

К. В. Климов, А. А. Рогачев, Н. К. Сафонова, Р. М. Щербов

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ КИНЕМАТИКИ ШЕСТИЗВЕННОГО МАНИПУЛЯТОРА RUKA В АППАРАТЕ БИКВАТЕРНИОНОВ

Научно-исследовательский институт механики МГУ имени М. В. Ломоносова

kklimov@imec.msu.ru, arogachev@imec.msu.ru, safonova.nk@gmail.com,
romanscherbov@gmail.com

В данной работе решение прямой и обратной задач кинематики для шестизвеного манипулятора RUKA будет произведено с использованием теории бикватернионов. Это обусловлено требованием к высокому быстродействию алгоритмов, использующих решение задач кинематики для движения схвата манипулятора по программной траектории. Переход от пространства Эйлеровых углов (для ориентации) и декартовых координат (для позиции схвата манипулятора) в универсальное пространство бикватернионов Клиффорда позволяет повысить точность и скорость расчетов при меньшей вычислительной сложности.

Ключевые слова: манипулятор, бикватернионы, прямая задача кинематики, обратная задача кинематики.

K. V. Klimov, A. A. Rogachev, N. K. Safonova, R. M. Chsherbov

FORWARD AND INVERSE KINEMATICS PROBLEMS SOLUTION FOR 6DOF MANIPULATOR BY USING BIQUATERNIONS THEORY

Mechanics Institute of Lomonosov Moscow State University

In this work the solution to the forward and inverse kinematics problems for 6DOF manipulator RUKA solved by using the theory of biquaternions. This approach is motivated by the requirement for high-speed algorithms that use the solution of kinematics problems to move the manipulator grip along a planned trajectory. The transition from the space of Eulerian angles for orientation and Cartesian coordinates for the position of the manipulator grip to the universal space of Clifford's biquaternions allows increasing accuracy and speed of calculations due to lower computational complexity.

Keywords: manipulator, biquaternions, forward kinematics problem, inverse kinematics problem.

Введение

Управление промышленными манипуляторами требует решения большого количества задач: построение траектории перемещения схвата, построение обратной связи, построение управления приводами с учетом ограничения

столкновений, пределов рабочей зоны и электромеханических параметров и др. [1]. В этом списке задачи кинематики (прямая и обратная) одни из ключевых для построения управления манипуляторами в рамках классической теории управления. Прямая задача кинематики (ПЗК)

заключается в вычислении положения схвата манипулятора по заданным значениям собственных углов его звеньев и используется как обратная связь по положению. Обратная задача кинематики (ОЗК) состоит в вычислении собственных углов поворота звеньев по заданному положению схвата и может служить опорной уставкой программного движения цикла управления. ОЗК, как правило, представляет собой наибольший интерес в связи с множественностью решения в общем виде и сложностью расчетов [1].

С повышением быстродействия компьютеров активно развиваются численные методы решения ОЗК [3–6], позволяющие создавать, к примеру, манипуляторы с большим числом степеней свободы, для кинематики которых не существует аналитических решений [1]. Несмотря на то, что при движении схвата по заранее заданному пути время на решение ОЗК не играет решающей роли, так как все состояния просчитываются заранее, прямое управление манипулятором требует высокой скорости решения ОЗК, так как это влияет на задержки исполнения и точность траектории. Такое прямое управление особенно востребовано у нового поколения манипуляторов-коботов, работающих в непосредственном контакте с людьми.

ОЗК для шестизвенных манипуляторов, в которых оси вращения последних трех звеньев пересекаются в одной точке, решается аналитически. Представленный в работе манипулятор RUKA, как будет описано ниже, обладает таким свойством.

Классические методы аналитического решения задач кинематики предполагают следующие этапы:

1. Описание кинематической схемы в параметрах Денавита-Хартенбега [1]. Для этого соответствующим образом вводятся оси в каждом шарнире и исследуются переходы между полученными системами координат.

2. После введения этих параметров посредством применения различных математических конструкций и алгоритмов могут быть решены и ПЗК, и ОЗК [1; 7; 8].

Открытые Гамильтоном кватернионы были развиты в работах Клиффорда до бикватернионной теории описания механики твердого тела. В книгах [2; 3] излагаются кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела, которые в дальнейшем применяются для описания кинематики роботов-манипуляторов [3–6].

Аналитический метод решения ПЗК и ОЗК в бикватернионной теории требует выполнения аналогичных классическому подходу этапов:

- 1) введение по определенным правилам осей в шарнирах;
- 2) определение параметров манипулятора в полученных системах координат;
- 3) применение математических законов для получения требуемого задачами результата.

Прямая задача кинематики для шестизвенного манипулятора

Определение систем координат. При использовании бикватернионов для кинематической модели (рис. 2) робота-манипулятора RUKA [10] (рис. 1) представляется удобным выбрать следующие системы координат:

- в первом звене так, что ось k_0 направлена вертикально вверх по оси вращения;
- ось i_0 перпендикулярна d_1 ;
- ось j_0 расположена так, что составляет правую тройку векторов;
- точка пересечения осей находится в геометрическом центре шарнира;
- орты в остальных звеньях располагаются сонаправленно соответствующим осям в первом звене;
- начало осей выбирается аналогично в геометрических центрах шарниров.



Рис. 1. Шестизвенный манипулятор RUKA

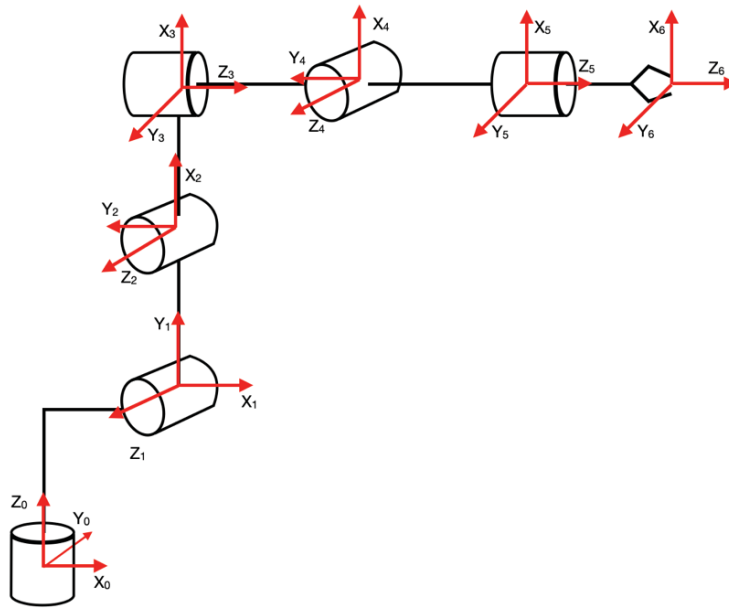


Рис. 2. Кинематическая схема манипулятора RUKA

Определение кватерниона вращения.

Решение прямой задачи кинематики заключается в нахождении бикватернионов, определяемых для соответствующих звеньев, $D_i = \begin{pmatrix} q_i \\ r_i \end{pmatrix}$, где $q_i = (w_i, i_i, j_i, k_i)$ – кватернион ориентации, $r_i = (0, i_i, j_i, k_i)$ – кватернион сдвига.

Конечное перемещение схвата (системы координат $i_6j_6k_6$) относительно основания (системы координат $i_0j_0k_0$) является композицией относительных конечных перемещений звеньев манипулятора.

В свою очередь, каждое из относительных

конечных перемещений звеньев (конечное перемещение i -го звена относительно $(i-1)$ -го описывается бикватернионом) представляет собой композицию двух перемещений: поворота на дуальный угол θ_i вокруг выбранной оси и сдвига на радиус-вектор, соединяющий i -е и $(i-1)$ -е звенья. Таким образом, получается набор бикватернионов, перемножение которых дает искомый результат – бикватернион, описывающий ориентацию и положение схвата в начальной системе координат.

Последовательность конечных перемещений для i -го звена относительно $i-1$ -го:

$$i_0j_0k_0 \xrightarrow{D_0, \vec{k}_0} i_1j_1k_1 \xrightarrow{D_1, -\vec{j}_1} i_2j_2k_2 \xrightarrow{D_2, -\vec{j}_2} i_3j_3k_3 \xrightarrow{D_3, \vec{i}_3} i_4j_4k_4 \xrightarrow{D_4, -\vec{j}_4} i_5j_5k_5 \xrightarrow{D_5, \vec{i}_5} i_6j_6k_6 \quad (1)$$

Для составления бикватернионного описания манипулятора введем следующие обозначения:

$$\begin{cases} l_0 = (0, a_1, 0, d_1) \\ l_1 = (0, 0, 0, a_2) \\ l_2 = (0, 0, 0, a_3) \\ l_3 = (0, d_4, 0, 0) \\ l_4 = (0, d_5, 0, 0) \\ l_5 = (0, 0, 0, 0) \end{cases} \quad (2)$$

где $l_m = (w_m, i_m, j_m, k_m)$, $m = 0, 1, \dots, 5$ – кватернионы, описывающие радиус-векторы между m и $(m+1)$ звеньями.

Бикватернион, описывающий переход от системы координат $i_0j_0k_0$ в систему координат $i_1j_1k_1$, составляется следующим образом:

$$D_0 = \begin{pmatrix} q_0 \\ r_0 \end{pmatrix},$$

где $q_0 = \left(\cos \frac{\theta_1}{2}, \vec{k}_0 \sin \frac{\theta_1}{2} \right)$, $r_0 = q_0 \circ l_0 \circ q_0^*$.

Далее к каждой из осей $i_0j_0k_0$ применяется бикватернион D_0 для перехода в оси $i_1j_1k_1$ соответственно.

$$\begin{cases} i_1 = D_0 \circ i_0 \circ D_0^* \\ j_1 = D_0 \circ j_0 \circ D_0^* \\ k_1 = D_0 \circ k_0 \circ D_0^* \end{cases}$$

Здесь и далее " $\circ$ " обозначает кватернионное произведение, " $*$ " – кватернионное сопряжение.

Затем составляется бикватернион, описывающий поворот вокруг оси, в соответствии со схемой (1) в новой системе координат $i_1j_1k_1$

и применяется к каждой из осей для перехода в систему координат следующего звена $i_2 j_2 k_2$.

Переходы между осями осуществляются с помощью (2).

$$\begin{cases} i_s = D_{s-1} \circ i_{s-1} \circ D_{s-1}^* \\ j_s = D_{s-1} \circ j_{s-1} \circ D_{s-1}^* \\ k_s = D_{s-1} \circ k_{s-1} \circ D_{s-1}^* \end{cases} \quad (3)$$

где $s = 2, 3, 4, 5, 6$.

Компоненты r сдвига можно вычислить по формуле:

$$r_i = q_i \circ q_{i-1} \circ \dots \circ q_0 \circ l_i \circ q_0^* \circ \dots \circ q_{i-1}^* \circ q_i^*.$$

Те же операции проводятся для нахождения бикватернионов перехода всех последующих по кинематической схеме (1) звеньев.

$$D_1 = \begin{pmatrix} q_1 \\ r_1 \end{pmatrix}, \text{ где } q_1 = \left(\cos \frac{\theta_2}{2}, -\vec{j}_1 \sin \frac{\theta_2}{2} \right),$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} q_2 \\ r_2 \end{pmatrix}, \text{ где } q_2 = \left(\cos \frac{\theta_3}{2}, -\vec{j}_2 \sin \frac{\theta_3}{2} \right),$$

$$D_3 = \begin{pmatrix} q_3 \\ r_3 \end{pmatrix}, \text{ где } q_3 = \left(\cos \frac{\theta_4}{2}, \vec{l}_3 \sin \frac{\theta_4}{2} \right),$$

$$D_4 = \begin{pmatrix} q_4 \\ r_4 \end{pmatrix}, \text{ где } q_4 = \left(\cos \frac{\theta_5}{2}, -\vec{j}_4 \sin \frac{\theta_5}{2} \right).$$

$$D_5 = \begin{pmatrix} q_5 \\ r_5 \end{pmatrix}, \text{ где } q_5 = \left(\cos \frac{\theta_6}{2}, \vec{l}_5 \sin \frac{\theta_6}{2} \right).$$

Итоговый оператор перехода от начальной системы координат к системе схвата будет образован композицией найденных переходных бикватернионов.

$$D = D_5 \circ D_4 \circ D_3 \circ D_2 \circ D_1 \circ D_0 = \begin{pmatrix} q_5 \circ q_4 \circ q_3 \circ q_2 \circ q_1 \circ q_0 \\ r_5 + r_4 + r_3 + r_2 + r_1 + r_0 \end{pmatrix}.$$

Решение обратной задачи кинематики для шестизвального манипулятора

Положение и ориентация схвата манипулятора заданы бикватернионом $D_{res} = \begin{pmatrix} q_{res} \\ r_s \end{pmatrix}$, решение ОЗК заключается в поиске обобщенных координат каждого из звеньев для заданных ориентации и положения. Пользуясь тем, что в данной

кинематической схеме первое, второе, третье и пятое звенья лежат в одной плоскости, можно найти сначала первые три угла вращения, исходя из положения, а затем углы последних трех шарниров, опираясь на информацию об ориентации. Для определенности единственно верным решением считается положение «коленом вверх».

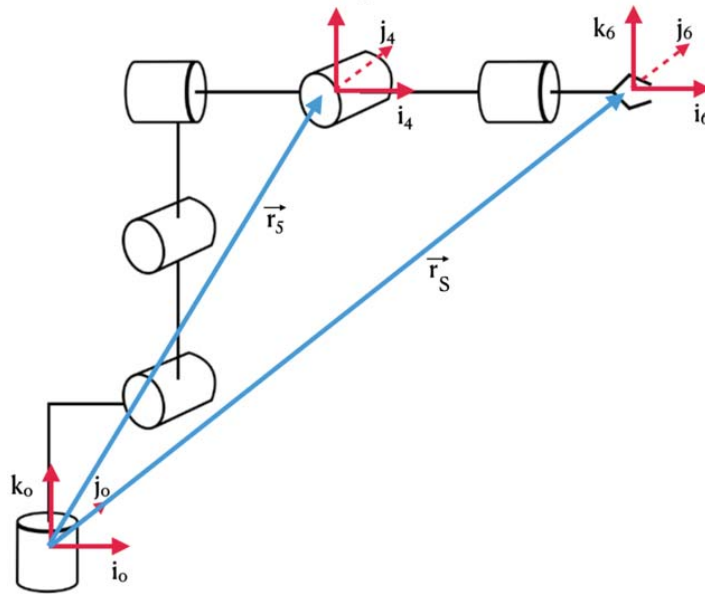


Рис. 3. Постановка задачи и описание вспомогательного радиус-вектора $\vec{r}_s$

Решение подзадачи по положению. Найдем радиус-вектор, соединяющий центры первого и пятого шарниров (рис. 3): $\vec{r}_5 = \vec{r}_s - (0, 0, 0, d_5) \vec{k}_6$, где d_5 – расстояние между 5 и 6 шарнирами.

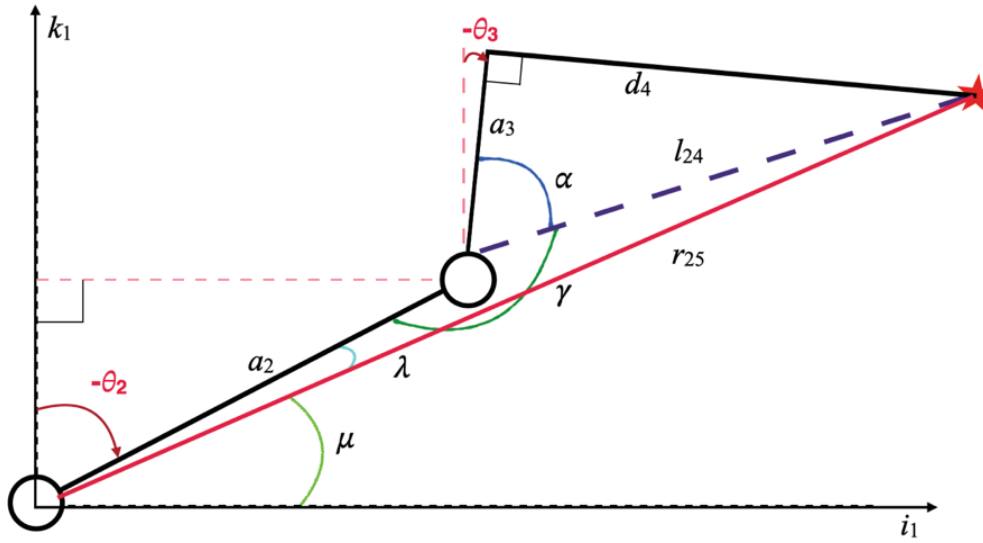
Найдем $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, опираясь на постановку задачи в бикватернионах.

$$\theta_1 = \arctg \frac{r_5^j}{r_5^i}. \quad (4)$$

Соответственно, бикватернион, описывающий поворот первого звена будет иметь вид:

$$D_0 = \begin{pmatrix} q_0 \\ r_0 \end{pmatrix},$$

$$\text{где } q_0 = \left(\cos \frac{\theta_1}{2}, \vec{k}_0 \sin \frac{\theta_1}{2} \right), r_0 = q_0 \circ l_0 \circ q_0^*.$$

Рис. 4. Описание вспомогательных углов $\alpha, \gamma, \mu, \lambda$

Опираясь на рис. 4, вычислим θ_2, θ_3 :

$$\vec{r}_{25} = \vec{r}_5 - q_0 \circ l_0 \circ q_0^*,$$

$$\theta_2 = \frac{\pi}{2} - \mu - \lambda, \quad (5)$$

$$\theta_3 = \pi + \theta_2 - \alpha - \gamma, \quad (6)$$

где вспомогательное расстояние l_{24} и углы $\alpha, \gamma, \mu, \lambda$ можно найти с помощью геометрических операций по рис. 4.

Таким образом, в соответствии с (3)–(5) находятся углы собственных поворотов первых трех шарниров.

Решение подзадачи по ориентации. Найдем кватернион преобразования осей четвертого звена в оси схвата по кватернионам каждого плоского поворота на углы $\theta_4, \theta_5, \theta_6$.

Для этого будем решать подзадачу в системе координат шестого звена. В соответствии с кинематической схемой центр этой системы находится в точке пересечения осей вращения шарниров последних трех звеньев. По определению кватерниона, поворот вектора сопряженным кватернионом описывает поворот на тот же угол с противоположным знаком. Таким образом, композиция кватернионов поворота последних трех звеньев является тем же кватернионом, что и композиция результирующего кватерниона с комплексно-сопряженными ква-

тернионами, описывающими повороты первых трех звеньев.

Известный результирующий кватернион, описывающий ориентацию схвата, представляет собой композицию кватернионов поворота каждого из звеньев.

$$q_{res} = q_5 \circ q_4 \circ q_3 \circ q_2 \circ q_1 \circ q_0.$$

Выше были найдены $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, соответственно, кватернион преобразования последних трех углов описывается:

$$q_5 \circ q_4 \circ q_3 = q_{res} \circ q_0^* \circ q_1^* \circ q_2^*.$$

Обозначим:

$$q_5 \circ q_4 \circ q_3 = (w_{46}, i_{46}, j_{46}, k_{46}).$$

По определению кватернион поворота на угол θ_4 : $q_3 = \cos \frac{\theta_4}{2} + \vec{i} \sin \frac{\theta_4}{2}$.

Кватернион поворота на угол θ_5 :

$$q_4 = \cos \frac{\theta_5}{2} - \vec{j} \sin \frac{\theta_5}{2}.$$

Кватернион поворота на угол θ_6 :

$$q_5 = \cos \frac{\theta_6}{2} + \vec{i} \sin \frac{\theta_6}{2}.$$

Из соотношений выше найдем компоненты результирующего кватерниона (5).

$$\begin{aligned} & \left(\cos \frac{\theta_6}{2} + \vec{i} \sin \frac{\theta_6}{2} \right) \left(\cos \frac{\theta_5}{2} - \vec{j} \sin \frac{\theta_5}{2} \right) \left(\cos \frac{\theta_4}{2} + \vec{i} \sin \frac{\theta_4}{2} \right) = \\ & = \cos \frac{\theta_5}{2} \cos \left(\frac{\theta_6 + \theta_4}{2} \right) + i \cos \frac{\theta_5}{2} \sin \left(\frac{\theta_6 + \theta_4}{2} \right) - j \sin \frac{\theta_5}{2} \cos \left(\frac{\theta_4 - \theta_6}{2} \right) + k \sin \frac{\theta_5}{2} \sin \left(\frac{\theta_4 - \theta_6}{2} \right), \end{aligned}$$

где $ii = -1, ji = -k, iji = ki = j, ij = k$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} w_{46} &= \cos \frac{\theta_5}{2} \cos \left(\frac{\theta_6 + \theta_4}{2} \right) \\ i_{46} &= \cos \frac{\theta_5}{2} \sin \left(\frac{\theta_6 + \theta_4}{2} \right) \\ j_{46} &= -\sin \frac{\theta_5}{2} \cos \left(\frac{\theta_4 - \theta_6}{2} \right) \\ k_{46} &= \sin \frac{\theta_5}{2} \sin \left(\frac{\theta_4 - \theta_6}{2} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

Из выражений (7) найдем требуемые углы.

$$\theta_4 = \arctg \frac{i_{46}}{w_{46}} - \arctg \frac{k_{46}}{j_{46}}, \quad (8)$$

$$\theta_5 = \arccos \left(2\sqrt{i_{46}^2 + w_{46}^2} \right), \quad (9)$$

$$\theta_6 = \arctg \frac{i_{46}}{w_{46}} + \arctg \frac{k_{46}}{j_{46}}. \quad (10)$$

Таким образом, в соответствии с (3)–(5) из подзадачи по положению и (8)–(10) из подзадачи по ориентации находятся углы собственных поворотов всех шарниров, что и является решением ОЗК.

Заключение

Практическая и научная ценность приведенного в работе подхода к решению ПЗК и ОЗК заключается в возможности его использования во всех манипуляторах сходной кинематической схемы с заданием исходных условий (2) на частные кинематические параметры конкретного манипулятора. Количественные оценки, проведенные авторами [9], позволяют утверждать, что переход в пространство бикватернионов, в свою очередь, позволяет снизить вычислительные затраты на решение ОЗК, при этом повысив точность расчетов по сравнению

с классическими подходами до 20 % за счет снижения количества арифметических операций.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Craig, John J. Introduction to Robotics. Mechanics and Control. Third Edition/ John J. Craig. – Pearson Education: Pearson Prentice Hall, 2005. – 408 с.
2. Шмыглевский, И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела / И. П. Шмыглевский, В. Н. Бранец. – Наука, 1973. – 311 с.
3. Челноков, Ю. Н. Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения / Ю. Н. Челноков. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 512 с.
4. Челноков, Ю. Н. Дуальные матричные и бикватернионные методы решения прямой и обратной задач кинематики роботов-манипуляторов на примере стэнфордского манипулятора / Ю. Н. Челноков, Е. И. Ломовцева. // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2014. – Т. 14, вып. 1. – С. 81–89.
5. Борисенко, Л. А. Развитие методов моделирования кинематики манипулятора с использованием кватернионов / Л. А. Борисенко // Вестник Белорусско-Российского университета. – 2006. – № 4 (13). – С. 77–82.
6. Дауров, С. К. Особенности решения некоторых задач кинематики в аппарате кватернионов. / С. К. Дауров, В. П. Глазков // Вестник СГТУ. – 2005. – № 4 (9). – С. 12–24.
7. Юревич, Е. И. Основы робототехники / Е. И. Юревич. – СПб.: БХВ Петербург, 2005. – 416 с.
8. Зенкевич, С. Л. Основы управления манипуляционными роботами. / С. Л. Зенкевич, А. С. Ющенко. – 2-е изд. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. – 480 с.
9. Сафонова, Н. К. Тезисы конференции-конкурса молодых ученых Научно-исследовательского института механики МГУ имени М. В. Ломоносова / Н. К. Сафонова // (НК - 2024). – Москва, 2024. – С. 22–23.
10. Манипулятор RUKA. [Электронный ресурс] – Режим доступа: <https://shop.voltbro.ru/robots#!tproduct/494042486-1715606902155/>.