

А. П. Борина¹, В. А. Терешин²

**ПЕРЕВЕРНУТЫЙ МАЯТНИК КАК ИДЕАЛЬНЫЙ МЕХАНИЗМ
В СИСТЕМЕ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СТАБИЛИЗАЦИИ ХОДЬБЫ**

¹ АО «Навигатор»

² Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

apborina@gmail.com, terva@mail.ru

В работе решена задача управления ходьбой модели шагающего аппарата на примере перевернутого математического маятника переменной длины. Подтверждена правильность использования динамической модели шагающего аппарата для формирования его системы управления.

Ключевые слова: шагающие аппараты, идеальный механизм в обратной связи, перевернутый маятник.

A. P. Borina¹, V. A. Tereshin²

**INVERTED PENDULUM AS AN IDEAL MECHANISM
IN CONTROL SYSTEM FOR STABILIZING WALKING**

¹ Navigator

² Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

The control mission of a walking machine model using the example of the inverted mathematical pendulum with variable length is solved. The correctness of using a dynamic model of a walking machine to form its control system is confirmed.

Keywords: walking machine, ideal feedback mechanism, inverted pendulum.

За более чем столетнюю историю исследований динамики и управления ходьбой шагающих механизмов сложились современные математические модели процесса ходьбы и подходы к решению задачи стабилизации ходьбы. Сложность управления шагающим аппаратом состоит в том, что конструкция такого аппарата предполагает наличие большого количества степеней свободы для обеспечения требуемых кинематических и динамических параметров шагающих устройств. Также трудно обеспечить высокую маневренность таких машин. Система управления аппаратом должна обеспечивать устойчивость ходьбы в целом, ее эффективность и возможность отслеживать требуемое перемещение.

Критический анализ выполненных исследований в области управления ходьбой двуногих шагающих аппаратов показывает, что исследования эти проводятся не только специалистами

в области робототехники [1; 2], механики, автоматизации, но и в институтах ортопедии и протезирования. Как правило, сначала решается задача возможности управления ходьбой простой модели шагающего аппарата, затем снимаются заданные ограничения, выполняется анализ ходьбы на модели, учитывающей ее инерционные свойства и изменения длины ноги. Затем полученные результаты подтверждаются различными экспериментальными исследованиями, в том числе биомеханическими исследованиями на основе высокоскоростной съемки движений человека.

**Точечная модель
шагающего аппарата**

Рассматривается простейшая модель двуножного шагающего аппарата с точечной массой, невесомыми ногами и нулевыми размерами стоп, изменяемая длина ноги обеспечивает го-

ризонгальное перемещение [3]. В предположении медленности изменения длины ноги и малости ширины шага можно линеаризовать уравнения такого движения. В этой постановке задачи аппарат на каждом шаге представляет

собой перевернутый математический маятник переменной длины, план положений которого схематично представлен на рис. 1. Индексы «s» (start) и «f» (finish) обозначают начало и конец шага, «i» соответствует номеру шага.

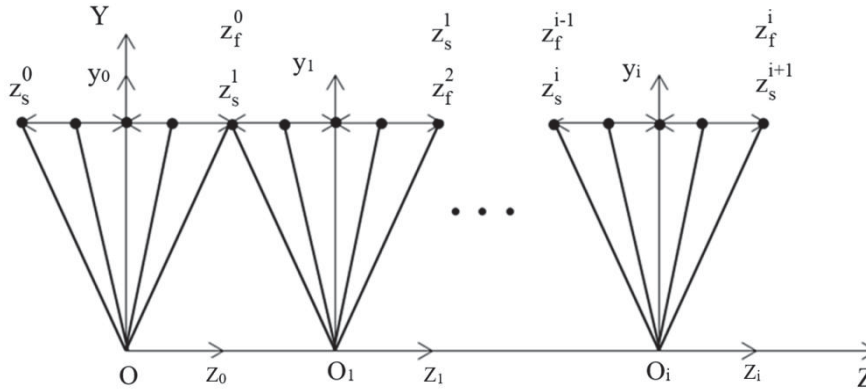


Рис. 1. План положений идеального механизма шагающего аппарата

Приближенный закон движения центра масс с учетом начальных условий вдоль горизонтальной оси будет иметь вид:

$$z = \frac{1}{2} \left(z_s - \frac{\dot{z}_s}{k} \right) e^{kt} + \frac{1}{2} \left(z_s - \frac{\dot{z}_s}{k} \right) e^{-kt}, \quad (1)$$

где z_s и $\dot{z}_s$ – координата и скорость в начале шага, $k = \sqrt{g/L}$ – частота свободных колебаний математического маятника, L – высота центра тяжести, t – произвольный момент времени, g – ускорение свободного падения. Для синтеза закона управления удобно воспользоваться фазовым портретом, на котором движение перевернутого маятника в окрестности положения неустойчивого равновесия отображается семействами гипербол, разделенными линейными сепаратрисами. На основе измерения ошибки

ψ_i как разности между координатой точки при вертикальном положении ноги и ее программным значением в этот же момент времени определяется координата в конце шага

$$z_f^i = \frac{z_{\max}}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{\arctg(\psi_i k_p + \dot{\psi}_i k_d)}{\pi} \right)$$

и место постановки ноги в начале следующего шага

$$z_s^{i+1} = -\frac{\dot{z}_f^i}{k} \left(\frac{1}{2} + \frac{\arctg(\psi_i k_p + \dot{\psi}_i k_d)}{\pi} \right), \quad \text{где } k_p$$

и k_d – коэффициенты обратных связей по ошибке и ее скорости, $z_{\max}$ – конструктивно допустимая ширина шага. Подбирая коэффициенты обратных связей, можно найти устойчивые режимы движения, не заканчивающиеся падением машины, что показано на рис. 2.

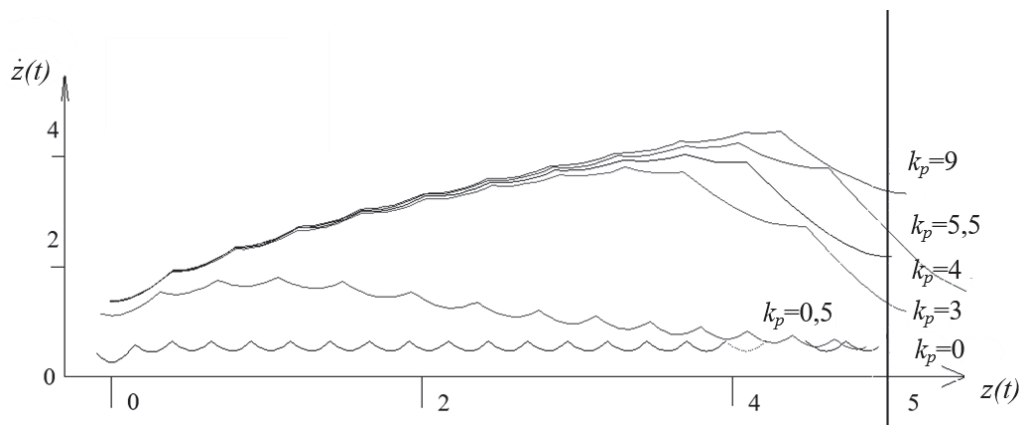


Рис. 2. Фазовый портрет ускоренной ходьбы

Продифференцировав (1) по времени и сопоставляя с (1), получаем для произвольного шага зависимость

$$\dot{z}^2 - k^2 z^2 = \dot{z}_s^2 - k^2 z_s^2. \quad (2)$$

При движении вперед и при малых значениях z_s и $\dot{z}_s$ уравнение (2) имеет фазовые траектории в виде гипербола

$$\dot{z} = \sqrt{\dot{z}_s^2 - k^2 z_s^2 + k^2 z^2}. \quad (3)$$

Описание эксперимента

Для подтверждения теоретических результатов были проведены экспериментальные ис-

следования совместно с Российским НИИ травматологии и ортопедии имени Р. Р. Вредена Росмедтехнологий. Испытания выполнялись на движущейся беговой дорожке и регистрировались с помощью высокоскоростной видеокамеры фирмы Fastec HaSpec с частотой 100 кадров в секунду. Объектом испытаний был здоровый человек.

Исследовались режимы ходьбы с различной скоростью и шириной шага, торможение и приседание. В результате была получена раскладка движений человека, представленная на рис. 3.

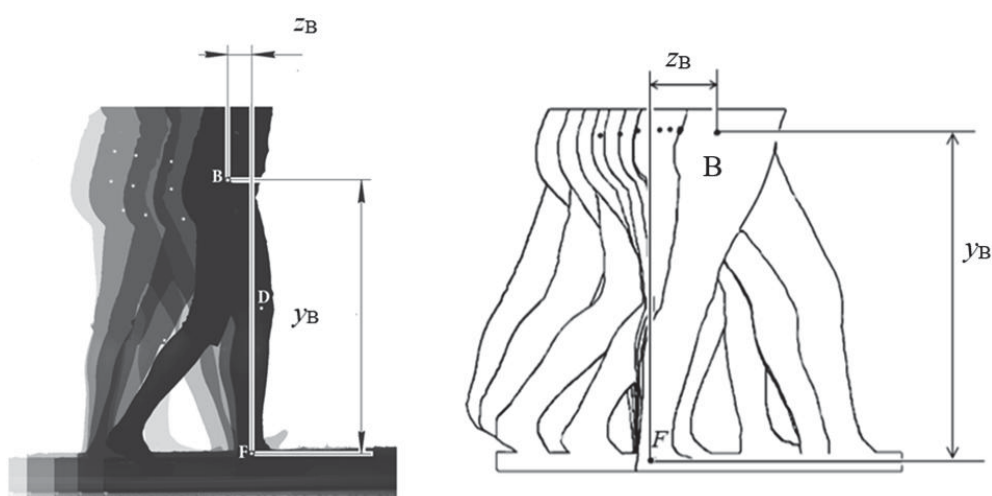


Рис. 3. Кинограмма шага с тактом 0,1 с

Каждое изображение переводилось в AutoCAD и масштабировалось. По координатам наклеенных на человека марок определялось положение центров тазобедренного «B» и опорного голеностопного «F» суставов. Полученных данных оказалось достаточно для определения закона движения туловища человека и построения фазовой траектории горизонтального пере-

мещения на правой ноге, представленной на рис. 4 сплошной линией. На рисунке кроме экспериментальной представлена пунктирной линией теоретическая фазовая траектория с параметрами, определенными из эксперимента $L = 0,875$ м, $z_s = z_{Bs} = -0,134$ м и $\dot{z}_s = \dot{z}_{Bs} = 0,5$ м/с, величина параметра L определена как среднее значение y_B (рис. 3).

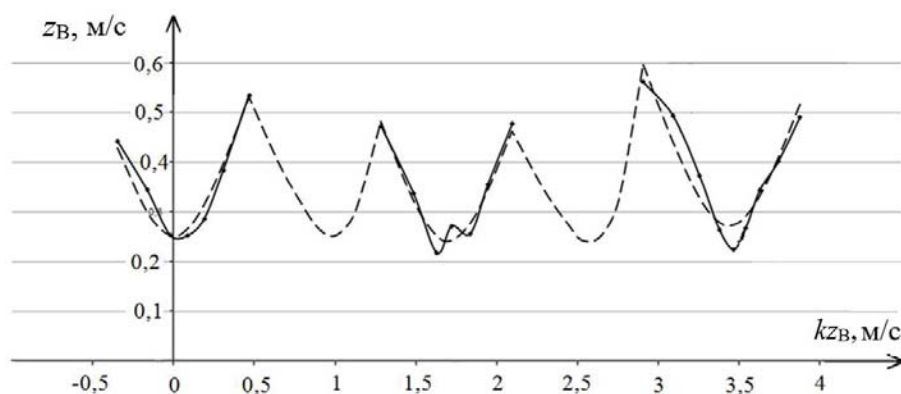


Рис. 4. Фазовые траектории пяти шагов:
— экспериментальная кривая; --- теоретическая кривая

Математическая модель динамики шагающего аппарата

После определения области устойчивости в пространстве коэффициентов обратных связей и оценки качества отработки различных

режимов и ситуаций при ходьбе выполнен анализ движения аппарата на модели, учитывающей его инерционные свойства и управление длиной ноги [4], кинематическая схема которого представлена на рис. 5.

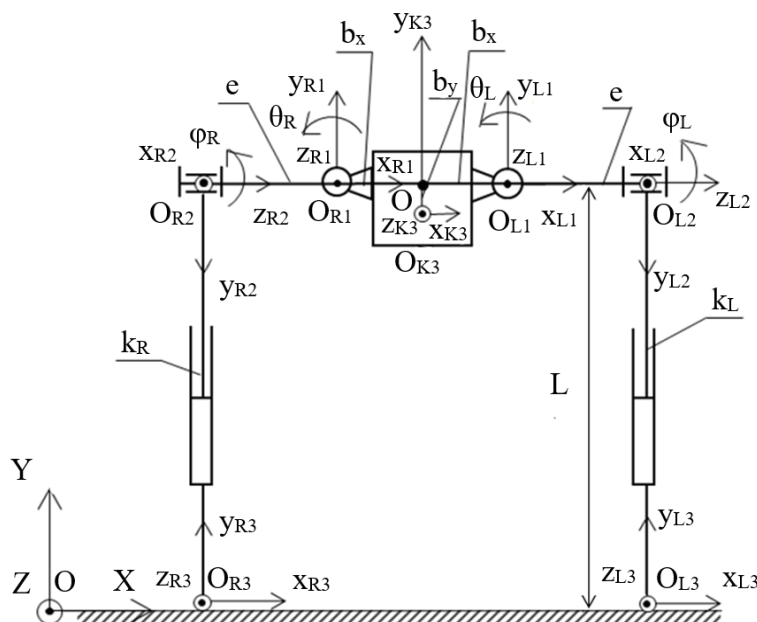


Рис. 5. Кинематическая схема двуногого шагающего аппарата

Для составления уравнения движения двуногого шагающего аппарата использовано общее уравнение динамики, для описания инерционных свойств аппарата учтена масса и матрица инерции корпуса как абсолютно твердого

тела. Взаимодействие стопы с опорой описано только вектором силы. Рассмотрена фаза движения, во время которой аппарат опирается на левую ногу. Движение на правой ноге описывается аналогичными уравнениями.

$$\begin{aligned} & \Phi_x \delta x + (\Phi_y - mg) \delta y + \Phi_z \delta z + M_{zK1}^{\Phi} \delta \alpha + M_{zK2}^{\Phi} \delta \beta + M_{zK3}^{\Phi} \delta \gamma + \\ & + M_{\theta L} \delta \theta_L + M_{\phi L} \delta \phi_L + R_L \delta k_L + F_{xL} \delta x_L + F_{yL} \delta y_L + F_{zL} \delta z_L = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, x, y, z$ – углы конечных поворотов и координаты центра тяжести корпуса, x_L, y_L, z_L – координаты точки постановки левой стопы в глобальной системе, θ_L, ϕ_L, k_L – углы поворота левого тазобедренного шарнира и длина левой ноги, Φ_x, Φ_y, Φ_z и F_{xL}, F_{yL}, F_{zL} – проекции главного вектора сил инерции и вектора силы, действующего на стопу со стороны опоры, на оси неподвижной системы координат; $M_{zK1}^{\Phi}, M_{zK2}^{\Phi}, M_{zK3}^{\Phi}$ – проекции вектора главного момента сил инерции на оси промежуточных систем координат; R_L и $M_{\theta L}$,

$M_{\phi L}$ – движущая сила, действующая вдоль ноги, и движущие моменты в приводах.

Уравнения движения (4), дополненные начальными условиями и координатами места постановки ноги, определяемыми из любых двух приведенных ниже уравнений движения перевернутого маятника (5) позволяют исследовать изменения обобщенных координат корпуса, углов поворота и тазобедренных шарниров, длин ног, движущих моментов, сил и мгновенных мощностей в приводах при ходьбе и динамическом стоянии.

$$\begin{cases} x_{tf} - x_L = \frac{1}{2} \left((x_s - x_L) + \frac{\dot{x}_s}{k} \right) e^{ktf} + \frac{1}{2} \left((x_s - x_L) - \frac{\dot{x}_s}{k} \right) e^{-ktf} \\ z_{tf} - z_L = \frac{1}{2} \left((z_s - z_L) + \frac{\dot{z}_s}{k} \right) e^{ktf} + \frac{k}{2} \left((z_s - z_L) - \frac{\dot{z}_s}{k} \right) e^{-ktf} \\ \dot{x}_{tf} = \frac{k}{2} \left(x_s - x_L + \frac{\dot{x}_s}{k} \right) e^{ktf} - \frac{k}{2} \left(x_s - x_L - \frac{\dot{x}_s}{k} \right) e^{-ktf} \\ \dot{z}_{tf} = \frac{k}{2} \left(z_s - z_L + \frac{\dot{z}_s}{k} \right) e^{ktf} - \frac{k}{2} \left(z_s - z_L - \frac{\dot{z}_s}{k} \right) e^{-ktf} \end{cases} \quad (5)$$

Временные зависимости и фазовые портреты движения в режиме прямолинейной равномерной ходьбы [5] представлены на рис. 6 и 7, на которых сплошные линии соответствуют движению шагающего аппарата, а пунктирные – его идеальному механизму. Крестиками отмечено начало каждого шага. Траектория идеаль-

ного механизма получена из первых двух уравнений перевернутого математического маятника системы (5) при тех же начальных условиях, что и для модели реального объекта. Численные исследования подтвердили малость отклонений фактического движения аппарата от желаемого.

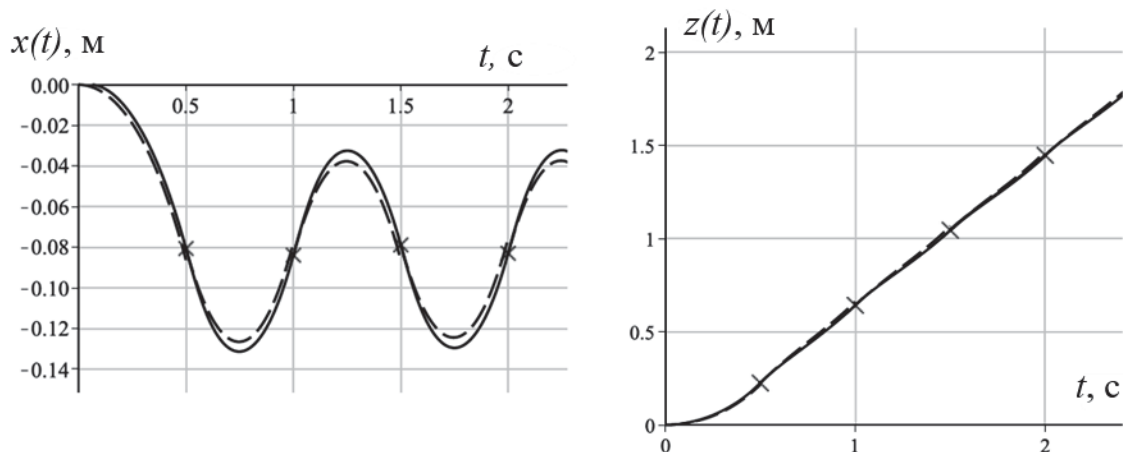


Рис. 6. Зависимости координат центра тяжести аппарата и его идеальной модели от времени при прямолинейной ходьбе с постоянной скоростью

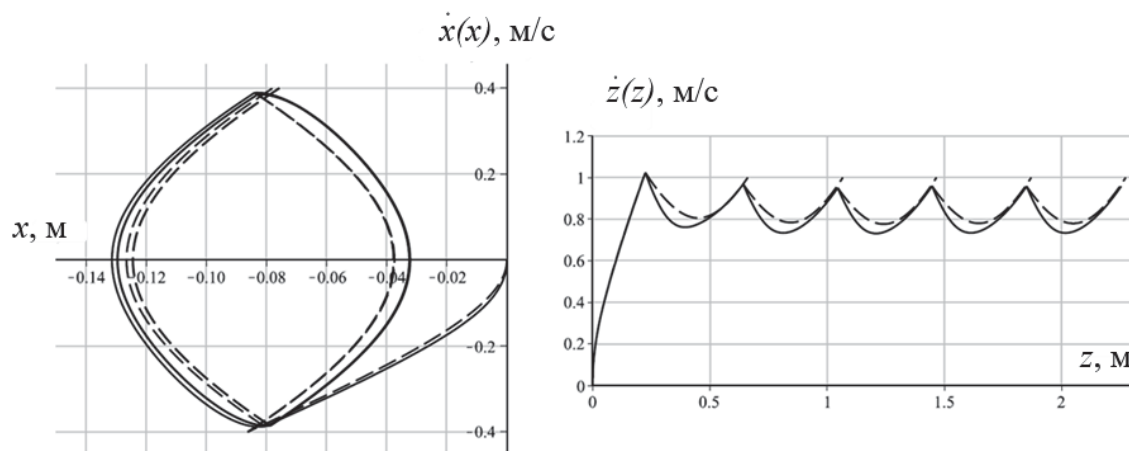


Рис. 7. Фазовые портреты движения аппарата и его идеальной модели при прямолинейной ходьбе с постоянной скоростью

Фазовые портреты вдоль оси z на рис. 7 схожи с графиками на рис. 2 и 4.

Выводы

В работе рассмотрена плоская задача о движении статически неустойчивого двуногого шагающего аппарата по горизонтальной прямой. В качестве модели выбрана материальная точка с невесомыми ногами.

Полученные в ходе эксперимента результаты позволили решить задачу идентификации системы управления ходьбой и показали достаточную адекватность разработанной математической модели шагающего аппарата движению реального объекта.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Горбцов, А. С. Обобщенная задача динамического уравнивания и перспективные направления ее применения / А. С. Горбцов // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. – 2023. – № 3. – С. 14–24.
2. Жога, В. В. Обоснование расчетной схемы динамики манипулятора параллельно-последовательной структуры с дополнительной связью / В. В. Жога, А. В. Нелюбова // Известия ВолгГТУ : научный журнал № 4 (287) / ВолгГТУ. – Волгоград, 2024. – С. 60–65.
3. Борова, А. П. Возможности управления двуногим шагающим аппаратом с помощью уравнений перевернутого маятника / А. П. Борова, В. А. Терешин // Современное машиностроение. Наука и образование. – 2014. – № 4. – С. 131–140.
4. Борова, А. П. Система управления статически неустойчивым шагающим аппаратом / А. П. Борова // Вестник ИжГТУ имени М. Т. Калашникова. – 2023. – Т. 26, № 4. – С. 4–12.
5. Борова, А. П. Прямолинейное равномерное движение антропоморфного робота / А. П. Борова, В. А. Терешин // Неделя науки СПбГПУ: материалы научно-практич. конф. с междунар. участием / Институт металлургии, машиностроения и транспорта СПбГПУ. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2014. – Ч. 1. – С. 160–162.