

*А. В. Леонард*

**ПЛАНИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ РОБОТА С ОБХОДОМ СТАТИЧНОГО ПРЕПЯТСТВИЯ  
НА ОСНОВЕ РЕШЕНИЯ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ ПРИ ЗАДАННЫХ НАЧАЛЬНЫХ  
И КОНЕЧНЫХ КООРДИНАТАХ, СКОРОСТЯХ И ОПЕРАТИВНОМ ВРЕМЕНИ**

**Волгоградский государственный технический университет**

*Alex-Leonard@yandex.ru*

Рассматривается задача оптимального планирования движения наземного робота с обходом одного статического препятствия при заданных краевых условиях и времени движения. Предлагаемый метод планирования движения основывается на применении методов вариационного исчисления с разделением планирования движения на этапы.

*Ключевые слова:* мобильный робот, планирование движения, вариационное исчисление, оптимальное управление.

*A. V. Leonard*

**ROBOT MOVEMENT PLANNING WITH BYPASSING A STATIC OBSTACLE  
ON THE BASIS OF SOLUTION OF THE VARIATIONAL PROBLEM FOR  
THE SPECIFIED INITIAL AND END COORDINATES, SPEEDS AND OPERATING TIME**

**Volgograd State Technical University**

The article deals with the issue of developing the method for optimal planning of the movement of a ground robot with a bypass of one static obstacle for given boundary conditions and time of movement. The proposed method to traffic planning is based on the use of only the calculus of variations with the division of planning into stages.

*Keywords:* mobile robot, motion planning, calculus of variations, optimal control.

**Введение**

В отличие от существующих «классических методов АРФ» [1–4], в работах [5–7] представлен подход по планированию движения робота, основывающийся на совместном использовании методов вариационного исчисления и искусственного поля, отталкивающего робота от границ препятствия. При этом заданы оперативное время, начальные и конечные координаты,

скорости робота. Отталкивающее поле пространственно ограничено – имеет внешнюю и внутреннюю границы в форме окружностей. Приближение линии вектора абсолютной скорости центра масс робота к центру препятствия приводит к росту числа касаний (центром робота) внутренней границы отталкивающего от препятствия поля. Как следствие, возрастает вероятность непопадания робота в финальную

точку за отведенное оперативное время. Когда линия вектора скорости центра масс робота проходит через геометрический центр препятствия, центр масс робота совершает ряд колебательных движений и останавливается на границе поля. Размер поля существенным образом влияет на физическую реализуемость обхода статического препятствия. В связи с этим предлагается отказаться от использования искусственного отталкивающего поля. Для этого в первом приближении ставится и решается следующая модельная задача.

### 1. Постановка задачи

Необходимо получить законы движения центра масс наземного робота, которые обеспечивают его перемещение из заданной начальной точки  $O$  в конечную  $F$  за отведенное время  $\tau$  с обходом одного статического препятствия (рис. 1).

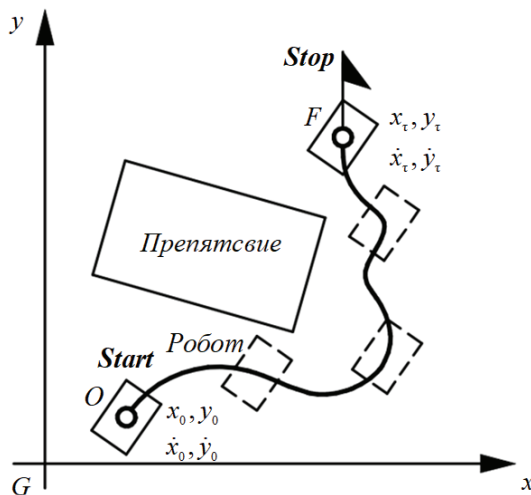


Рис. 1. Постановка задачи

При этом полагается: даны начальные и конечные координаты, скорости робота  $x_0, \dot{x}_0, y_0, \dot{y}_0; x_\tau, \dot{x}_\tau, y_\tau, \dot{y}_\tau$ ; робот движется по плоскому горизонтальному основанию без сил сопротивления; робот обладает идеальной маневренностью – способен реализовать любую траекторию движения центра масс как угодно

быстро; система управления и сенсоры робота мгновенно считывают и обрабатывают информацию об окружающей среде на заданном расстоянии  $r_L$ . Перемещение робота можно разделить на три этапа: 1 – сенсоры робота не фиксируют препятствие (глобальное планирование); 2 – сенсоры обнаруживают препятствие, движение до препятствия (локальное планирование); 3 – движение от препятствия в конечную точку (глобальное планирование).

### 2. Метод решения

Так как силы сопротивления отсутствуют и робот перемещается по горизонтальному плоскому основанию, то потребные усилия привода вдоль оси абсцисс и оси ординат определяются исходя из соотношений соответственно:

$$X = m\ddot{x}, Y = m\ddot{y}. \quad (1)$$

Результирующая сила привода может быть найдена из выражения

$$F = \sqrt{m^2 \ddot{x}^2 + m^2 \ddot{y}^2}. \quad (2)$$

В качестве критерия оценки движения робота предлагается следующий функционал, который должен быть минимизирован:

$$I = \int_0^\tau \Phi dt \rightarrow \min, \Phi = F^2. \quad (3)$$

Таким образом, исходя из условий минимума функционала (3) – уравнений Эйлера – Пуассона

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \ddot{q}_i} \right) = 0, q_1 = x, q_2 = y, \quad (4)$$

законы движения центра масс робота в дифференциальной форме примут следующий вид:

$$x^{(IV)} = 0, y^{(IV)} = 0. \quad (5)$$

Для **I режима** (в отсутствии прямой видимости препятствия), с учетом заданных граничных условий:  $x_0, \dot{x}_0, y_0, \dot{y}_0; x_\tau, \dot{x}_\tau, y_\tau, \dot{y}_\tau$ , законы движения в интегральном виде, константы интегрирования  $C_{ii}$  и  $D_{ii}$  определяются через соотношения:

$$\begin{aligned} x_t &= C_{t0} + C_{t1}t + C_{t2}\frac{t^2}{2} + C_{t3}\frac{t^3}{6}, & y_t &= D_{t0} + D_{t1}t + D_{t2}\frac{t^2}{2} + D_{t3}\frac{t^3}{6}, & 0 \leq t \leq \tau, \\ C_{t0} &= x_0, & C_{t1} &= \dot{x}_0, \\ C_{t2} &= 6\frac{x_\tau - x_0}{\tau^2} - \frac{4\dot{x}_0 + 2\dot{x}_\tau}{\tau}, & C_{t3} &= 6\frac{\dot{x}_\tau + \dot{x}_0}{\tau^2} - 12\frac{x_\tau - x_0}{\tau^3}, \\ D_{t0} &= y_0, & D_{t1} &= \dot{y}_0, \\ D_{t2} &= 6\frac{y_\tau - y_0}{\tau^2} - \frac{4\dot{y}_0 + 2\dot{y}_\tau}{\tau}, & D_{t3} &= 6\frac{\dot{y}_\tau + \dot{y}_0}{\tau^2} - 12\frac{y_\tau - y_0}{\tau^3}. \end{aligned} \quad (6)$$

Для **II этапа** планирования движения характерны следующие граничные условия:  $x_{II0} = x_L$ ,  $\dot{x}_{II0} = \dot{x}_L$ ,  $y_{II0} = y_L$ ,  $\dot{y}_{II0} = \dot{y}_L$ ,  $x_{II\tau^*} = x^*$ ,  $\dot{x}_{II\tau^*} = \dot{x}^*$ ,  $y_{II\tau^*} = y^*$ ,  $\dot{y}_{II\tau^*} = \dot{y}^*$ , где  $x_L$ ,  $y_L$ ,  $\dot{x}_L$ ,  $\dot{y}_L$  – координаты и скорости центра масс робота в момент времени  $\tau_1$  обнаружения препятствия;  $x^*$ ,  $y^*$ ,  $\dot{x}^*$ ,  $\dot{y}^*$  – координаты и скорости центра масс робота в момент его касания окружности радиуса  $r = \alpha(R + R_1)$ ,  $\alpha > 1$ ,  $R$  – радиус окружности, описывающей робот;  $R_1$  – радиус ок-

ружности, описывающей препятствие;  $\alpha$  – коэффициент безопасности;  $\tau^*$  – промежуток времени от момента обнаружения препятствия до касания центром робота окружности радиуса  $r$ . Для второго режима функционал запишется следующим образом:

$$I_{II} = \int_0^{\tau^*} \Phi_{II} dt \rightarrow \min, \quad \Phi_{II} = m^2 \ddot{x}_{II}^2 + m^2 \ddot{y}_{II}^2. \quad (7)$$

После соответствующих преобразований законы движения для данного этапа планирования движения примут вид:

$$\begin{cases} x_{II} = x_L + \dot{x}_L t + C_{II2} \frac{t^2}{2} + C_{II3} \frac{t^3}{6}, \\ y_{II} = y_L + \dot{y}_L t + D_{II2} \frac{t^2}{2} + D_{II3} \frac{t^3}{6}, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \tau^*,$$

$$\begin{aligned} C_{II2} &= 6 \frac{x^* - x_L}{\tau_*^2} - \frac{4\dot{x}_L + 2\dot{x}^*}{\tau_*}, & C_{II3} &= 6 \frac{\dot{x}^* + \dot{x}_L}{\tau_*^2} - 12 \frac{x^* - x_L}{\tau_*^3}, \\ D_{II2} &= 6 \frac{y^* - y_L}{\tau_*^2} - \frac{4\dot{y}_L + 2\dot{y}^*}{\tau_*}, & D_{II3} &= 6 \frac{\dot{y}^* + \dot{y}_L}{\tau_*^2} - 12 \frac{y^* - y_L}{\tau_*^3}. \end{aligned} \quad (8)$$

Для **III режима** движения робота граничные условия запишутся в виде:  $x_{III0} = x^*$ ,  $\dot{x}_{III0} = \dot{x}^*$ ,  $y_{III0} = y^*$ ,  $\dot{y}_{III0} = \dot{y}^*$ ,  $x_{III\tau_2} = x_\tau$ ,  $\dot{x}_{III\tau_2} = \dot{x}_\tau$ ,  $y_{III\tau_2} = y_\tau$ ,  $\dot{y}_{III\tau_2} = \dot{y}_\tau$ ,  $\tau_2 = \tau - \tau_1 - \tau^*$ .

Функционал и законы движения, характерные для данного этапа:

$$I_{III} = \int_0^{\tau - \tau_1 - \tau^*} \Phi_{III} dt \rightarrow \min, \quad \Phi_{III} = m^2 \ddot{x}_{III}^2 + m^2 \ddot{y}_{III}^2, \quad (9)$$

$$\begin{cases} x_{III} = x^* + \dot{x}^* t + C_{III2} \frac{t^2}{2} + C_{III3} \frac{t^3}{6}, \\ y_{III} = y^* + \dot{y}^* t + D_{III2} \frac{t^2}{2} + D_{III3} \frac{t^3}{6}, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \tau - \tau_1 - \tau^*,$$

$$\begin{aligned} C_{III2} &= 6 \frac{x_\tau - x^*}{\tau_2^2} - \frac{4\dot{x}^* + 2\dot{x}_\tau}{\tau_2}, & C_{III3} &= 6 \frac{\dot{x}_\tau + \dot{x}^*}{\tau_2^2} - 12 \frac{x_\tau - x^*}{\tau_2^3}, \\ D_{III2} &= 6 \frac{y_\tau - y^*}{\tau_2^2} - \frac{4\dot{y}^* + 2\dot{y}_\tau}{\tau_2}, & D_{III3} &= 6 \frac{\dot{y}_\tau + \dot{y}^*}{\tau_2^2} - 12 \frac{y_\tau - y^*}{\tau_2^3}. \end{aligned} \quad (10)$$

Для того чтобы движение робота было в целом оптимально [8]:

$$\begin{aligned} I_{II-III} &= \int_0^{\tau - \tau_1} \Phi_{II-III} dt = \int_0^{\tau^*} \Phi_{II} dt + \int_0^{\tau - \tau_1 - \tau^*} \Phi_{III} dt \rightarrow \min, \\ I_{II-III} &= \int_0^{\tau^*} (m^2 \ddot{x}_{II}^2 + m^2 \ddot{y}_{II}^2) dt + \int_0^{\tau_2} (m^2 \ddot{x}_{III}^2 + m^2 \ddot{y}_{III}^2) dt \rightarrow \min, \end{aligned} \quad (11)$$

необходимо найти соответствующие  $x^*$ ,  $y^*$ ,  $\dot{x}^*$ ,  $\dot{y}^*$ ,  $\tau^*$ . Так как точка  $x^*$ ,  $y^*$  должна лежать на окружности радиуса  $r(\tilde{\alpha}) \geq r_{\min}$ , а вектор скорости центра масс робота должен

быть направлен по касательной к окружности в этой точке (во избежание пересечения траекторией окружности), то справедливы следующие равенства (связи):

$$\begin{aligned} x^* &= x_1 + r(\tilde{\alpha}) \cos \tilde{\varphi}, y^* = y_1 + r(\tilde{\alpha}) \sin \tilde{\varphi}, r(\tilde{\alpha}) \geq r_{\min}, \\ \dot{x}^* &= V^* \cos \left( \tilde{\varphi} - \frac{\pi}{2} \right), \dot{y}^* = V^* \sin \left( \tilde{\varphi} - \frac{\pi}{2} \right), \end{aligned} \quad (12)$$

где  $x_1, y_1$  – координаты центра окружности, описывающей препятствие;  $V^*$  – модуль линейной скорости центра масс робота, в момент касания окружности радиуса  $r(\tilde{\alpha})$ ;  $\tilde{\varphi}$  – угловая координата точки касания. Значения  $\tilde{\varphi}$  и  $\tilde{\alpha}$  подбираются (при необходимости) для устранения пересечения траекторией центра масс робота окружности радиуса  $r_{\min}$  (опасной зоны вокруг препятствия). Таким образом, подбираются такие значения  $\tau^*$  и  $V^*$  (при допустимых  $\tilde{\varphi}$  и  $\tilde{\alpha}$ ), чтобы функционал (11) был минимален. В частности,  $\tau^*$  и  $V^*$  могут быть найдены в результате поиска глобального минимума (11) с заданной точностью  $\varepsilon$ :

$$|I_{II-III}[i+1] - I_{II-III}[i]| \leq \varepsilon.$$

### 3. Пример алгоритма навигации системы управления робота

1. Запускается система управления робота и сканирования местности, вводятся оператором начальные:  $x_0, \dot{x}_0, y_0, \dot{y}_0$  и конечные:  $x_\tau, \dot{x}_\tau, y_\tau, \dot{y}_\tau$  условия движения робота и его параметры (рис. 2, а).

2. Робот планирует свое движение – запускается расчет параметров (6) на основании заданных краевых условий с последующим расчетом законов движения (6) и управляющих воздействий (рис. 2, а).

3. Робот начинает (продолжает) свое движение – реализует синтезированные законы (6) (рис. 2, б).

4. В процессе движения, при обнаружении препятствия, производится идентификация препятствия в виде окружности  $(R_1, x_1, y_1)$  и расчет радиуса  $r_{\min}$  опасной зоны вокруг этого препятствия (рис. 2, б).

5. Производится проверка пересечения синтезированной (в соответствии с (6)) траектории робота и опасной зоны вокруг препятствия по условию

$$\forall t \in [0, \tau]: \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} \geq r_{\min}. \quad (13)$$

5.1. Если условие (13) выполняется, то робот продолжает свое движение по законам (6) (рис. 2, а).

5.2. Если условие (13) не удовлетворяется, то выполняются действия (6)–(8).

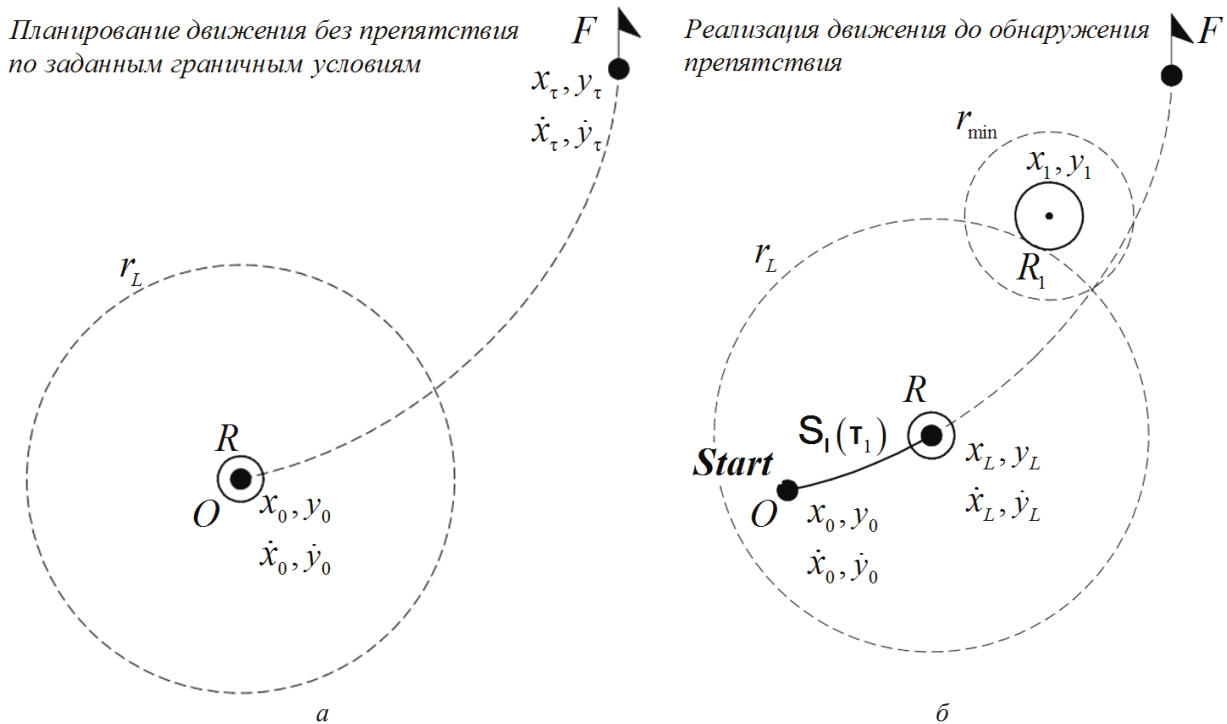
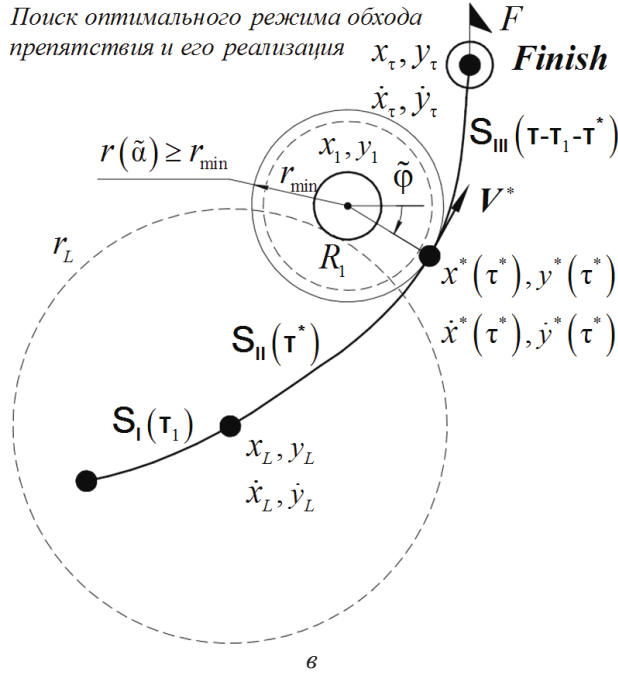


Рис. 2. Обход роботом статического препятствия (см. также с. 44)



Планирование движения и его реализация по законам:

$$\begin{cases} x_I = x_0 + \dot{x}_0 t + C_{I2} \frac{t^2}{2} + C_{I3} \frac{t^3}{6}, \\ y_I = y_0 + \dot{y}_0 t + D_{I2} \frac{t^2}{2} + D_{I3} \frac{t^3}{6}. \end{cases}$$

(Рис. а, б)

$$\begin{cases} x_{II} = x_L + \dot{x}_L t + C_{II2} \frac{t^2}{2} + C_{II3} \frac{t^3}{6}, \\ y_{II} = y_L + \dot{y}_L t + D_{II2} \frac{t^2}{2} + D_{II3} \frac{t^3}{6}, \end{cases}$$

(Рис. в)

$$\begin{cases} x_{III} = x^* + \dot{x}^* t + C_{III2} \frac{t^2}{2} + C_{III3} \frac{t^3}{6}, \\ y_{III} = y^* + \dot{y}^* t + D_{III2} \frac{t^2}{2} + D_{III3} \frac{t^3}{6}. \end{cases}$$

(Рис. г)

2

Рис. 2. Окончание

6. Для момента времени  $\tau_1$ , соответствующего обнаружению препятствия, производится определение из (6) и сохранение в оперативной памяти робота его координат:  $x_{II0} = x_L$ ,  $y_{II0} = y_L$ , и скоростей:  $\dot{x}_{II0} = \dot{x}_L$ ,  $\dot{y}_{II0} = \dot{y}_L$ .

7. Запускаются два связанных цикла по варьированию  $\tilde{\varphi} \in [0, 2\pi]$  и  $\tilde{\alpha} \in (1, \tilde{\alpha}_{stop}]$  с проверкой условия (13), чтобы в случае возникновения пересечения траекторией центра масс робота окружности радиуса  $r_{min} = \alpha(R + R_1)$ ,  $\alpha > 1$ , устранить его.

7.1 Для текущих (варьируемых) значений  $\tilde{\varphi}$  и  $\tilde{\alpha}$  запускается (внутри указанных циклов) процедура поиска глобального минимума

функционала (11) – определения оптимальных значений  $\tau^*$  и  $V^*$  (рис. 2, в).

8. Для найденных оптимальных значений  $\tau^*$  и  $V^*$ , подобранных  $\tilde{\varphi}$  и  $\tilde{\alpha}$  производится расчет параметров и реализация законов движения (8), (10), обеспечивающих безударный обход препятствия оптимальным образом.

#### 4. Компьютерное моделирование

Для исследования предложенного метода автоматической навигации наземного робота (на языке Visual C++) разработан авторский программный инструмент. Для всей серии численных экспериментов (рис. 3–7) были приняты постоянными:  $R = 0,5$  м;  $r_L = 2$  м;  $\tau = 10$  с;  $dt = 0,01$  с.

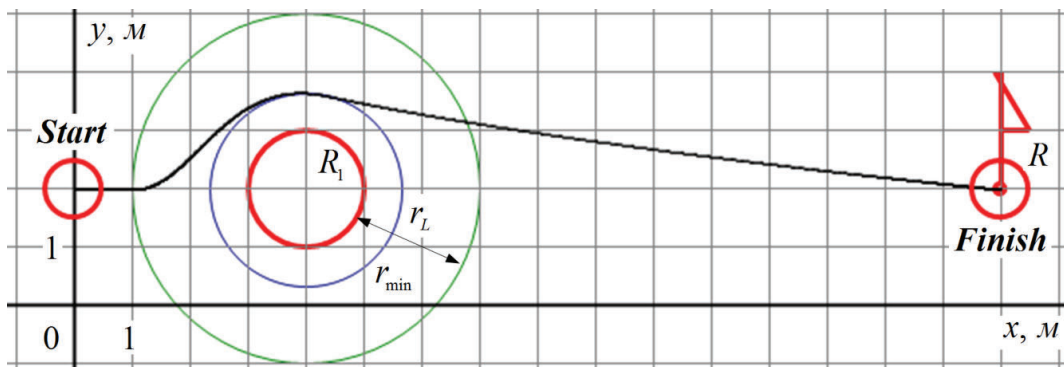


Рис. 3. Результат тестирования при нулевых скоростях в начальной и конечной точках центра масс робота:

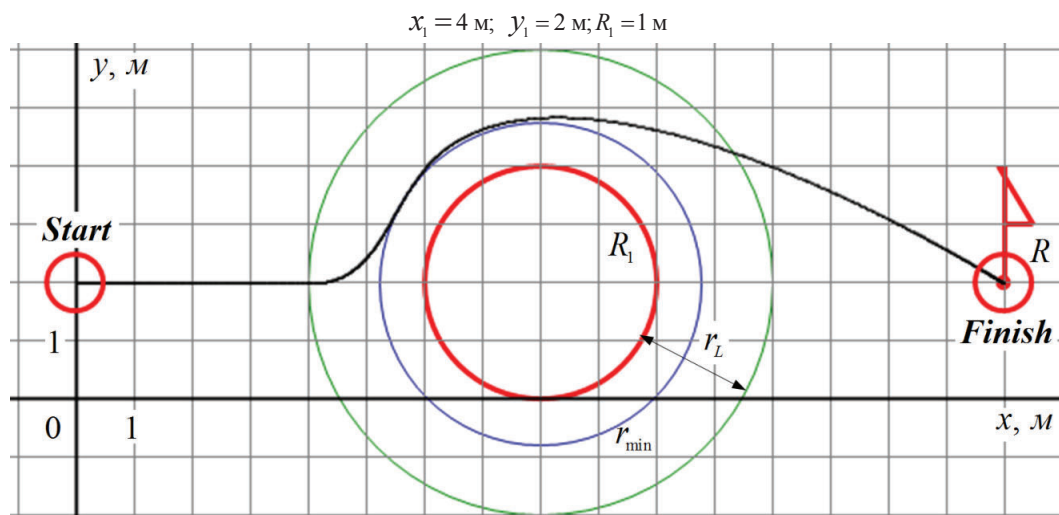


Рис. 4. Результат тестирования при нулевых скоростях в начальной и конечной точках центра масс робота:  
 $x_1 = 8 \text{ м}; y_1 = 2 \text{ м}; R_1 = 2 \text{ м}$

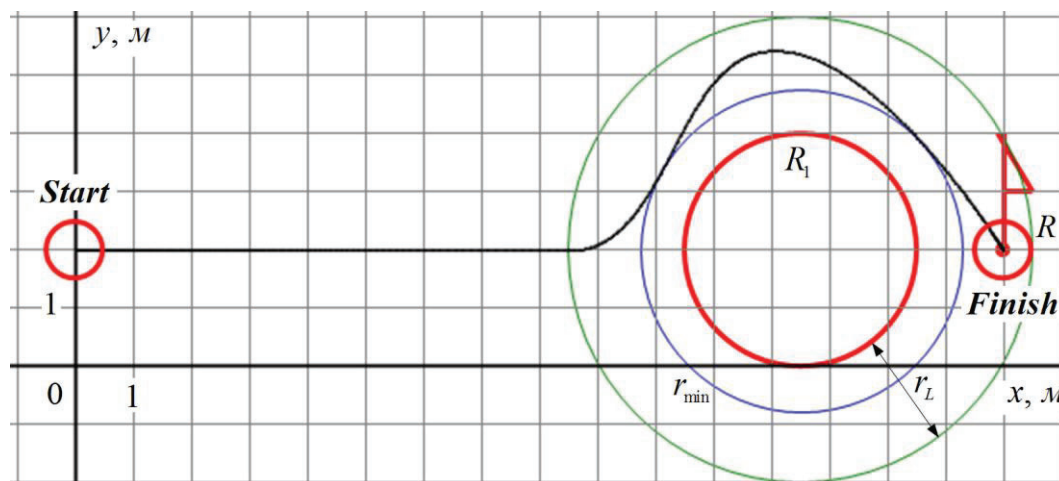


Рис. 5. Результат тестирования при нулевых скоростях в начальной и конечной точках центра масс робота:  
 $x_1 = 12,5 \text{ м}; y_1 = 2 \text{ м}; R_1 = 2 \text{ м}$

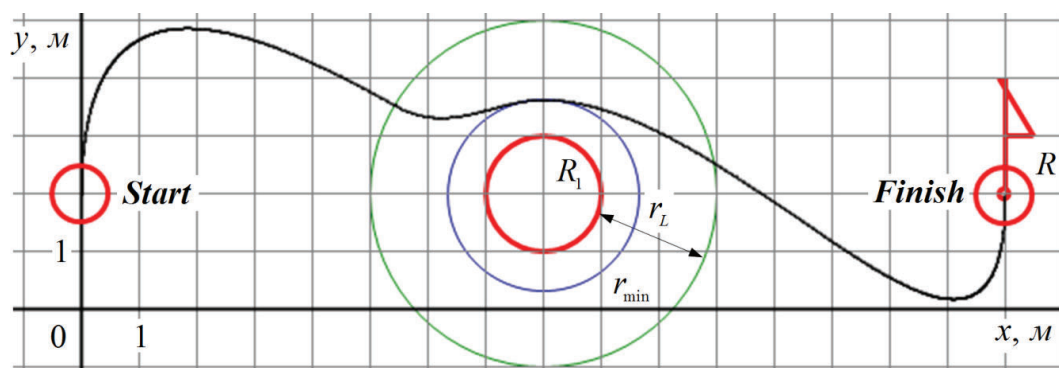


Рис. 6. Результат численного тестирования при скоростях  
 $\dot{x}_0 = 0 \text{ м/с}; \dot{y}_0 = 3 \text{ м/с}; \dot{x}_\tau = 0 \text{ м/с}; \dot{y}_\tau = 3 \text{ м/с}$  в начальной и конечной точках



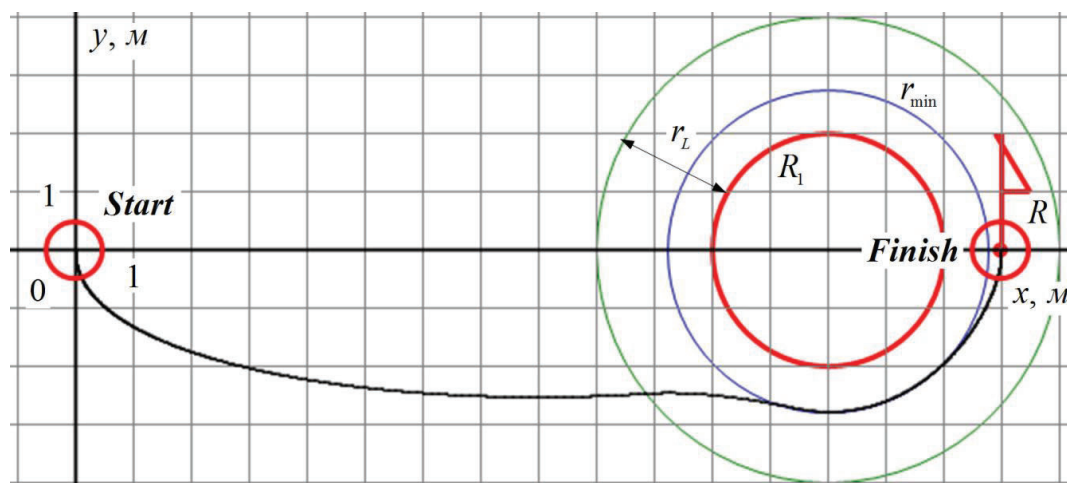


Рис. 7. Результат численного тестирования при скоростях  
 $\dot{x}_0 = 0 \text{ м/с}, \dot{y}_0 = -1 \text{ м/с}; \dot{x}_\tau = 0 \text{ м/с}, \dot{y}_\tau = 1 \text{ м/с}$  в начальной и конечной точках

### Заключение

Задача планирования движения наземного робота с обходом одного статичного препятствия сводится к решению трех вариационных подзадач с граничными условиями, две из которых приводят к поиску параметров, обеспечивающих в целом оптимальность движения робота от момента обнаружения препятствия до момента достижения конечной точки. Компьютерное моделирование предложенного метода (алгоритма навигации робота) показывает, что робот оказывается способен обойти статичное препятствие (не соударяясь с ним) и прийти в финальную точку (с требуемой скоростью) за отведенное время. При этом целевая точка может быть размещена непосредственно за препятствием. Предложенный метод планирования движения (с соответствующими уточнениями) может быть использован в реальных системах управления наземных роботов, предназначенных для перемещения в среде с препятствиями, которые удалены друг от друга.

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Chunxi, Cheng. Path planning and obstacle avoidance for AUV: A review / Chunxi Cheng, Qixin Sha, Bo He, Guangliang Li // *Ocean Engineering*. – 2021. – Vol. 235. Article 109355.
2. Лю, В. Методы планирования пути в среде с пре-

пятствиями (обзор) / В. Лю // *Математика и математическое моделирование*. – 2018. – № 1. – С. 15–58.

3. Казаков, К. А. Обзор современных методов планирования движения / К. А. Казаков, В. А. Семенов // *Труды ИСП РАН*. – 2016. – Т. 28. – Вып. 4. – С. 241–294.

4. Филимонов, А. Б. Вопросы управления движением мобильных роботов методом потенциального наведения / А. Б. Филимонов, Н. Б. Филимонов // *Мехатроника, автоматизация, управление*. – 2019. – Т. 20. – № 11. – С. 677–685.

5. Леонард, А. В. Планирование движения наземного робота с обходом стационарного препятствия при заданных: начальных и конечных координатах, скоростях и оперативном времени (VC/APF+BC<sub>τ</sub><sup>1</sup>). Ч. I. Теория // *Известия ВолГГТУ : научный журнал* № 9 (268) / ВолГГТУ. – Волгоград, 2022. – (Серия «Роботы, мехатроника и робототехнические системы»). – С. 34–42.

6. Леонард, А. В. Планирование движения наземного робота с обходом стационарного препятствия при заданных: начальных и конечных координатах, скоростях и оперативном времени (VC/APF+BC<sub>τ</sub><sup>1</sup>). Ч. II. Результаты / А. В. Леонард // *Известия ВолГГТУ : научный журнал* № 9 (268) / ВолГГТУ. – Волгоград, 2022. – (Серия «Роботы, мехатроника и робототехнические системы»). – С. 42–48.

7. Кошман, А. М. Планирование движения наземного робота с учетом его 2D-пространственной ориентации и обходом одного статичного препятствия / А. М. Кошман, А. С. Быков, А. В. Леонард, В. А. Шурыгин // *Известия ВолГГТУ : научный журнал* № 4 (275) / ВолГГТУ. – Волгоград, 2023. – (Серия «Роботы, мехатроника и робототехнические системы»). – С. 51–57.

8. Брискин, Е. С. Об энергетически эффективных режимах движения мобильных роботов с ортогональными шагающими движителями при преодолении препятствий / Е. С. Брискин, Я. В. Калинин, М. В. Мирошкина // *Известия Российской академии наук. Теория и системы управления*. – 2020. – № 2. – С. 75–82.