

УДК 621.791.13

DOI: 10.35211/1990-5297-2024-11-294-5-11

Ю. П. Бесшапошников, канд. техн. наук, В. В. Пай, д-р физ.-мат. наук***ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О МНОГОСЛОЙНОМ МЕТАНИИ ПЛАСТИН
СКОЛЬЗЯЩЕЙ ДЕТОНАЦИОННОЙ ВОЛНОЙ***ООО «Протол», Екатеринбург, bm@protol.ru***Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, г. Новосибирск, pai@hydro.nsc.ru*

Приведено доказательство единственности решения задачи о двумерном многослойном метании пластин, базирующаяся на выражении, связывающем величины предельного и текущего углов поворота. Предложен несколько улучшенный способ расчета. Показано, что при определенных условиях наблюдается значительный рост скорости метания после соударения пластин, которая превышает совместную скорость полета тех же пластин, но изначально расположенных без зазора.

Ключевые слова: угол, давление, импульс, разгон, ударник, пакет, мишень, метаемый слой, остаточные продукты взрыва

*Yu. P. Besshaposhnikov, V. V. Pai****UNIQUENESS OF THE MULTILAYER PLATE CASTING PROBLEM SOLUTION
BY A SLIDING DETONATION***Protol Ltd, Yekaterinburg, bm@protol.ru***Lavrentyev Institute of hydrodynamics, SB RAS, Novosibirsk, pai@hydro.nsc.ru*

A proof of the uniqueness of two-dimensional multilayer plate casting problem solution is given, based on an expression connecting the values of the limiting and current bending angles. A slightly improved method of calculation is proposed. It is shown that under certain conditions there is a significant increase in the flying velocity after the collision of the plates and it exceeds a combined speed of the same plates, but initially located without a gap.

Keywords: angle, pressure, impulse, acceleration, striker, packet, target, flyer, residual explosion products

В [1] найдено аналитическое решение задачи о многослойном метании пластин скользящей детонационной волной на основе выражения, связывающего величины предельного и текущего углов поворота. В [2, 3] это решение было проверено экспериментально. В настоящей работе, в рамках той же модели, приводится теоретическое доказательство единственности полученного решения. На примере двухслойного метания пластин зарядом повышенной массы показано, что при определенных условиях пластины после соударения могут разгоняться до скоростей, превышающих скорости тех же пластин, но изначально расположенных без зазора, благодаря аномально-высокому приросту импульса в начальной фазе разгона – фактора, на важность учета которого при разработке технологий получения биметаллических и многослойных

композиционных материалов, указывалось еще в работе [2].

Расчетная схема

На рис. 1 представлена схема многослойного метания. Здесь H – толщина слоя взрывчатого вещества (ВВ); (x, y) – базовая система отсчета, то есть система декартовых координат, связанная с фронтом детонации; (x_c, y_c) – текущая система отсчета, то есть система декартовых координат, связанная с началом движения последней пластины (мишень); y_0 – расстояние от ударника (пластина, на которой расположен слой ВВ) до мишени; D – скорость детонации заряда ВВ; β_0 – начальный угол метания пакета (композиция из соударившихся частей пластин), который образуется в момент столкновения с мишенью набора предыдущих пластин после их последовательного косоугольного соударения друг с другом (метаемый слой); β – текущий угол поворота метаемого пакета, т.е. угол

между осью x_c и касательной в заданной точке кривой разгона (траектория движения отдельного элемента пакета); ПД – продукты детонации; β_{max} – угол разлета ПД в окружающую среду; p_0 – пиковое давление остаточных ПД (часть ПД, которая продолжает действовать на пакет с момента соударения метаемого слоя с мишенью).

пакета (коэффициент нагрузки). За единицу скорости – D . За единицу энергии – произведение массы ВВ на D^2 . Единицами остальных физических величин – их значения на детонационной волне.

Переход между системами отсчета осуществляется по формулам:

$$X - X_0 = X_c \cdot \cos \beta_0 - Y_c \cdot \sin \beta_0,$$

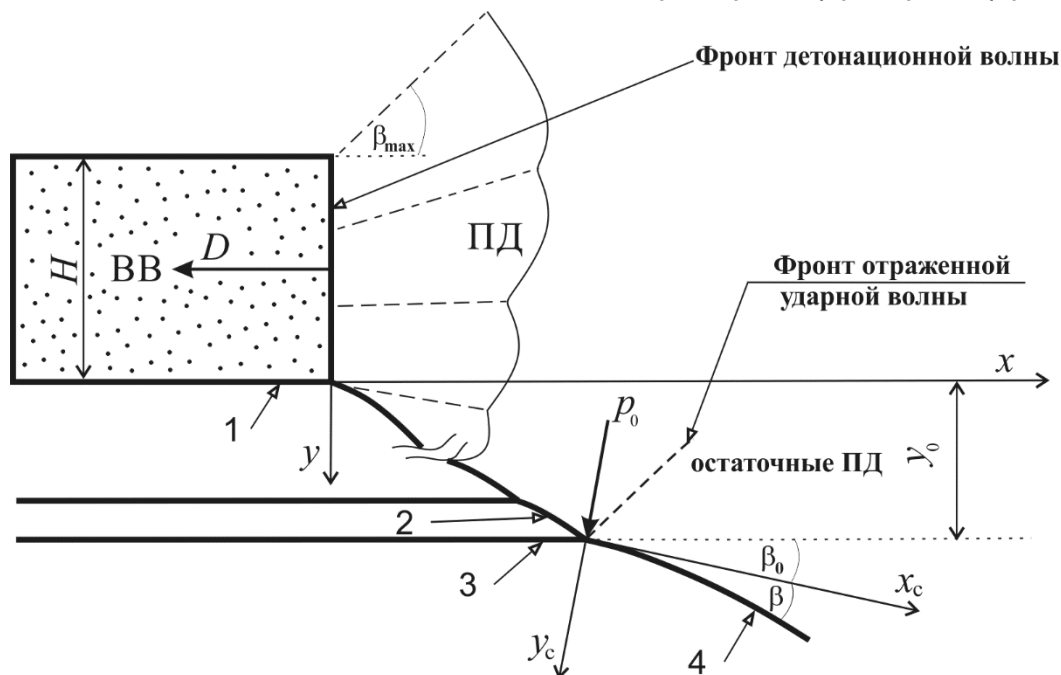


Рис. 1. Схема соударения пластин при их многослойном метании скользящей детонационной волной:

1 – ударник; 2 – метаемый слой; 3 – мишень; 4 – пакет

Процесс метания рассматривается на достаточно большом удалении от краёв метаемых пластин, что исключает их влияние на кривую разгона. При этом пластины и пакет в целом состоят из набора абсолютно жестких не связанных между собой элементов нулевой толщины. Единичная масса (масса на единицу площади поверхности) элемента пластины равна единичной массе исходной пластины, а единичная масса элемента пакета – сумме единичных масс пластин в пакете.

В расчетах все величины берутся в безразмерном виде. Для линейных величин за единицу измерения принимается H : $X = x/H$, $Y = y/H$, $X_c = x_c/H$, $Y_c = y_c/H$. За единицу массы – масса ВВ: r^{-1} , где r – отношение масс ВВ и

$$Y - Y_0 = X_c \cdot \sin \beta_0 + Y_c \cdot \cos \beta_0, \quad (1)$$

где $X_0 = x_0/H$, $Y_0 = y_0/H$ – координаты начала движения отдельного элемента пакета в базовой системе отсчета.

Считаем, что детонация соответствует условию Чепмена-Жуге [4], а ПД являются политропным газом с постоянным показателем k .

Теоретическая часть

Из [1] выпишем уравнения движения в общем виде:

$$\operatorname{tg} \beta = F(\alpha) \operatorname{tg} \beta^*, \quad (2)$$

$$P(\alpha) = \frac{dF}{d\alpha} \cos^3 \beta, \quad (3)$$

$$Y_c(\alpha) = \frac{k+1}{r} \operatorname{tg}^2 \beta^* \int_0^\alpha F(\alpha) d\alpha, \quad (4)$$

где β^* – предельный угол поворота пакета в текущей системе отсчета, $F(\alpha)$ – функция,

связывающая углы β и β^* , α – параметр, определяемый по формуле:

$$\alpha = \frac{r}{(k+1)tg\beta^*} X_c \quad (5)$$

Здесь α в предельных случаях соответствует следующим значениям β и F :

$$\alpha \rightarrow \infty (X_c \rightarrow \infty): \beta \rightarrow \beta^*, F \rightarrow 1;$$

$$\alpha \rightarrow 0 (X_c \rightarrow 0): \beta \rightarrow 0, F \rightarrow 0;$$

$$\alpha \rightarrow \infty (r \rightarrow \infty): \beta \rightarrow \beta_{max}, F \rightarrow 1;$$

$$\alpha \rightarrow \alpha_0 (r \rightarrow 0): \beta \rightarrow 0, F \rightarrow E$$

где E – доля от полного импульса остаточных ПД, приобретенная ими при их отражении от жесткой стенки за время $(x - x_0)/D$.

Функция $F(\alpha)$ ищется в виде:

$$F(\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha + \mu} \quad (6)$$

Здесь μ некоторый параметр, который удовлетворяет следующим условиям:

I. $r \geq 0$

$$\alpha \rightarrow \infty (X_c \rightarrow \infty): \frac{d\mu}{d\alpha} \rightarrow 0, \mu \rightarrow 0;$$

$$\alpha \rightarrow 0 (X_c \rightarrow 0): \frac{d\mu}{d\alpha} \rightarrow -\frac{1}{2P_0^2} \frac{dP}{d\alpha} - 1, \mu \rightarrow 1/P_0.$$

II. $X_c \geq 0$

$$\alpha \rightarrow \infty (r \rightarrow \infty): \frac{d\mu}{d\alpha} \rightarrow 0, \mu \rightarrow 0;$$

$$\alpha \rightarrow \alpha_0 (r \rightarrow 0): \frac{d\mu}{d\alpha} \rightarrow \frac{E - \alpha_0 \cdot P}{E^2} - 1, \mu \rightarrow \frac{\alpha_0}{E} - \alpha_0 \geq 0,$$

где $\alpha_0 = \frac{X - X_0}{(k+1)I_0}$, $I_0 = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sin \beta^*}{r} = \frac{1}{k+1} \int_0^\infty P dX_c = \frac{1}{k+1} \int_{X_0}^\infty P dX$ – полный импульс остаточных ПД, отраженных от жесткой стенки.

При этом $\mu(\alpha)$ ищется в виде:

$$\mu(\alpha) = \frac{1/P_0}{1 + \alpha/m},$$

где $m \neq 0$ и $\frac{\alpha}{m} \rightarrow \infty$ при $\alpha \rightarrow \infty$.

Из I следует, что при $\alpha \rightarrow 0$:

$$\frac{dP}{d\alpha} > -2P_0^2, \text{ если } \frac{d\mu}{d\alpha} < 0;$$

$$\frac{dP}{d\alpha} < -2P_0^2, \text{ если } \frac{d\mu}{d\alpha} > 0.$$

Но тогда μ изначально может либо монотонно уменьшаться, либо монотонно увеличиваться. В первом случае условно считаем, что имеет место «слабый» ($m > 0$), а во втором – «сильный» ($m < 0$) спады давления в ПД. При этом «сильный» спад давления возможен только, если $\alpha < |m|$, в противном слу-

чае ($\alpha > |m|$), предполагается переход на режим «слабого» спада давления.

В [1] принято $m = \text{const}$, что является некорректным утверждением и потребовало дополнительного исследования. В [3] на основе анализа экспериментальных данных выдвинуто предположение, что m не зависит от α . Ниже приводится доказательство этой гипотезы.

Пусть m – функция от α .

Приведем выражение для μ к виду:

$$m = -\frac{\mu P_0 \alpha}{\mu P_0 - 1},$$

Продифференцировав его по α и сделав преобразования, получим:

$$m' = \left(\frac{\frac{\mu P_0 \alpha}{\mu P_0 - 1}}{\frac{\mu P_0 \alpha}{\mu P_0 - 1}} - \frac{(\frac{\mu P_0 \alpha}{\mu P_0 - 1})'}{\frac{\mu P_0 \alpha}{\mu P_0 - 1}} \right) (\mu P_0 - 1)'$$

Если $\alpha \rightarrow 0$, то $\mu \rightarrow 1/P_0$ (см. условие I).

Следовательно:

$$\frac{\mu P_0 \alpha}{\mu P_0 - 1} \rightarrow \frac{0}{0}$$

Тогда:

$$\frac{\mu P_0 \alpha}{\mu P_0 - 1} \rightarrow \frac{(\mu P_0 \alpha)'}{(\mu P_0 - 1)'}$$

Окончательно:

$$m' \rightarrow \left(\frac{(\frac{\mu P_0 \alpha}{\mu P_0 - 1})'}{\frac{\mu P_0 \alpha}{\mu P_0 - 1}} - \frac{(\frac{\mu P_0 \alpha}{\mu P_0 - 1})'}{\frac{\mu P_0 \alpha}{\mu P_0 - 1}} \right) (\mu P_0 - 1)' \rightarrow 0$$

Приведем (6), после подстановки в него выражения для μ , к виду:

$$F(\alpha) = \frac{\alpha^2 + m\alpha}{\alpha^2 + m\alpha + m/P_0} \quad (7)$$

Выразим это равенство через m :

$$m = \frac{\alpha^2(1-F)}{\left(\frac{F}{P_0} - \alpha(1-F)\right)}$$

Продифференцировав данное уравнение по α , получим:

$$m' = \frac{\alpha(A\alpha^2 + B\alpha + C)}{\left(\frac{F}{P_0} - \alpha(1-F)\right)^2}$$

где:

$$A = -FF' \leq 0;$$

$$B = -2(1-F)^2 - (1-F)\left(\frac{F'}{P_0} + 1\right) + F' \frac{F}{P_0};$$

$$C = 2(1-F) \frac{F}{P_0} \geq 0$$

Если $\alpha \rightarrow 0$, то:

$$\frac{\alpha(A\alpha^2+B\alpha+C)}{\left(\frac{F}{P_0}-\alpha(1-F)\right)^2} \rightarrow \frac{0}{0}$$

Дважды применив к этому соотношению правило Лопиталья-Бернулли, окончательно имеем:

$$\alpha \rightarrow 0: m' \rightarrow -\infty$$

Но выше для того же предела было получено значение, равное нулю. Поскольку переменная α определена в интервале $[0, +\infty)$, постольку функция $m(\alpha)$ стремится к своему пределу с одной стороны – справа, а поэтому пределы в обоих случаях должны быть одинаковыми. Следовательно, утверждение m – функция от α , не верно. Остается принять, что m не зависит от α . Гипотеза доказана.

Найдем m и до конца раскроем его физический смысл.

Продифференцировав (8) по α , получим:

$$\frac{dF}{d\alpha} = \frac{P_0 + 2P_0 \frac{\alpha}{m}}{\left(\frac{P_0}{m} \alpha^2 + P_0 \alpha + 1\right)^2}$$

Введем обозначение $Z = \frac{(k+1)tg\beta^*}{r}$ и заменим α на X_c с помощью (5):

$$Z \frac{dF}{dX_c} = \frac{P_0 + \frac{2P_0 X_c}{m Z}}{\left[\frac{P_0}{m} \left(\frac{X_c}{Z}\right)^2 + P_0 \frac{X_c}{Z} + 1\right]^2}$$

Разделим переменные:

$$Z dF = \frac{P_0 + \frac{2P_0 X_c}{m Z}}{\left[\frac{P_0}{m} \left(\frac{X_c}{Z}\right)^2 + P_0 \frac{X_c}{Z} + 1\right]^2} dX_c$$

После интегрирования в интервале X_c : $[0, \frac{|m|}{n} Z]$, где $n \geq 0$, и соответствующих преобразований получим, в отличие от [3], общее решение в виде двух уравнений:

$$0 > mP_0 \geq 4:$$

$$\frac{(2 \pm n)mP_0 \sqrt{1 - \frac{4}{mP_0}}}{(1 \pm n)mP_0 + n^2} = \ln \frac{mP_0 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4}{mP_0}}\right) \pm 2n}{mP_0 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4}{mP_0}}\right) \pm 2n} \quad (8)$$

$$0 < mP_0 \leq 4:$$

$$\frac{(2 \pm n)mP_0 \sqrt{\frac{4}{mP_0} - 1}}{(1 \pm n)mP_0 + n^2} = 2 \arctg \frac{mP_0 \sqrt{\frac{4}{mP_0} - 1}}{mP_0 + 2n} \quad (9)$$

Знаки $\pm$ указывают на режимы спада давления. Если $m > 0$ следует ставить «+», а при $m < 0$ необходимо подставлять «-». Анализ этих уравнений показывает, что они имеют единственное решение при $mP_0 = 4$ (рис. 2). Поэтому, расширение ПД вдоль кривой разгона происходит исключительно в режиме «слабого» спада давления ($m > 0$). Кроме того, в процессе преобразования текущей системы отсчета, путем ее перемещения вдоль кривой разгона с одновременным поворотом на соответствующий угол β , сохраняется выражение $mP = 4$. Следовательно, многослойному метанию в рамках данной модели свойственна непрерывная пространственная симметрия, где m играет роль индикатора давления – параметра, отображающего изменение величины давления вдоль кри-

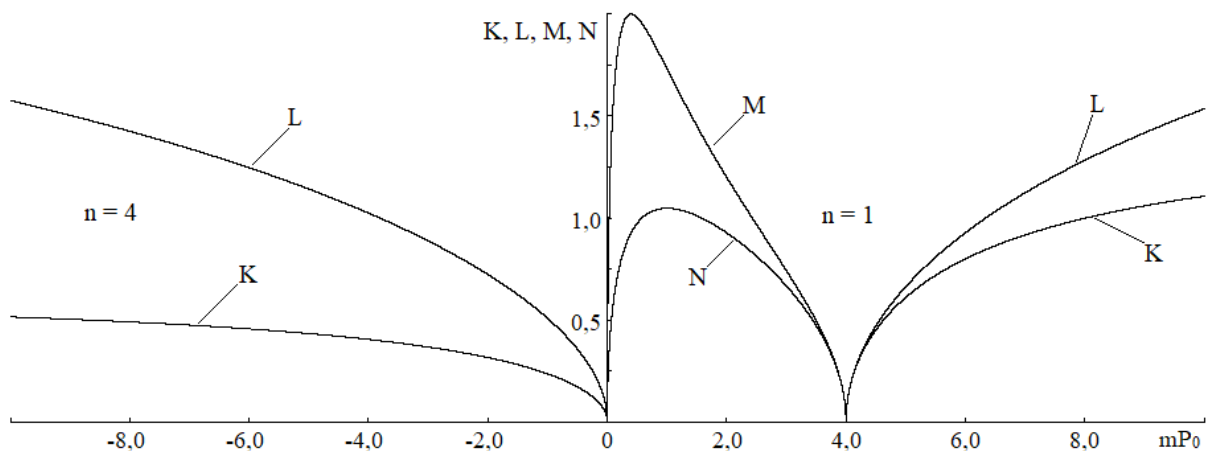


Рис. 2. Примеры графиков функций в уравнениях (8), (9):

$$K = \frac{(2 \pm n)mP_0 \sqrt{1 - \frac{4}{mP_0}}}{(1 \pm n)mP_0 + n^2}, L = \ln \frac{mP_0 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4}{mP_0}}\right) \pm 2n}{mP_0 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4}{mP_0}}\right) \pm 2n} \text{ и } M = \frac{(2 \pm n)mP_0 \sqrt{\frac{4}{mP_0} - 1}}{(1 \pm n)mP_0 + n^2}, N = 2 \arctg \frac{mP_0 \sqrt{\frac{4}{mP_0} - 1}}{mP_0 + 2n}$$

вой разгона.

Используя (2) – (5), (7) и $m = 4/P_0$, получим окончательное и единственное решение задачи, инвариантное относительно вышеуказанного преобразования:

$$Y_c = X_c \frac{P_0 \alpha}{P_0 \alpha + 2} \operatorname{tg} \beta^* \quad (10)$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{P_0 \alpha (P_0 \alpha + 4)}{(P_0 \alpha + 2)^2} \operatorname{tg} \beta^*, \quad (11)$$

$$P = P_0 \left(\frac{2 \cos \beta}{P_0 \alpha + 2} \right)^3 \quad (12)$$

Заключение

Чтобы пользоваться уравнениями (10) – (12), необходимо знать k , P_0 и β^* (или I_0 , если $r = 0$). Ниже, в сравнении с [1, 3], представлен более развернутый метод определения этих величин, включая несколько улучшенный способ расчета β^* и I_0 .

В таких прикладных задачах как сварка, штамповка, прессование порошков взрывом, как правило, используются ВВ, которые, имеют, по-видимому, значительно растянутую зону химической реакции, в пределах которой может существенно изменяться состав ПД, а следовательно, и показатель политропы. Кроме того, в реальных процессах при расширении ПД за зоной химической реакции показатель политропы имеет тенденцию к уменьшению. Поэтому представляется не совсем правильным использовать для расчета значение k в точке Жуге, найденное электромагнитным методом по значениям скорости детонации и массовой скорости ПД, измеренных на оси заряда. Здесь целесообразней применять «эффективное» (интегральное) значение показателя политропы (интегральный показатель политропы), то есть такое значение k , при котором наблюдается наилучшее совпадение расчета с экспериментом. Так в [5] k подбирали методом «наклонной проволочки» [6] (плоский аналог известного «цилиндр-теста» [4]) совместно с расчетами: по двумерной модели [7], с помощью которой отыскивалось наилучшее совпадение расчетной и экспериментальной конфигураций

метаемой пластины, и по формуле для предельной скорости V свободно метаемого ударника [8]:

$$V = \sqrt{2E_G} \frac{r_0 \sqrt{3}}{\sqrt{r_0^2 + 5r_0 + 4}}, \quad (13)$$

где r_0 – коэффициент нагрузки для ударника, E_G – энергия Гарни (часть теплоты взрыва, расходуемая на расширение ПД).

В данном случае E_G рассчитывали по уравнению:

$$E_G = 1/(2(k^2 - 1)) \quad (14)$$

Предельную скорость находили по известному выражению:

$$V = 2 \sin(\beta_{r_0}^*/2) \quad (15)$$

где $\beta_{r_0}^*$ – предельный угол поворота ударника, который определяли из эксперимента.

Найденные этими двумя способами k различались не более чем на 0,2. В [2, 3] эти два способа были объединены в один, где расчет проводился по [1]. Как оказалось, установленные там k достаточно хорошо совпали с интегральными показателями политропы, которые ранее были получены с помощью [7] для таких же зарядов ВВ.

Так как P_0 определяется как сумма давления перед моментом соударения метаемого слоя с мишенью и приращения давления в отраженной ударной волне, то первое слагаемое рассчитываем по (12), а второе находим методом, представленным в [9].

Для расчета β^* и I_0 считаем, что $X_0 \gg 0$ и при $X = X^*$:

$$P(X^*) \approx P_{r_0}(X^*), \quad (16)$$

где P_{r_0} – давление в ПД у поверхности свободно метаемого ударника.

Абсцисса X^* определяется из равенства:

$$P_r(X^*) - P_{r_0}(X^*) = \varepsilon, \quad (17)$$

где P_r – давление в ПД у поверхности свободно метаемой пластины, массой равной массе пакета; ε – наперед заданная сколь угодно малая величина.

Здесь (17) позволяет, в отличие от [1] и [3], более корректно выбирать ε .

Для расчета профиля давления вдоль жесткой стенки, необходимо знать импульс отраженных ПД при детонации ВВ вдоль пластины с бесконечной массой. Этот импульс (I_{00}) определяется из (13) при $r_0 \rightarrow 0$:

$$I_{00} = \sqrt{\frac{3}{2} E_G} \quad (18)$$

В общем случае скорость пакета зависит от коэффициентов нагрузки ударника и мишени, соотношения их масс и зазора между ними. Расчеты показали, что, комбинируя эти параметры при $k = \text{const}$, можно добиться ситуации, когда скорость пакета может даже превысить скорость того же пакета, но

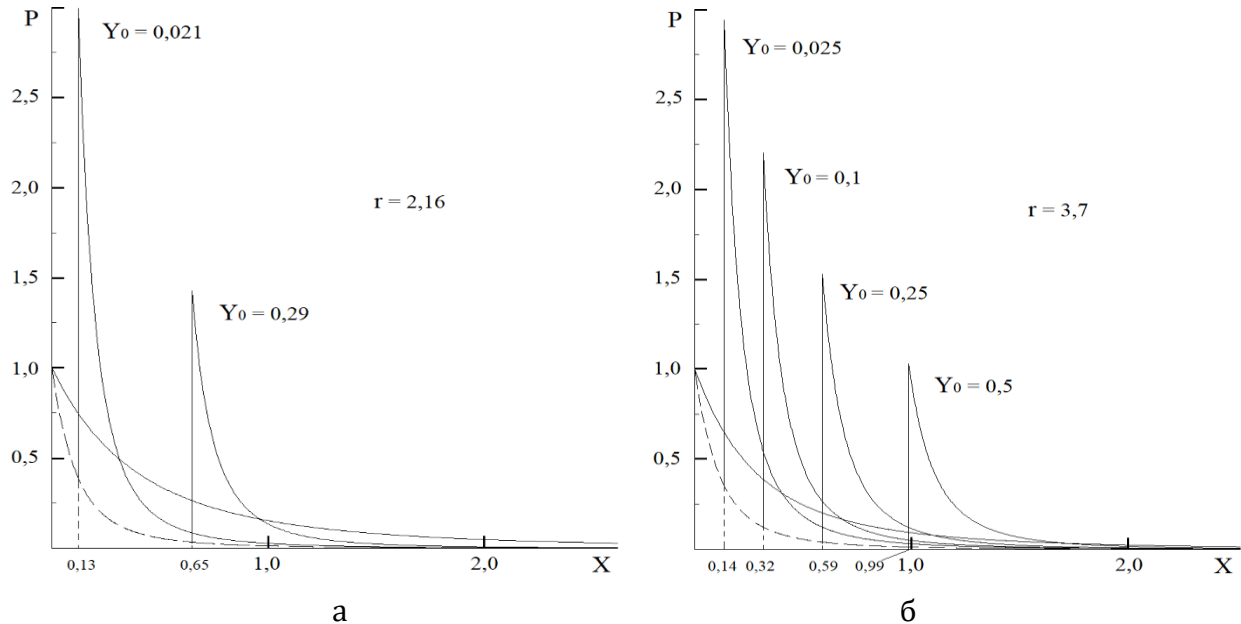


Рис. 3. Зависимости давления ПД на поверхность ударника от абсциссы при его свободном полете (прерывистые линии) и после его соударения с мишенью (сплошные линии) для различных значений зазора между ними:

а) расчет по исходным данным [2,3] ($r_0 = 12,9$ и $r_m = 2,59$); б) расчет при $r_0 = 12,9$ и $r_m = 5,18$ (r_m – коэффициент нагрузки для мишени)

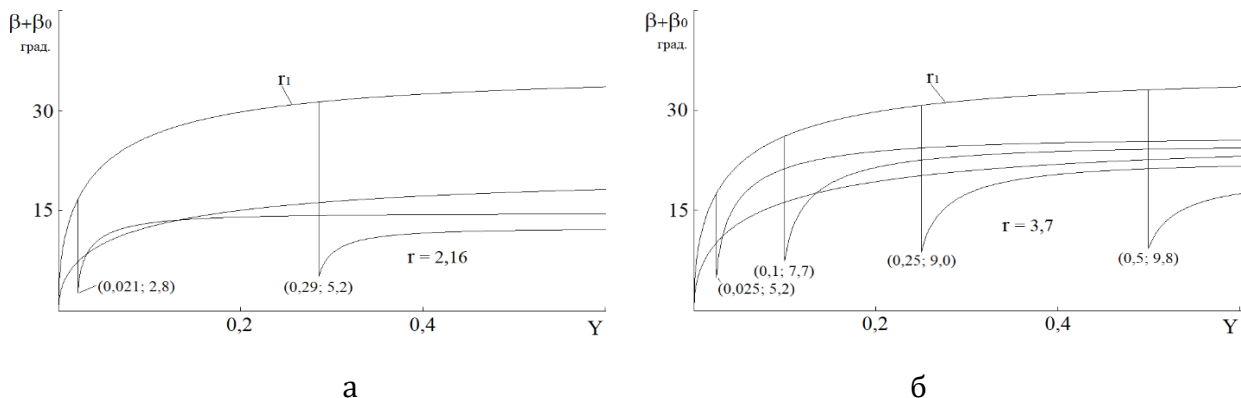


Рис. 4. Зависимости угла поворота от ординаты для ударника и пакета:

а) расчет по исходным данным [2,3] ($r_0 = 12,9$ и $r_m = 2,59$); б) расчет при $r_0 = 12,9$ и $r_m = 5,18$

Согласно вышеизложенному, если $r > 0$, то β^* находим из (12) с помощью (1), (5), (10), (11), (13) – (17), а если $r \rightarrow 0$, то I_0 находим из (12) с учетом условия II и использования (10), (11), (13) – (18).

метаемого в отсутствии зазора между пластинами. В качестве иллюстрации, на рис. 3 и 4 приведены результаты расчетов для $k = 2,6$. На рис. 3 показаны профили давления, соответствующие соударению ударника с

мишенью, при котором в ПД возникает прямая отраженная ударная волна [4]. На рис. 4 для тех же режимов соударения представлены зависимости угла поворота пакета от ординаты. Откуда видно, что при определенных значениях зазора между ударником и мишенью этот угол в некотором интервале Y становится больше угла поворота свободно метаемой пластины массой, равной массе пакета, за счет аномально-высокого прироста угла в начальной фазе разгона.

Выводы

1. Доказана единственность решения задачи и показано, что процесс метания обладает непрерывной пространственной симметрией.
2. Полностью раскрыт физический смысл параметра, отвечающего за режим спада давления.
3. При фиксированном значении интегрального показателя политропы, скорость пакета, в условиях соударения пластин с определенными значениями коэффициентов нагрузки и зазора между ними, становится больше скорости совместного полета пластин, изначально расположенных без зазора.

Библиографический список

1. О многослойном метании пластин скользящей детонационной волной / Ю. П. Бесшапошников, В. В. Пай, А. А. Петунин, В. И. Чернухин // Известия ВолгГТУ. Серия: Сварка взрывом и свойства сварных соединений. – 2018. – № 11 (221). – С. 22-27.
2. Бесшапошников, Ю. П. Прямая ударная волна в продуктах детонации при сварке взрывом / Ю. П. Бесшапошников, В. В. Пай, В. И. Чернухин // Известия ВолгГТУ. Серия: Сварка взрывом и свойства сварных соединений. – 2019. – № 11 (234). – С. 11-18.
3. A mathematical model of the layered plate throwing by detonation products / Y. P. Besschaposchnikov, V. V. Pai, V. I. Chernukhin, A. A. Petunin // AIP Conference Proceedings. – 2021. – Vol. 2333 (1). – Pp. 090023. <https://doi.org/10.1063/5.0041899>
4. Физика взрыва / Орленко Л. П. – Изд. 3-е, испр. – В 2 т. Т. 1. – М.: Физматлит, 2004. – 832 с.
5. Бесшапошников, Ю. П. Динамика движения пластины, метаемой скользящей детонационной волной / Ю. П. Бесшапошников // Физика горения и взрыва. – 1999. – Т. 35. – №1. – С. 122-126.
6. Кузьмин, Г. Е. О метании плоских пластин слоями конденсированных ВВ / Г. Е. Кузьмин, В. И. Мали, В. В. Пай // Физика горения и взрыва. – 1973. – Т. 9. – №4. – С. 558-561.
7. Дерибас, А. А. Двумерная задача о метании пластины скользящей детонационной волной / А. А. Дерибас, Г. Е. Кузьмин // Прикладная механика и техническая физика. – 1970. – Т. 11. – №1. – С. 177-180.
8. Дерибас, А. А. Физика упрочнения и сварки взрывом / А. А. Дерибас – 2-е изд. доп. перераб. – Новосибирск: Наука, 1980. – 222 с.
9. Бесшапошников, Ю. П. Об особенностях определения остаточного давления продуктов взрыва при косом соударении пластин / Ю. П. Бесшапошников. // Сварка взрывом и свойства сварных соединений. Межвуз. сб. науч. трудов. – ВолгГТУ. – Волгоград. – 2002. – С. 65-75.