex.ru

Предложен метод изменения закона естественного движения твердого тела в поле силы тяготения за счет присоединения к нему дополнительных тел. Между исходным телом и дополнительно введенными устанавливаются связи. Эти связи рассматриваются как идеальные и могут быть как голономными, так и неголономными. Обсуждена практическая значимость предлагаемого метода.

Ключевые слова: поступательное движение, поле сил тяготения, управление движением, голономные и неголономные связи.

L. D. Smirnaya, I. P. Vershinina, E. V. Dementiev

ON THE CONTROL OF THE TRANSLATIONAL MOTION OF A SOLID BODY IN THE GRAVITATIONAL FORCE FIELD DUE TO THE SUPERPOSITION OF CONSTRAINTS

Volgograd State Technical University

A method is proposed for changing the law of natural motion of a solid body in the gravitational force field by attaching additional bodies to it. Constraints are established between the original body and the additional ones introduced. These constraints are considered as ideal and can be both holonomic and nonholonomic. The practical significance of the proposed method is discussed.

Keywords: translational motion, gravitational force field, motion control, holonomic and nonholonomic constraints.

Введение

Задача перемещения грузов в вертикальной плоскости является одной из актуальных задач во многих отраслях хозяйственной деятельности. Обычно она решается с помощью тех или иных грузоподъемных машин и механизмов: подъемные краны, лифты, манипуляторы и др. [1]. Причем они применяются как при подъеме грузов, так и при их опускании. В том и другом случаях расходуется энергия. При подъеме совершается полезная работа по подъему груза, а часть энергии затрачивается на необратимые потери, как правило тепловые. При опускании, при использовании нерекуперативного привода энергия затрачивается на необратимые потери, также, как правило, тепловые. Так, например, для двигателей постоянного тока развиваемый им момент обычно учитывается [2] линейной зависимостью от тока в электрической цепи, а тепловые потери пропорциональны его квадрату. Если учесть, что развиваемый момент пропорционален весу P , поднимаемого или опускаемого с постоянной скоростью груза, то

уровень тепловых потерь A определяется выражением:

$$A = \alpha \int_0^{\tau} P^2 dt, \quad (1)$$

где α – коэффициент пропорциональности, зависящий от характеристик конкретного двигателя и привода подъема опускания, τ – время работы.

Для снижения нагрузки P на двигатель применяется уравнивание. Однако это хотя и снижает уровень тепловых потерь, но полностью их не устраняет в силу необходимости подъема и опускания одним и тем же механизмом подъема и опускания тел различного веса. Поэтому востребованной становится задача перемещения грузов в поле сил тяжести, в частности их опускания в соответствии с заранее заданным законом без использования того или иного двигателя, а за счет накладываемых связей, как это имеет место во многих задачах робототехники [3–5].

© Смирная Л. Д., Вершинина И. П., Дементьев Е. В., 2025.

* Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00477, <https://rscf.ru/project/24-21-00477/>

Постановка задачи

Рассматривается механическая система с S степенями свободы. Накладываются как $S-1$ голономных, так и неголономных стационарных связей. Кинетическая энергия T системы определяется выражением:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} a_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j, \quad (i, j = 1 \dots S-1), \quad (2)$$

где a_{ij} – матрица инерционных коэффициентов, дополнительно присоединенной механической системы, элементы которой могут зависеть от всех обобщенных координат q_j, y ; m – масса опускаемого груза; повторяющиеся индексы в (2), как это принято в тензорном анализе означают по ним суммирование.

Уравнения голономных связей задаются в форме:

$$f_k(q^1 \dots q^{n-1}, y) = 0, \quad (k = 1 \dots K), \quad (3)$$

а неголономных, линейных относительно скоростей, в виде:

$$A_{pi} \dot{q}^i + A_{py} \dot{y} = 0, \quad (p = 1, 2 \dots P), \quad (4)$$

где A_{pi}, A_{py} – функции обобщенных координат.

Причем

$$P + K = S - 1. \quad (5)$$

Схематично рассматриваемая система представлена на рис. 1.

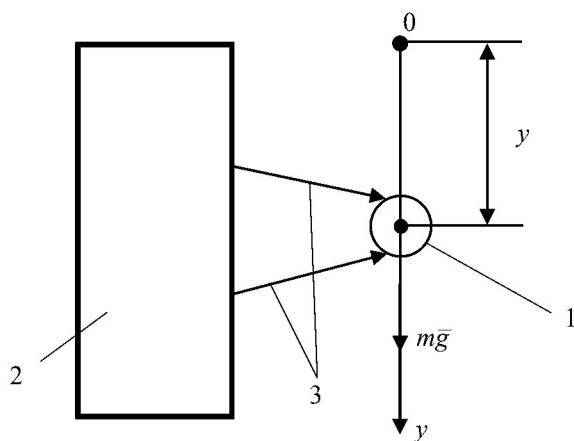


Рис. 1. Условная механическая система:
1 – опускаемый груз; 2 – присоединенная механическая система;
3 – накладываемые связи

Из активных сил, действующих на механическую систему, учитывается сила тяжести, приложенная к грузу m .

Дифференциальные уравнения движения рассматриваемой механической системы можно разделить на две группы. Первая группа состоит из одного уравнения, описывающего движение вдоль оси Oy груза массы m :

$$m\ddot{y} = mg + \sum_{k=1}^K \lambda^k \frac{\partial f_k}{\partial y} + \sum_{p=1}^P \lambda^p A_{py}. \quad (6)$$

Вторая группа состоит из $S-1$ уравнений:

$$a_{ij} \ddot{q}^j + \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial q^k} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{kj}}{\partial q^i} \right) \dot{q}^j \dot{q}^k = \sum_{k=1}^K \lambda^k \frac{\partial f_k}{\partial q^i} + \sum_{p=1}^P \lambda^p A_{pi}, \quad (7)$$

где λ^k, λ^p – неопределенные множители Лагранжа.

Ставится задача разработки кинематических схем присоединенных механических систем к перемещающемуся в поле тяготения твердого тела, обеспечивающих задаваемое программное движение рассматриваемого тела.

Присоединенный механизм поступательного перемещения твердого тела

Рассматривается твердое тело массы m , перемещающееся вдоль вертикальной оси Oy под действием силы тяжести mg . Это тело связано шарнирно жестким невесомым стержнем длины l с телом массы M , перемещающимся по горизонтальной направляющей вдоль оси Ox (рис. 2). В начальный момент система находится в покое, а груз массы m в начале координат

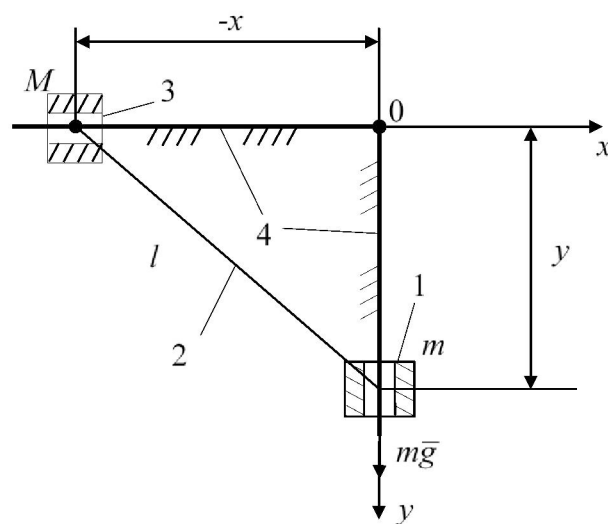


Рис. 2. Кинематическая схема механизма:
1 – тело массы m ; 2 – невесомый стержень длины l ;
3 – тело массы M ; 4 – направляющие

Рассматриваемая кинематическая схема соответствует введению одной голономной связи, накладываемой на механическую систему с двумя степенями свободы:

$$f(x, y) = y^2 + (-x)^2 - l^2 = 0. \quad (8)$$

Тогда, имея ввиду, что $q_1 = x$, $i = j = 1$, $a_{ij} = M$, уравнения (6), (7) приобретают форму:

$$\begin{cases} m\ddot{y} = mg + \lambda 2y, \\ M\ddot{x} = -2\lambda x. \end{cases} \quad (9)$$

Совместное решение уравнений (8) и (9) позволяет получить зависимость $y = y(t)$. Позволяют они найти и зависимость $V_y = V_y(y)$. Так, если при $t = 0$, $y_0 = 0$, $V_y = 0$, то

$$V_y = \sqrt{\frac{2gy}{1 + \frac{\psi y}{\sqrt{l^2 - y^2}}}}, \quad (10)$$

где $\psi = M/m$.

На графиках (рис. 3) представлены зависимости при различных соотношениях масс ψ , скорости V_y от координаты y и $l = 10$ м.

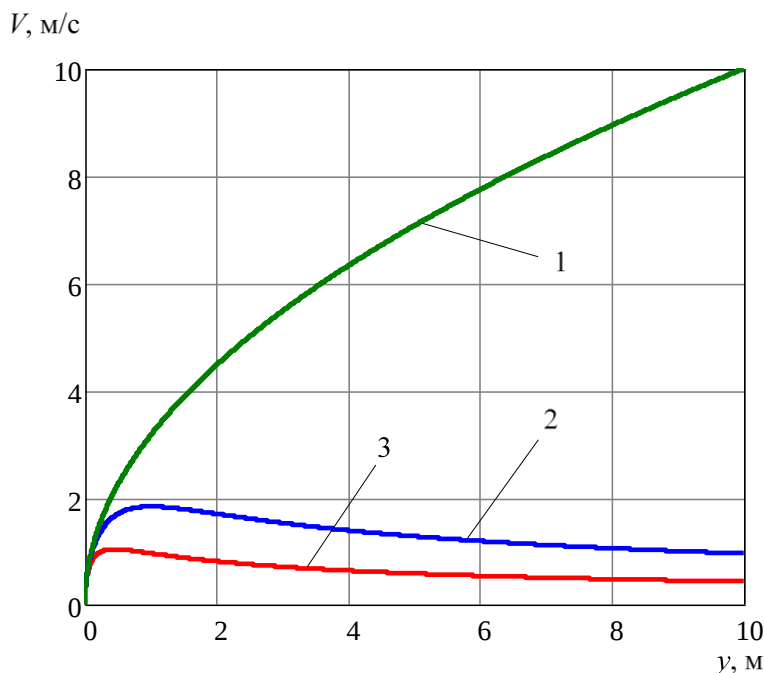


Рис. 3. Зависимость скорости опускания тела от его координаты:
1 – $\psi = 0$; 2 – $\psi = 5$; 3 – $\psi = 10$

Особенность движения тела состоит в том, что если $\psi \neq 0$, то независимо от массы M присоединенной системы при опускании с высоты l скорость тела в конечной точке равна нулю, а закон движения изменяется по сравнению со случаем свободного движения (рис. 3, (1)).

Присоединение дополнительного механизма в виде маховика переменного радиуса, на винтовую поверхность которого навит трос с опускаемым грузом

На рис. 4 представлена кинематическая схема рассматриваемого механизма, особенность работы которого состоит в том, что при опускании тела 1 вдоль вертикальной оси Oy маховик 3 совершает вращательное движение вокруг горизонтальной оси Ox и поступательное движение вдоль той же оси. Поступательное перемещение осуществляется за счет силы

давления троса на маховик в направлении по оси Ox .

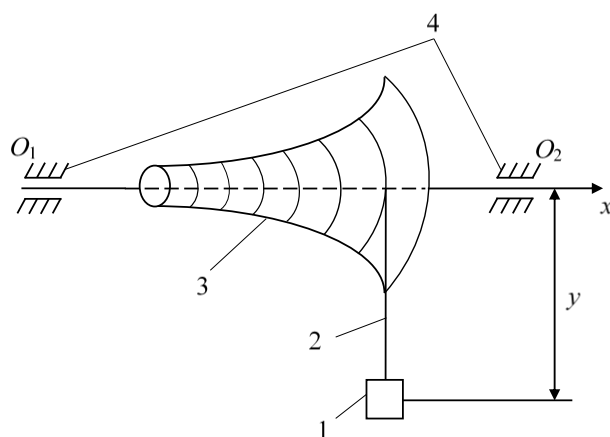


Рис. 4. Кинематическая схема механизма:
1 – опускаемый груз; 2 – трос, навитый на маховик переменного радиуса $R = R(x)$; 3 – маховик переменного радиуса; 4 – цилиндрические шарниры

В соответствии с (2) кинетическая энергия системы представляется в форме:

$$T = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2, \quad (11)$$

где M , J – соответственно масса и момент инерции маховика относительно оси Ox .

На движение рассматриваемой механической системы накладывается связь:

$$\dot{y} - R(x)\dot{\varphi} = 0, \quad (12)$$

которая устанавливает зависимость скорости $\dot{y}$ груза m от угловой скорости маховика и его смещения как твердого тела вдоль оси Ox .

Накладывается и голономная связь, устанавливающая связь между углом поворота маховика φ и его смещением вдоль оси Ox , что определяется уравнением винтовой линии на маховике, являющейся направляющей для троса:

$$\varphi - \Phi(x) = 0. \quad (13)$$

Тогда уравнения движения в случае идеальности связей имеют вид:

$$\begin{cases} J\ddot{\varphi} = -\lambda_1 R(x) + \lambda_2, \\ M\ddot{x} = -\lambda_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \\ m\ddot{y} = mg + \lambda_1, \end{cases} \quad (14)$$

где λ_1 , λ_2 – неопределенные множители Лагранжа.

Однако анализ движения рассматриваемой механической системы удобно проводить на основе гипотезы об идеальности связей. В этом случае имеет место первый интеграл:

$$T + \Pi = \text{const}, \quad (15)$$

где Π – потенциальная энергия системы.

Тогда с учетом (11)–(13) при нулевых начальных условиях: $\dot{y}_0 = 0$, $\dot{\varphi}_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$ и, имея ввиду, что

$$\Pi = -mgy, \quad (16)$$

можно, как и для предыдущей механической системы (рис. 2), получить зависимость скоро-

сти $\dot{y}$ груза массы m от его положения. Для этого, опираясь на (12) и (13), следует установить зависимости:

$$x = x(y), \quad \varphi = \varphi(y). \quad (17)$$

Действительно, если ввести функцию $u = u(x)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению:

$$\frac{du}{dx} = R(x) \frac{d\Phi}{dx}, \quad (18)$$

то из (12) с учетом (13) следует:

$$y = u(x). \quad (19)$$

Из (19) определяется первая из функций (17), которая в совокупности с (13) позволяет найти вторую функцию.

Тогда из (11) с учетом (16) и (17) следует:

$$\dot{y} = V_y = \sqrt{\frac{2gy}{\frac{J}{m} \left(\frac{d\varphi}{dy} \right)^2 + \psi \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 + 1}}, \quad (20)$$

где $\psi = M/m$.

Так, если

$$\begin{cases} \varphi = ay + by^2, \\ x = \epsilon y + dy^2, \end{cases} \quad (21)$$

что обусловлено конструктивными параметрами маховика, то

$$V_y = \sqrt{\frac{2gy}{A + By + Cy^2}}, \quad (22)$$

где A , B , C , – параметры, зависящие от коэффициентов уравнений (21) и относительной массы ψ маховика. Так, если маховик имеет постоянный радиус R , а его масса распределена по ободу, то

$$A = \frac{M}{m} = \psi + 1. \quad (23)$$

На графиках (рис. 5) представлены зависимости $V_y = V_y(y)$ при различных значениях B и C при $\psi = 1$.

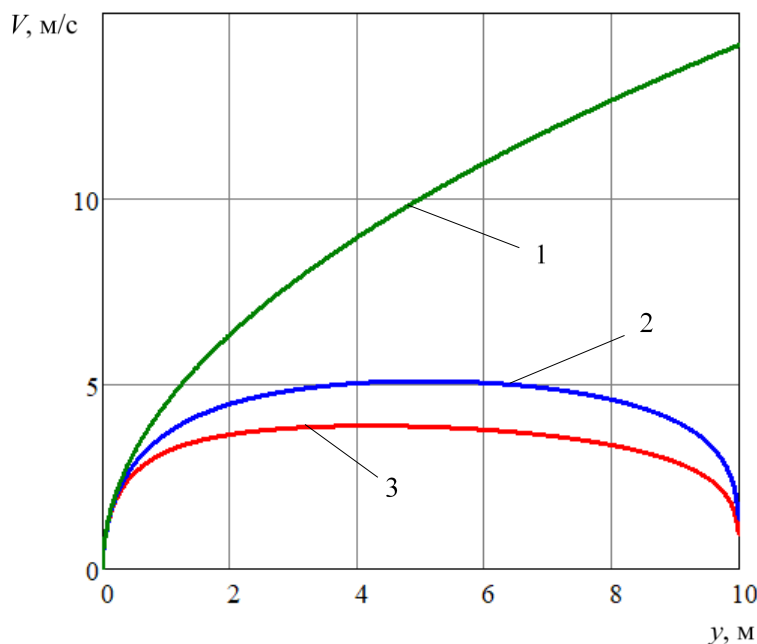


Рис. 5. Зависимость скорости опускаемого тела от его координат:
 1 – $B=0$, $C=0$; 2 – $B=2$, $C=2$; 3 – $B=10$, $C=10$

Выводы

Полученные результаты подтверждают возможность управления движением механических систем за счет целенаправленного наложения связей. Этот способ, в отличие от управления движением тем или иным приводным двигателем, отличается большей энергоэффективностью, так как не требует дополнительного источника энергии.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Крайнев, А. Ф. Словарь-справочник по механизмам / А. Ф. Крайнев // – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение. – 1987. – 560 с.
2. Брискин, Е. С. Об энергетической эффективности цикловых механизмов / Е. С. Брискин, Я. В. Калинин,

А. В. Малолетов, В. В. Чернышев // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2014. – № 1. – С. 18–25.

3. Дементьев, Е. В. Конструктивная схема и принцип работы подводной роботизированной транспортной системы / Е. В. Дементьев, Е. С. Брискин // Известия ВолгГТУ : научный журнал № 4 (287) / ВолгГТУ. – Волгоград, 2024. – С. 55–59.

4. Брискин, Е. С. Энергетика и программное управление поступательным перемещением шагающего аппарата «циклон» / Е. С. Брискин, А. В. Леонард // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. – 2016. – № 6. – С. 161–169.

5. Брискин, Е. С. Формирование свойств движения механических систем за счет управления реакциями голономных квазиидеальных связей / Е. С. Брискин, В. В. Павловский, В. Е. Павловский, Л. Д. Смирная // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. – 2021. – Т. 6, № 6. – С. 13–23.