

УДК 519.834

DOI 10.35211/1990-5297-2023-9-280-51-59

*Е. А. Марчук<sup>1</sup>, Н. Г. Шаронов<sup>2</sup>***РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СИЛ НАТЯЖЕНИЯ  
В СИСТЕМЕ ТРОСОВОГО ПАРАЛЛЕЛЬНОГО РОБОТА  
В ФОРМАЛИЗАЦИИ ТЕОРИИ ИГР\***<sup>1</sup> Университет Иннополис<sup>2</sup> Волгоградский государственный технический университет

e.marchuk@innopolis.ru

Описывается метод решения специфической задачи тросового параллельного робота, распределения сил натяжения в системе тросов. Предлагаемый метод основывается на формализации задачи в контексте теории игр, где силы натяжения тросов являются ресурсами, а тросы – игроками. Оптимальное решение задачи находится через определение вектора Шепли для коалиции игроков. С использованием численного моделирования производится сравнение оптимального решения для кооперативной игры с оптимальным решением в неотрицательных наименьших квадратах.

*Ключевые слова:* трос, натяжение, распределение ресурсов, теория игр, тросовый робот.

*Е. А. Marchuk<sup>1</sup>, N. G. Sharonov<sup>2</sup>***PROBLEM OF TENSION DISTRIBUTION IN A SYSTEM  
OF CABLE-DRIVEN PARALLEL ROBOT: GAME THEORY FORMALIZATION**<sup>1</sup> Innopolis University<sup>2</sup> Volgograd State Technical University

The article deals with a specific problem of cable-driven parallel robot, namely the problem of tension distribution in cable system. The proposed method is based on the formalization a problem of tension distribution in terms of Game Theory, the cables assumed the players, and forces in cables assumed the resources. Optimal solution has been found with a concept of Shapley value, and then compared with a solution in non-negative least squares.

*Keywords:* cable, tension, resource distribution, game theory, cable-driven robot.

**Введение**

Специфической задачей автоматического управления тросовых параллельных роботов является задача распределения сил натяжения в системе тросов. Известны численные методы поиска оптимального распределения сил натяжения в системе тросов: метод Дайкстры, метод пункций и т. д. [1, 2]. В некоторых случаях возможно аналитическое решение, примеры приводятся авторами [3]. Методы разработки и проектирования тросовых параллельных роботов, в том числе относящиеся к автоматическому управлению роботом, продолжают развиваться; наиболее полное описание тросовой робототехники приводится авторами [4, 5]. Обратим внимание, что в приведенных выше источниках примеры решения задачи распределения сил натяжения в системе тросов не используют методы искусственного интеллекта. Таким образом, формализация задачи распределения сил натяжения в системе тросов с ис-

пользованием методов искусственного интеллекта в области тросовой робототехники может обладать научной новизной.

Заметим, что класс задач распределения ресурсов между несколькими действующими лицами может быть проиллюстрирован классическими примерами теории игр. Теория игр возникла в 20-е гг. XX века и изначально была посвящена проблемам экономики [6]. Однако в дальнейшем основные понятия теории игр были обобщены с учетом более широкого спектра задач, и в настоящее время используются далеко за пределами экономических моделей. В инженерных науках известны теоретико-игровые методы расчетов статических конструкций, теоретико-игровое автоматическое управление, теоретико-игровые методы проектирования сетей и т. д. [7–10]. Отождествление свойств объекта исследования с некоторыми характерными чертами поведения живых и разумных действующих лиц является ключевой идеей теории игр.

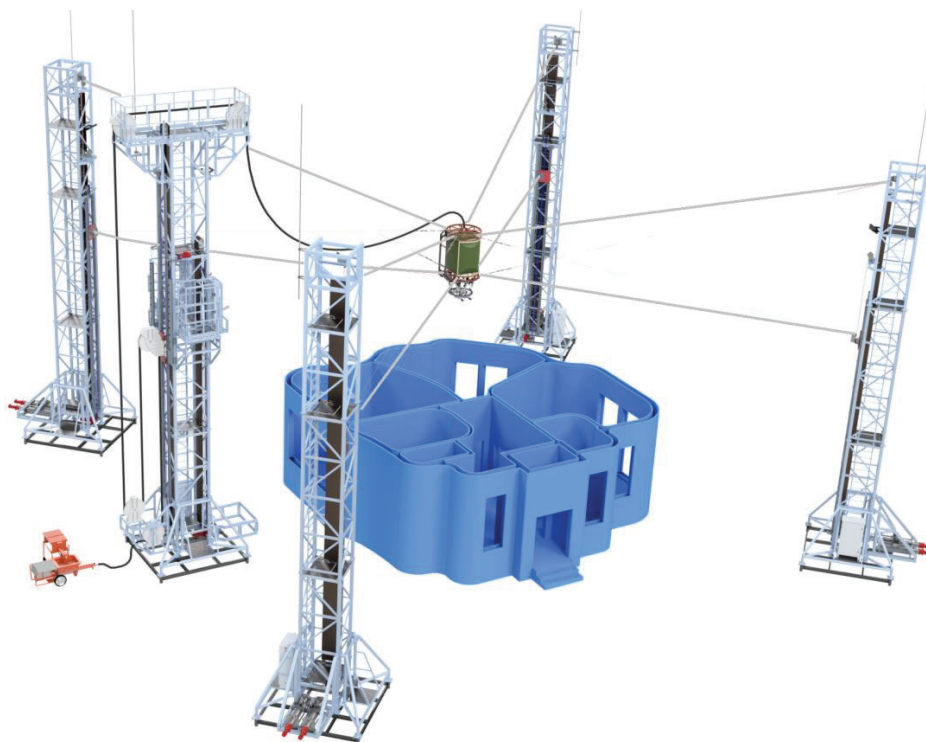


Рис. 1. Модель строительного роботизированного комплекса Университета Иннополис

#### Задача компенсации внешнего воздействия

В настоящей статье задача распределения сил натяжения в системе тросов рассматривается на примере крупногабаритного тросового параллельного робота, предназначенного для строительства зданий методом аддитивных технологий (Университет Иннополис). Согласно разработанной концепции автоматического управления крупногабаритным тросовым параллельным роботом, система тросов делится на две подсистемы: группу верхних и группу нижних тросов [11, 12]. Для указанного примера строительного роботизированного комплекса задача распределения сил натяжения в системе тросов становится актуальной при появлении внешнего воздействия [11, 12]. Для заданной конфигурации тросовой системы основная нагрузка при возникновении реакций на типичное внешнее воздействие (к примеру, натяжение подающего шланга) распределяется в группе нижних тросов [13]. Далее рассматривается задача распределения сил натяжения применительно к группе нижних тросов крупногабаритного тросового параллельного робота.

В векторном представлении кинематика тросовой системы приобретает вид:

$$\mathbf{l}_i = \mathbf{a}_i - \mathbf{R}\mathbf{b}_i - \mathbf{r}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{l}_i$  – вектор, соединяющий точку схода  $i$ -го троса с направляющего ролика с точкой креп-

ления троса к рабочему инструменту робота;  $\mathbf{a}_i$  – вектор, соединяющий начало неподвижной системы координат с точкой схода  $i$ -го троса с направляющего ролика;  $\mathbf{R}$  – матрица поворота;  $\mathbf{b}_i$  – вектор, соединяющий начало подвижной системы координат с точкой крепления троса к рабочему инструменту робота;  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор, соединяющий начало неподвижной системы координат с началом подвижной системы координат.

Матрица Якоби используется для перевода скоростей из пространства приводов в пространство рабочего инструмента робота. Для нижней группы тросов рассматриваемого робота матрица приобретает вид:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{l}_1}{\|\mathbf{l}_1\|_2} & \dots & \frac{\mathbf{l}_4}{\|\mathbf{l}_4\|_2} \\ \mathbf{b}_1 \times \frac{\mathbf{l}_1}{\|\mathbf{l}_1\|_2} & \dots & \mathbf{b}_4 \times \frac{\mathbf{l}_4}{\|\mathbf{l}_4\|_2} \end{bmatrix}^{3 \times 4}. \quad (2)$$

Также матрица (2) удобна для перевода сил и моментов между обозначенными выше пространствами.

Будем полагать, что автоматическое управление группой четырех верхних тросов восьми-тросового робота обеспечивает «скольжение» мобильной платформы в горизонтальной плоскости с незначительными отклонениями по углам крена и тангажа [11, 12]. Тогда для группы

нижних тросов, лежащих в горизонтальной плоскости согласно заданной конфигурации, задача статического равновесия может рассматриваться как плоская задача. Согласно принципу Даламбера

$$\mathbf{J}^{3 \times 4} \mathbf{f}_c^{4 \times 1} + \mathbf{w}^{3 \times 1} = \mathbf{0}^{3 \times 1}, \quad (3)$$

где  $\mathbf{J}$  – матрица Якоби;  $\mathbf{f}$  – вектор сил натяжений в тросах;  $\mathbf{w}_p$  – вектор внешних сил и моментов.

Система неопределенна, поскольку платформа (нижняя часть мобильной платформы) с тремя степенями свободы в рассматриваемом примере плоской задачи приводится в движение четырьмя приводами. В таком случае, общее решение системы линейных алгебраических уравнений (3) имеет вид:

$$\mathbf{f}_c^{4 \times 1} = \mathbf{f}_p^{4 \times 1} + \mathbf{f}_s^{4 \times 1}. \quad (4)$$

Очевидно, что решение системы (3) не представляет затруднений в случае отсутствия каких-либо ограничений на компоненты найденного вектора сил.

Однако при появлении внешнего воздействия для компенсации отклонения от состояния равновесия системы при задействовании всех четырех тросов часть тросов должна «толкать» вместо того, чтобы «тянуть». Но поскольку тросы являются односторонними связями,

«толкающее» усилие некоторых тросов оказывается нулевым, и система (3) трансформируется из неопределенной системы в определенную или переопределенную. Отсюда следует вывод, что решение системы (3) должно удовлетворять условию неотрицательных компонентов вектора сил натяжений в тросах при существовании такого решения.

#### Решение в неотрицательных наименьших квадратах

Одним из способов решения задачи распределения сил натяжения в тросовой системе может стать решение в неотрицательных наименьших квадратах [14]. Авторами разработан вычислительный метод, предполагающий двухэтапное нахождение оптимального решения в наименьших квадратах [15]. На первом этапе решается задача нахождения минимальной нормы наименьших квадратов. Полученные отрицательные компоненты вектора решения и соответствующие им столбцы матрицы обнуляются, поскольку тросы достаточно большой длины могут тянуть, но не могут толкать. Затем повторяется процедура нахождения минимальной нормы наименьших квадратов. Следует заметить, что качество управления нижней группой тросов ухудшается при увеличении числа нулевых элементов вектора решения.

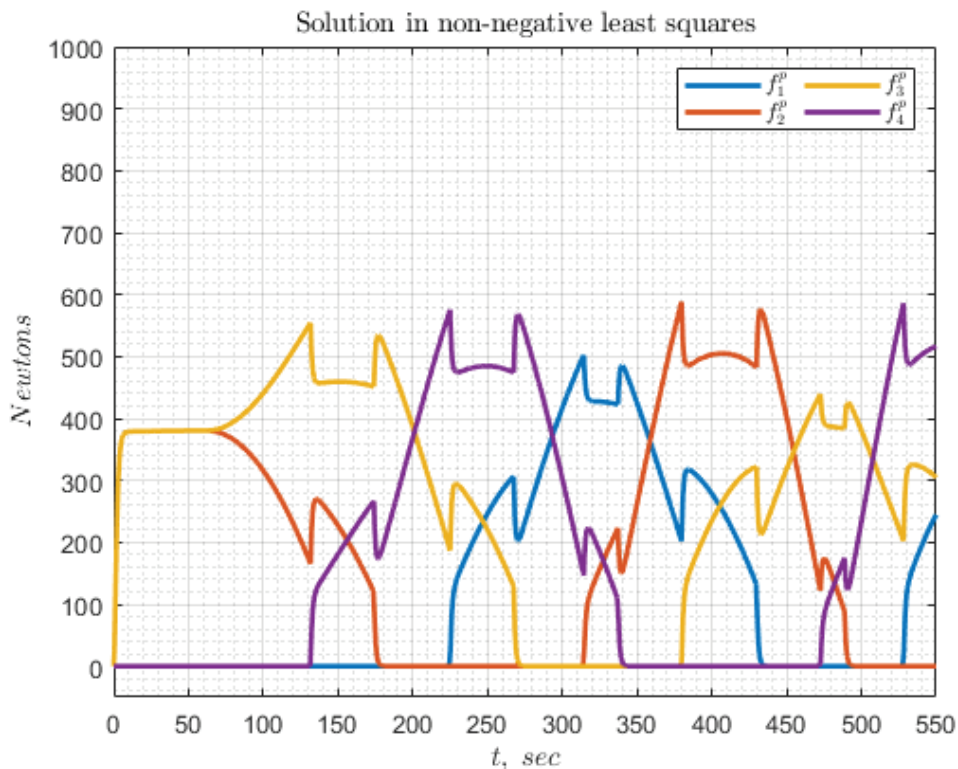


Рис. 2. Силы натяжения тросов в конфигурационном пространстве: решение в неотрицательных наименьших квадратах

Метод неотрицательных наименьших квадратов обеспечивает оптимальное решение и обладает достоинством простоты алгоритма вычисления. Предложенный метод может применяться в задачах управления крупногабаритного тросового параллельного робота в реальном времени. Однако численное моделирование показывает, что в моменты перераспределения сил натяжения появляются резкие провалы, которые могут стать причиной нежелательных колебаний мобильной платформы крупногабаритного тросового параллельного робота (рис. 2).

#### Решение кооперативной игры для четырех игроков: вектор Шепли

В качестве альтернативного способа решения задачи распределения сил натяжения в тросовой системе рассмотрим теоретико-игровой подход. При формализации задачи распределения сил натяжения в системе тросов в контексте теории игр полагается, что каждый участник игры «трос» участвует в производстве некоторого продукта, которым в настоящей задаче является вектор сил и моментов в рабочем пространстве робота, с использованием некоторых ресурсов, которыми в настоящей задаче являются компоненты вектора сил в конфигурационном пространстве робота. Для достиже-

ния максимальной выгоды, игроки могут объединяться в коалиции. Таким образом, мы формализовали задачу распределения сил натяжения в системе тросов как кооперативную игру.

После формализации в контексте теории игр задача может быть решена, к примеру, с использованием геометрического подхода. Алгоритм решения основан на поиске точки, лежащей в пространстве ядра игры внутри  $n$ -мерного симплекса; для четырех игроков полагается  $n = 4$ .

$$\begin{aligned} v(C) &= \max_{x \geq 0} (c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_4) \\ j_{11}x_1 + j_{12}x_1 + j_{13}x_1 + j_{14}x_1 &\leq F_x \\ j_{21}x_1 + j_{22}x_1 + j_{23}x_1 + j_{24}x_1 &\leq F_y \\ j_{31}x_1 + j_{32}x_1 + j_{33}x_1 + j_{34}x_1 &\leq M_0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Нахождение ядра игры предполагает нахождение области внутри симплекса, образованной пересечением гиперплоскостей, задающих ограничения в (5). Координаты искомой точки, принадлежащей ядру игры, определяются в соответствии с понятием вектора Шепли, что соответствует оптимальному решению задачи распределения ресурсов с учетом влияния каждого игрока на коалицию.

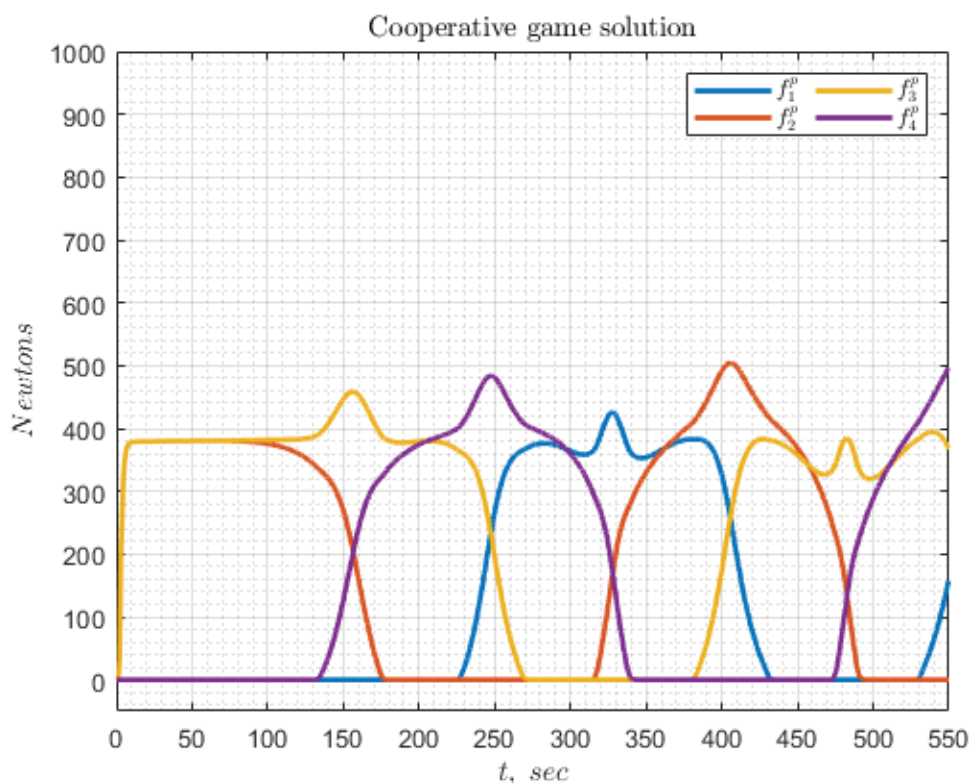


Рис. 3. Силы натяжения тросов в конфигурационном пространстве: решение кооперативной игры для четырех игроков (вектор Шепли)

Метод кооперативной игры обеспечивает оптимальное решение в смысле вектора Шепли и обладает достоинством простоты алгоритма вычисления. Предложенный метод может применяться в задачах управления крупногабаритного тросового параллельного робота в реальном времени. Численное моделирование показывает, что в моменты перераспределения сил натяжения резких провалов не происходит, силы натяжения в тросах изменяются плавно (рис. 3).

### Численное моделирование

Численный эксперимент проводится следующим образом: для некоторого внешнего усилия, приложенного к мобильной платформе крупногабаритного тросового параллельного робота, находятся реакции в проекции на пространство конфигураций в соответствии с критерием неотрицательных компонентов вектора сил натяжений в тросах.

На рис. 4 приводится сравнение решения в неотрицательных наименьших квадратах с решением кооперативной игры для четырех игроков.

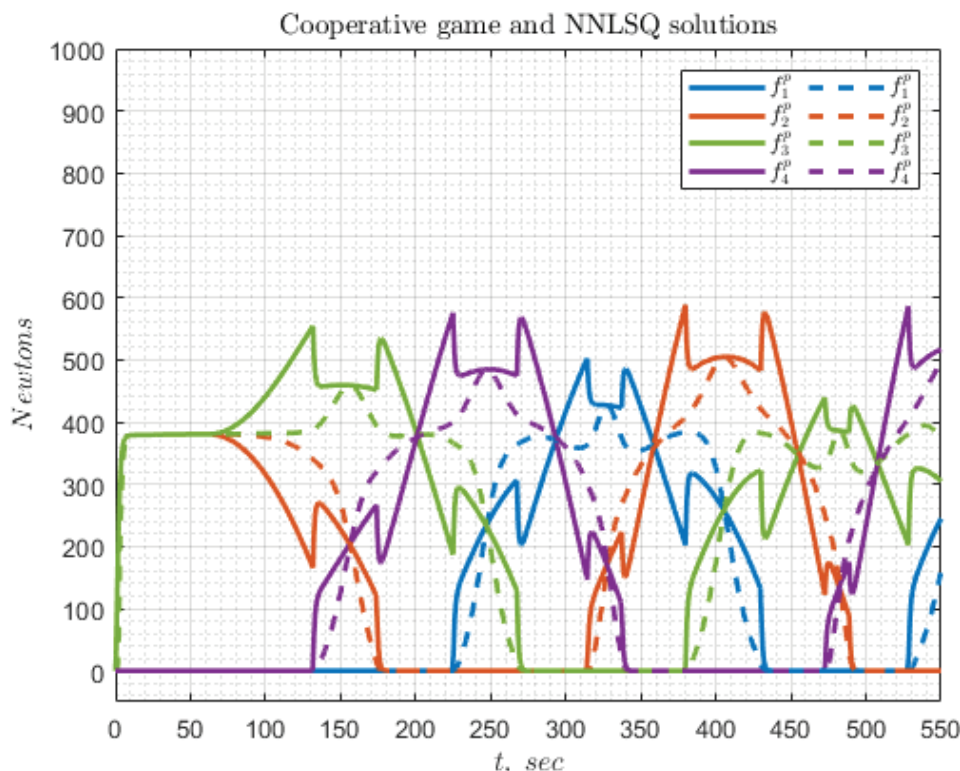


Рис. 4. Сравнение решений задачи оптимального распределения сил натяжения тросов в конфигурационном пространстве: кооперативной игры (пунктирная линия) и неотрицательных наименьших квадратов (сплошная линия)

Для обоих методов найденное решение неотрицательных компонентов вектора сил натяжений в тросах проецируется из пространства конфигураций в рабочее пространство робота и сравнивается с вектором сил и моментов внешнего усилия в рабочем пространстве робота, рис. 5.

Решение в неотрицательных наименьших квадратах обеспечивает практически полное соответствие проекции решения заданному внешнему воздействию.

Решение кооперативной игры для четырех игроков обеспечивает неполное соответствие проекции решения заданному внешнему воздействию, однако дальнейшая проверка показывает эффективность предложенного метода.

Конечной целью регулирования натяжения системы тросов является минимизация отклонений мобильной платформы крупногабаритного тросового параллельного робота от заданных значений положения и ориентации при появлении внешнего воздействия на мобильную платформу.

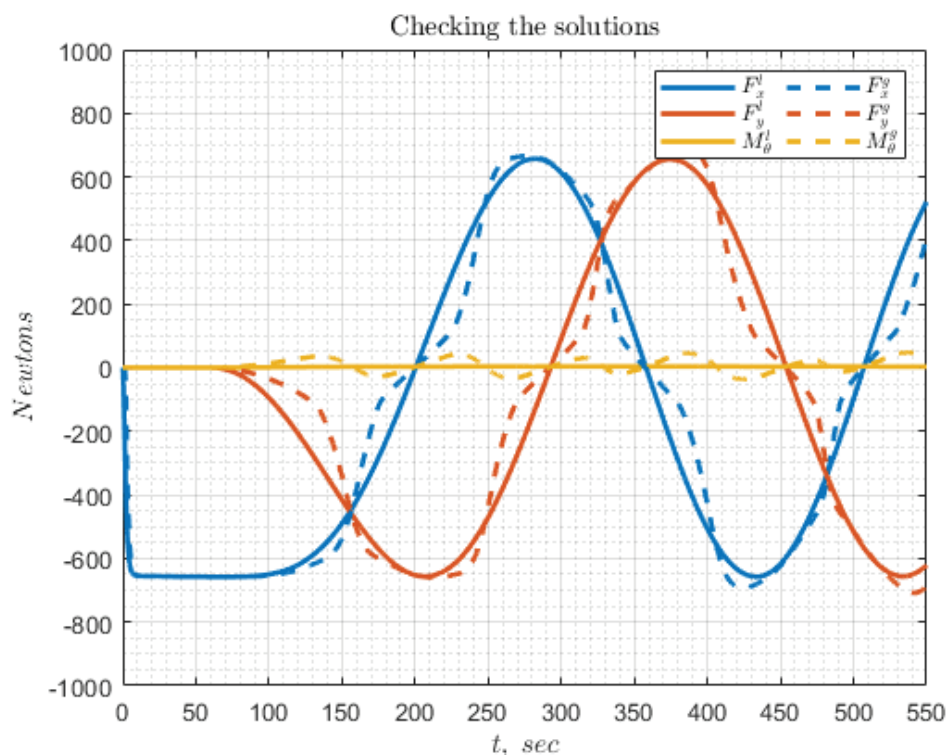


Рис. 5. Сравнение решений задачи оптимального распределения сил натяжения тросов в рабочем пространстве робота: кооперативной игры (пунктирная линия) и неотрицательных наименьших квадратов (сплошная линия)

На рис. 6 приводится пример отклонений от заданных значений положения и ориентации мобильной платформы при движении по задан-

ной траектории с присоединенным подающим шлангом без коррекции сил натяжения нижней группы тросов.

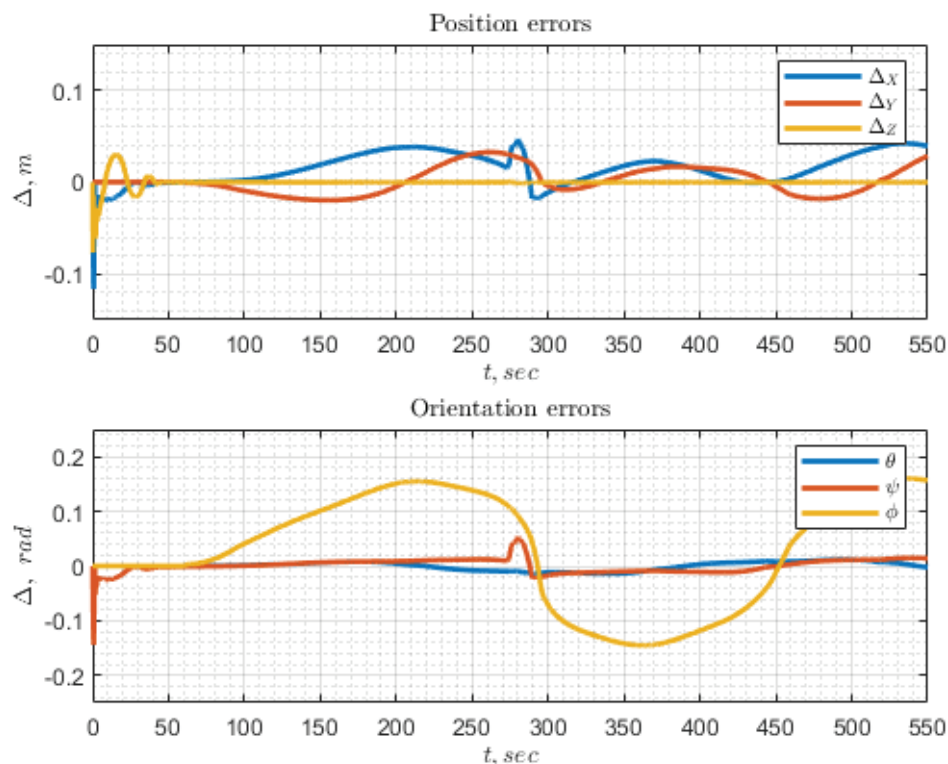


Рис. 6. Отклонения мобильной платформы с присоединенным шлангом подачи строительной смеси (без коррекции сил натяжения нижней группы тросов)

Численное моделирование показывает, что в отсутствие коррекции распределения сил натяжения в тросовой системе отклонения от заданного положения мобильной платформы невелики, и средние значения не превышают  $5 \times 10^{-2}$  м в движении со скоростью не более  $2,5 \times 10^{-1}$  м/с при линейных размерах робота в десятки метров и массе мобильной платформы в сотни килограммов [16]. При этом отклонения от заданной ориентации мобильной платформы относительно поворотов вокруг вертикальной оси до  $1,5 \times 10^{-1}$  рад считаются довольно большими.

На рис. 7 и 8 приводятся примеры отклонений от заданных значений положения и ориентации мобильной платформы при движении по заданной траектории с присоединенным подающим шлангом и с коррекцией сил натяжения нижней группы тросов.

Численное моделирование показывает, что для обоих предложенных методов регулирования распределения сил натяжения в тросовой системе отклонения от заданного положения мобильной платформы уменьшаются приблизительно в два раза, и средние значения не пре-

вышают  $2 \times 10^{-2}$  м в движении со скоростью не более  $2,5 \times 10^{-1}$  м/с при линейных размерах робота в десятки метров и массе мобильной платформы в сотни килограммов. Отклонения от заданной ориентации мобильной платформы относительно поворотов вокруг вертикальной оси также уменьшаются приблизительно в два раза, и средние значения не превышают  $8 \times 10^{-2}$  рад, что можно считать хорошим результатом.

Заметим, что несмотря на неполное соответствие проекции решения заданному внешнему воздействию для метода кооперативной игры, конечный результат практически не отличается от метода неотрицательных наименьших квадратов (рис. 7 и 8). Незначительное отличие можно наблюдать в отклонениях относительно поворотов вокруг вертикальной оси на интервале от 50 до 250 секунды движения мобильной платформы.

Также следует отметить отсутствие заметных колебаний мобильной платформы в моменты перераспределения сил натяжения при использовании как метода кооперативной игры, так и метода неотрицательных наименьших квадратов.

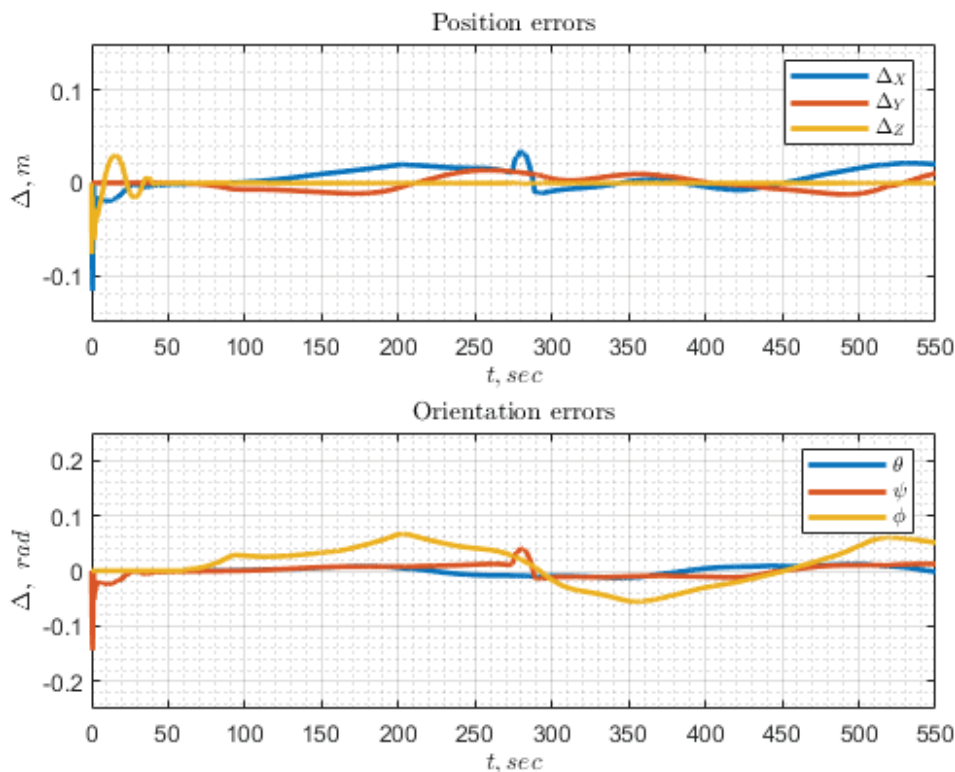


Рис. 7. Отклонения мобильной платформы с присоединенным шлангом подачи строительной смеси (распределение сил натяжения нижней группы тросов как решение кооперативной игры)

### Выводы

В настоящем исследовании предложен метод решения специфической задачи тросового параллельного робота, распределения сил натяжения в системе тросов, основанный на теоретико-игровом представлении распределения ресурсов между действующими лицами.

Результатом данной работы является под-

тверждение эффективности предложенного теоретико-игрового метода распределения сил натяжения в системе тросов крупногабаритного тросового параллельного робота, полученное в результате численного моделирования движения мобильной платформы параллельного тросового робота с присоединенным подающим шлангом.

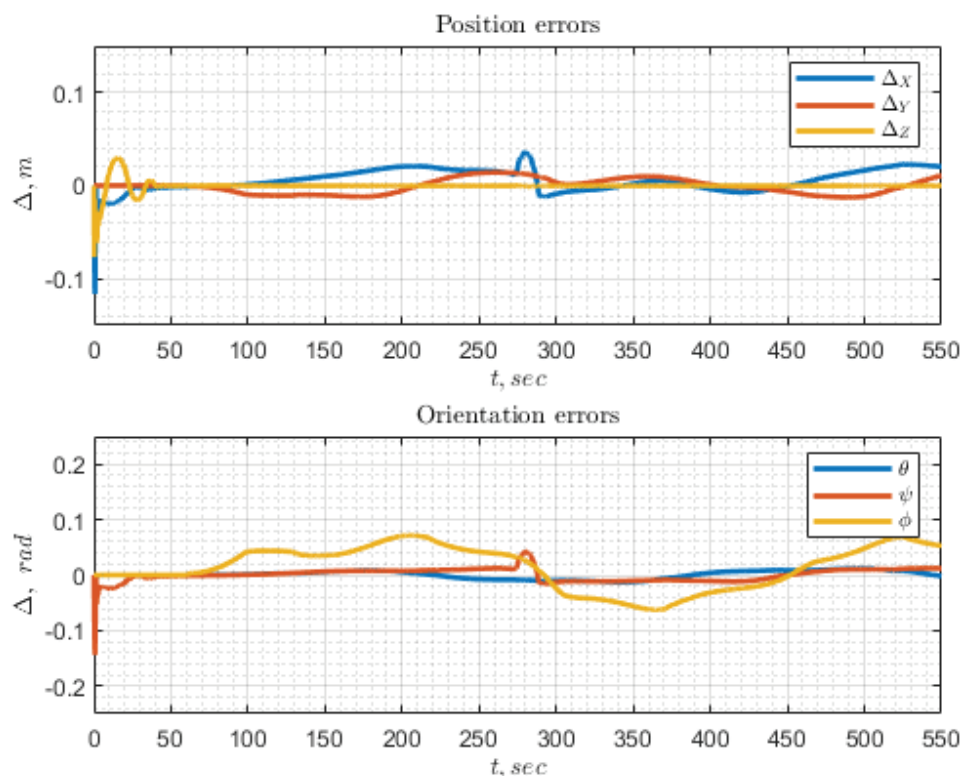


Рис. 8. Отклонения мобильной платформы с присоединенным шлангом подачи строительной смеси (распределение сил натяжения нижней группы тросов как решение в неотрицательных наименьших квадратах)

Компьютерное моделирование показало эффективность предложенного метода кооперативной игры в коррекции отклонений мобильной платформы робота, вызванных натяжением подающего шланга.

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Boyle, J. P. A method for finding projections onto the intersection of convex sets in Hilbert spaces / J. P. Boyle, R. L. Dykstra // *Lecture Notes in Statistics*. – 1986. – № 37. – С. 28–47.
2. Hassan, M. Minimum-norm Solution for the Actuator Forces in Cable-based Parallel Manipulators based on Convex Optimization / M. Hassan, A. Khajepour // *Proceedings 2007 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. – 2007. – С. 1498–1503.
3. Mikelsons, L. A real-time capable force calculation algorithm for redundant tendon-based parallel manipulators / L. Mikelsons, T. Bruckmann, D. Schramm, M. Hiller // *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. – 2008. – С. 3869–3874.
4. Zi, B. Design, Analysis and Control of Cable-Suspended Parallel Robots and Its Applications / B. Zi, S. Qian. – Springer, 2017. – 299 с.
5. Pott, A. Cable-Driven Parallel Robots: Theory and Application / A. Pott. – Springer, 2018. – 465 с.
6. Neumann, J. von. Theory of Games and Economic Behavior (60th Anniversary Commemorative Edition) / J. von Neumann, O. Morgenstern, A. Rubinstein. – Princeton University Press, 1944. – 776 p.
7. Bauso, D. Game Theory with Engineering Applications / D. Bauso. – SIAM Series: Advances in Design and Control, 2016. – 276 p.
8. Marden, J. R. Game-Theoretic Learning in Distributed Control / J. R. Marden, J. S. Shamma, // In: Basar, T., Zaccour, G. (eds). *Handbook of Dynamic Game Theory*. – Springer, Cham, 2017. – 1285 p.
9. Rao, S. S. Game theory approach for multiobjective structural optimization / S. S. Rao // *Computers and Structures*. – 1987. – № 25(1). – P. 119–127.
10. Marchuk, E. Mathematical modeling and dynamic processes in chemistry: the game theory approach to the synthesis of polyimides / E. Marchuk, M. Nakhod, Ya. Kalinin // *2020 International Conference Nonlinearity, Information and Robotics (NIR)*. – 2020. – P. 1.

11. *Marchuk, E.* Error Compensation in Position and Orientation of Mobile Platform of Cable-Driven Robots via Tensile Forces Measurement / E. Marchuk, Ya. Kalinin, A. Maloletov // *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie.* – 2022. – № 23(10). – P. 515–522.

12. *Marchuk, E.* On the Problem of Position and Orientation Errors of a Large-Sized Cable-Driven Parallel Robot / E. Marchuk, Ya. Kalinin, A. Sidorova, A. Maloletov // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics.* – 2022. – № 18(5). – P. 755–770.

13. *Marchuk, E.* On Mathematical Modeling of Sagging Elements of Large-Sized Parallel Cable-Driven Robot / E. Marchuk, Ya. Kalinin, M. Ivanou, A. Maloletov // *Izvestia of Volgograd State Technical University.* – 2022. – № 9(268). – P. 56–62.

14. *Lawson, C. L.* Solving Least Squares Problems / C. L. Lawson, R. J. Hanson. – Society for Industrial and Applied Mathematics, 1995. – 350 p.

15. *Marchuk, E. A.* Distribution of Tension Forces in Cable System of Cable-Driven Parallel Robot with Linear Algebra Methods / E. A. Marchuk, A. S. Mikhailov, Ya. V. Kalinin, A. V. Maloletov // *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2023. (*under review*).

16. *Marchuk, E.* On Smooth Planar Curvilinear Motion of Cable-Driven Parallel Robot End-Effector / E. Marchuk, Ya. Kalinin, A. Maloletov // *10th IFAC Conference on Manufacturing Modelling, Management and Control.* – 2022. – № 55 (10). – P. 2475–2480.