

На правах рукописи



Бочков Максим Иванович

**АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СТАТИКИ СИСТЕМ С  
ОДНОСТОРОННИМИ СВЯЗЯМИ НА ОСНОВЕ МКЭ В ФОРМЕ  
КЛАССИЧЕСКОГО СМЕШАННОГО МЕТОДА**

2.1.9. Строительная механика

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени

кандидата технических наук

Волгоград - 2022

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Волгоградский государственный технический университет»

**Научный руководитель:** доктор технических наук, доцент,  
**Игнатъев Александр Владимирович**

**Официальные оппоненты:** **Крысько Вадим Анатольевич**,  
доктор технических наук, профессор,  
заведующий кафедрой «Математика и  
моделирование» ФГБОУ ВО «Саратовский  
государственный технический университет  
имени Ю. А. Гагарина»

**Джабраилов Арсен Шахнавазович**,  
кандидат технических наук, доцент,  
доцент кафедры «Высшая математика»  
ФГБОУ ВО «Волгоградский государственный  
аграрный университет»

**Ведущая организация:** ФГБОУ ВО «Национальный  
исследовательский Московский  
государственный строительный университет»

Защита состоится 09 февраля 2023 года в 13:00 часов на заседании диссертационного совета 24.2.282.05, созданного на базе ФГБОУ ВО «Волгоградский государственный технический университет» по адресу: 400074, г. Волгоград, ул. Академическая, 1, ауд. Б-203.

С диссертацией можно ознакомиться в информационно-библиотечном центре и на сайте ФГБОУ ВО «Волгоградский государственный технический университет».

Автореферат разослан « \_\_\_ » \_\_\_\_\_ 202\_ г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета



**Корниенко Сергей  
Валерьевич**

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

### **Актуальность темы исследования**

Конструкции и сооружения с односторонними связями достаточно широко распространены в инженерной практике.

Основная проблема их расчета состоит в определении тех связей, в которых при приложении заданной нагрузки возникают реакции по их рабочим направлениям, т.е. в установлении рабочей расчетной схемы конструкции.

В настоящее время не существует единого подхода к расчету конструкций и сооружений с односторонними связями. Отмечаемые исследователями недостатки существующих подходов и методов связаны, в основном, со сложностью формализации алгоритма, большой трудоёмкостью расчета, проблемой заикливания.

В этом отношении метод конечных элементов (МКЭ) в форме классического смешанного метода (КСМ) имеет, как показано в работах В.А. Игнатьева и А.В. Игнатьева, значительные преимущества по сравнению с МКЭ в перемещениях. Однако расширение области применения МКЭ в форме КСМ за счет включения в неё систем с односторонними связями требует исследования эффективности, как этого метода, так и других подходов, и методов решения проблемы, его дальнейшего совершенствования и развития применительно к системам с односторонними связями.

### **Степень разработанности темы исследования:**

Все работы, связанные с теорией и методами расчета систем с односторонними связями, можно условно объединить в четыре группы:

- прямые итерационные методы [В.М. Александров; З.Н. Пригородова; З.А. Власова; Е.М. Тихонова; А.А. Афендульев и др.];
- методы линейного программирования [Т.С. Ким; Р.Е. Кузнецова; А.В. Перельмутер; Л.М. Резников и др.];
- методы нелинейного программирования [В.П. Алёнин; В.Н. Гордеев; А.В. Перельмутер; В.И. Сливкер; А.Х. Астрахан и др.];

- вариационные и разностно-вариационные методы [О.Ф. Коваленко и др.]

Наиболее полный обзор работ, выполненных до 2001 года, посвященных расчету систем с односторонними связями, содержится в монографии В.П. Аленина. Другой обширный обзор работ, ставших основой для современных исследований задач с односторонними связями, изложен в докторской диссертации А.А. Лукашевича.

Особо следует отметить работы, связанные с динамическим расчетом систем с конструктивной нелинейностью. Теоретической основой для них является аналитический метод временного анализа, разработанный профессором Потаповым А.Н.

В работах В.А. Игнатьева, А.В. Игнатьева впервые для расчета систем с односторонними связями был применен МКЭ в форме КСМ.

**Целью диссертационной работы является анализ эффективности решения задач расчета одномерных и двумерных систем с односторонними связями на основе МКЭ в форме классического смешанного метода, усовершенствование реализующих его алгоритмов, используемых для решения этого класса задач.**

Для достижения сформулированной цели поставлены следующие **задачи исследования:**

1. Разработка усовершенствованного унифицированного алгоритма численного расчета систем с односторонними связями на основе МКЭ в форме классического смешанного метода с использованием процедур пошагового нагружения по заданному параметру (нагрузке, физическим свойствам связей, геометрическим характеристикам и др.) с итерационным уточнением решения на каждом шаге.
2. Разработка специализированных частных алгоритмов расчета для систем, содержащих различные типы односторонних связей.
3. Разработка алгоритма, сочетающего преимущества метода компенсирующих нагрузок и МКЭ в форме классического смешанного метода.

4. Анализ эффективности (по параметрам трудоёмкости и точности расчёта) разработанных алгоритмов по сравнению с алгоритмами, реализующими подходы и методы других исследователей.

**Объект исследования:** одномерные и двумерные системы с односторонними связями.

**Предмет исследования:** анализ эффективности МКЭ в форме КСМ в задачах статики систем с односторонними связями.

### **Методология и методы исследования**

В диссертации использовались теория и основанные на ней методы строительной механики, общепринятые в ней гипотезы и допущения, методы линейной алгебры и математические работы по теории и методам расчёта систем с односторонними связями.

### **Основные положения диссертации, выносимые на защиту:**

1. Унифицированный алгоритм решения задач статики систем с односторонними связями на основе МКЭ в форме КСМ, являющийся общей платформой реализации специализированных частных алгоритмов расчёта для каждого из типов односторонних связей в системе.

2. Специализированные частные алгоритмы расчёта для систем, содержащих различные типы односторонних связей.

3. Альтернативный алгоритм, сочетающий преимущества метода компенсирующих нагрузок и МКЭ в форме КСМ.

4. Результаты сопоставительного анализа эффективности разработанных алгоритмов к расчёту различных систем с односторонними связями в сравнении с алгоритмами, основанными на других подходах и методах решения задач статики систем с односторонними связями.

### **Научная новизна исследования:**

1. Разработан и впервые предложен для использования унифицированный алгоритм численного решения задач статики систем с односторонними связями на основе МКЭ в форме классического смешанного

метода, являющийся общей платформой для специализированных частных алгоритмов расчета систем с различными типами односторонних связей.

2. Разработаны специализированные частные алгоритмы численного решения задач статики систем с односторонними связями для каждого из типов односторонних связей с учетом особенностей их работы, отличающиеся от иных известных алгоритмов произвольным выбором неизвестных.

3. Впервые разработан алгоритм численного расчета систем с упрочняющимися или разупрочняющимися связями, сочетающий преимущества метода компенсирующих нагрузок и МКЭ в форме классического смешанного метода.

4. Доказана эффективность решения задач статики систем с односторонними связями на основе МКЭ в форме классического смешанного метода с использованием предлагаемых алгоритмов. Для ряда задач установлены количественные характеристики эффективности, заключающиеся в уменьшении количества итераций, приводящих к достоверному результату расчета.

Диссертационное исследование выполнялось в рамках проектов РФФИ: 16-41-340558-р\_а «Метод конечных элементов в форме классического смешанного метода строительной механики (теория, алгоритмы, программы)», 18-41-340008-р\_а «Разработка математических моделей, алгоритмов и программных средств для исследования конструктивно-нелинейного поведения строительных конструкций, на основе МКЭ в форме классического смешанного метода», 18-41-340013-р\_а «Разработка математических моделей, алгоритмов и программных средств для определения низших частот и форм собственных колебаний сложных конструкций, на основе МКЭ в форме классического смешанного метода».

**Практическая значимость** полученных результатов состоит в том, что разработанные впервые алгоритмы и программы численной реализации, реализующие МКЭ в форме КСМ, более эффективны по сравнению с алгоритмами, реализующими другие подходы и методы.

Результаты работы используются в учебном процессе на кафедре «Строительная механика» ВолгГТУ в виде учебных пособий и расчётных

программ для студентов, обучающихся по направлениям 08.04.01 Строительство (Теория и проектирование зданий и сооружений) и 08.05.01 Строительство уникальных зданий и сооружений (Строительство высотных и большепролетных зданий и сооружений).

### **Соответствие диссертации паспорту научной специальности**

Диссертационные исследования соответствуют паспорту специальности 2.1.9 Строительная механика: п. 2 (линейная и нелинейная механика конструкций, зданий и сооружений, разработка физико-математических моделей их расчета), п. 4 (численные и численно-аналитические методы расчета зданий, сооружений и их элементов на прочность, жесткость, устойчивость при статических, динамических, температурных нагрузках и других воздействиях).

**Достоверность полученных результатов** обеспечивается корректным использованием основных гипотез и допущений строительной механики, обоснованных численных методов решения систем линейных алгебраических уравнений и подтверждается сравнением результатов решения задач с имеющимися решениями других авторов, полученными другими методами.

Основные результаты диссертации докладывались на конференциях: X Всероссийской конференции по механике деформируемого твёрдого тела (Самара, 2017); I Междунар. науч.-техн. конф. «Долговечность и надежность строительных материалов и конструкций в эксплуатационной среде» (Балаково, 2018), 57-я внутривузовская научная конференция (Волгоград, 2020), 58-я внутривузовская научная конференция (Волгоград, 2021), 59-я внутривузовская научная конференция (Волгоград, 2022).

**Публикации.** По материалам диссертации опубликовано 11 работ. Из них 6 статей в журналах, рекомендованных ВАК Минобрнауки России, 4 статьи в прочих рецензируемых журналах и сборниках трудов конференций, 1 свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.

**Личный вклад автора** состоит в разработке усовершенствованного унифицированного алгоритма решения задач статики систем с односторонними связями, выполняющего функцию общей платформы для разработанных

специализированных частных алгоритмов решения задач статики систем с односторонними связями. Специализированные частные алгоритмы, в свою очередь, отражают особенности работы отдельных типов односторонних связей.

### **Структура и объём работы**

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, приложений (копии свидетельств о регистрации программного продукта и акта о внедрении результатов исследования в учебный процесс), списка использованной литературы из 124 наименований. Работа изложена на 136 страницах, содержит 65 рисунков и 56 таблиц.

Автор выражает благодарность профессору Игнатьеву Владимиру Александровичу за ценные советы и консультации на начальном этапе работы над диссертацией.

**Во введении** дано обоснование актуальности темы диссертации, сформулированы цели и задачи исследования.

**В первой главе** выполнен краткий обзор работ по теории и методам расчета конструктивно-нелинейных систем. Впервые в подобный обзор включены работы, выполненные с учетом комбинации конструктивной, геометрической и физической нелинейности систем с односторонними связями.

**Во второй главе** рассмотрены системы с упругими односторонними связями, работающими только на сжатие. Изложен разработанный впервые унифицированный алгоритм решения задач статики систем с односторонними связями на основе МКЭ в форме КСМ, являющийся общей платформой для специализированных частных алгоритмов расчета систем с различными типами односторонних связей.

**Третья глава** посвящена расчету систем с односторонними связями, работающими только на растяжение.

**Четвёртая глава** посвящена решению задач статики систем с односторонними геометрически и физически нелинейными связями. Для оценки эффективности специализированного алгоритма выполнен расчет пространственной стержневой системы, и полученные результаты сравнены с



экспериментом, выполненным другими авторами для этой системы. Удовлетворительное совпадение теоретических и экспериментальных результатов подтверждает эффективность алгоритма.

**В заключении** сформулированы основные результаты диссертационной работы.

## **ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ**

В истории математики и механики отмечается важная роль задач о нерастяжимой гибкой нити и о цепной линии и связанных с этими задачами работ Якоба и Иоганна Бернулли, Г. В. Лейбница, Х. Гюйгенса, П. Вариньона, опубликованных в конце XVII века, задолго до формулирования понятия «односторонняя связь».

Формулирование и развитие понятия «односторонние связи» происходило поэтапно, начиная с Ж. Л. Лагранжа (книга «Аналитическая механика», 1788 г.) и заканчивая П. Аппелем, который в своём курсе теоретической (рациональной) механики изложил содержание этого понятия: «если возможные перемещения, совместные со связями, заданы неравенствами, тогда связи называются неудерживающими», то есть односторонними.

Следует отметить, что впервые на существование односторонних связей в строительных конструкциях, то есть в задачах строительной механики, обратил внимание Д.И. Журавский в своей статье, опубликованной в 1850 г.

В настоящее время к системам с односторонними связями относят конструкции с самыми различными свойствами этих связей и ограничениями на их действие.

Подход к расчету такого рода систем, предложенный И.М. Рабиновичем, и основанный на итерационном переборе «частных схем», продолжает применяться и в настоящее время, несмотря на наличие новых альтернативных алгоритмов. Конвенционально принятые к настоящему времени методы и алгоритмы расчета нередко дают сбои при решении целого ряда задач.

Основная проблема расчета конструктивно-нелинейных систем состоит в определении тех односторонних связей, в которых возникают реакции по их рабочим направлениям при приложении к системе заданной нагрузки, то есть в установлении рабочей расчетной схемы.

При простом переборе вариантов расположения рабочих связей, возникает необходимость анализа  $2^s$  различных схем их расположения (здесь  $s$  – общее число связей), что практически невозможно (например, уже при  $s=10$  число вариантов  $2^s=1024$ ).

Рассматриваемые в диссертации односторонние связи нами разделены условно на группы, в зависимости от их свойств:

а) Односторонние жесткие связи;

1) односторонние жесткие связи (опоры) без зазоров между конструкцией и опорами;

2) односторонние жесткие связи (опоры) с зазорами между конструкцией и опорами;

б) односторонние упругие линейные связи;

1) односторонние упругие (линейные и поворотные) связи, работающие только на сжатие;

2) односторонние упругие (линейные и поворотные) связи, работающие только на растяжение;

в) односторонние нелинейные связи.

1) односторонние нелинейные связи с эффектом упрочнения и разупрочнения при росте нагрузки;

2) односторонние нелинейные связи с эффектом физической нелинейности (например, для конструкций из резиновых материалов).

Аналитический обзор источников показал, что в настоящее время нет единого подхода к расчету конструкций с односторонними связями. Критика существующих подходов и методов связана в основном со сложностью формализации реализующих их алгоритмов и большой трудоёмкостью расчетов.

В подавляющем большинстве работ, связанных с исследованием систем с односторонними связями используются итерационные процедуры на каждом шаге изменения нагрузки. Это связано с тем, что в этих системах площадь зоны «отлипания» или количества точек контакта с односторонними связями зависят от величины нагрузки, последовательности их приложения и т.д.

Обобщенная физическая модель многопролетной балки с упругими односторонними связями, работающими только на сжатие, показана на рисунке 1. К такой модели могут быть сведены многопролетные балки с односторонними связями, имеющими самые различные свойства (линейно и нелинейно деформируемые, упрочняющиеся и разупрочняющиеся и т.д.)

Математическую модель, соответствующую приведенной физической модели, построим на основе МКЭ в форме КСМ. В соответствии с алгоритмом расчета по этому методу, представим исходную физическую модель в виде ансамбля конечных элементов.

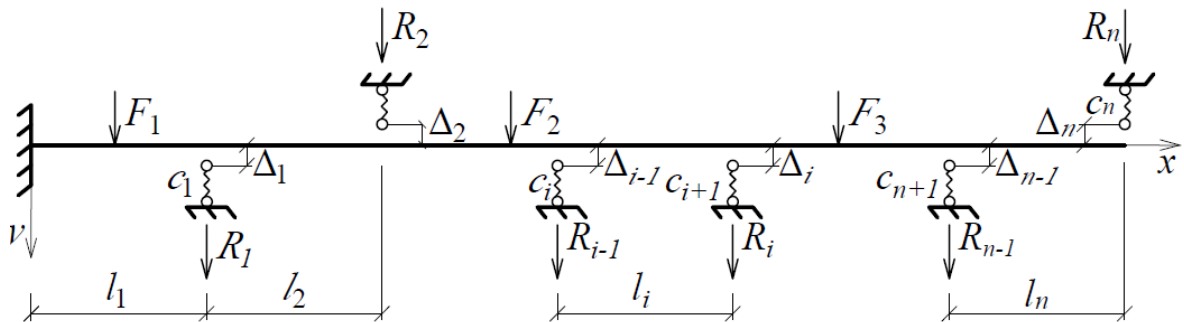


Рисунок 1 – обобщённая физическая модель многопролётной балки с односторонними опорами

Обобщенная основная система и основные неизвестные для ансамбля конечных элементов рассматриваемой балки этого вида показаны на рисунке 2. На этом рисунке показан её фрагмент, состоящий из двух смежных пролётов  $i$  и  $i+1$  многопролетной балки ( $i=1, 2, \dots, N$ ).

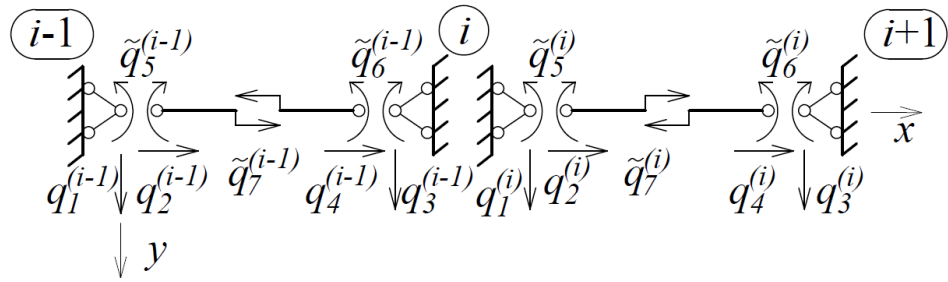


Рисунок 2 – фрагмент обобщенной основной системы из двух смежных пролётов  $i$  и  $i+1$

Математическая модель для описанной физической модели строится на основе МКЭ в форме КСМ, развитого в работах В.А. Игнатьева и А.В. Игнатьева.

В соответствии с этим методом рассматриваемая физическая модель балки представляется ансамблем конечных элементов с основными неизвестными смешанного метода во всех узлах конечно-элементной сетки, в соответствии с изображенным на рисунке 2.

Кинематические неизвестные двух смежных КЭ с общим узлом  $i$  связаны соотношениями  $q_4^{(i-1)} = q_1^{(i)}$ ;  $q_5^{(i-1)} = q_2^{(i)}$ ;  $q_3^{(i)}$ ,

а силовые неизвестные связаны соотношениями:  $\tilde{q}_6^{(i)} = q_3^{(i+1)}$ .

Для системы с двусторонними связями, показанной на рисунке 2, математическая модель представляется в виде двух групп конечно-элементных уравнений, описывающих напряженно-деформированное состояние двух смежных конечных элементов с общим узлом  $i$  над односторонними опорами:

- уравнения равновесия узла  $i$ ;
- уравнение совместности деформаций (углов поворота) смежных КЭ в узле  $i$ ;
- величины реакции  $R_i$  в опорных связях;
- величины перемещений  $\delta_i$  по направлениям имеющих зазоры  $\Delta_i$ .

$$1) R_{y,i}^{(\eta)} + R_{y,i}^{(F)} + \eta_{y,i} = 0,$$

$$2) R_{x,i}^{(\eta)} + R_{x,i}^{(F)} + \eta_{x,i} = 0,$$

$$3) R_{\varphi,i}^{(\eta)} + R_{\varphi,i}^{(F)} + \eta_{\varphi,i} = 0,$$

где  $\eta_{y,i}$ ,  $\eta_{x,i}$ ,  $\eta_{\varphi,i}$  – приведенные узловые нагрузки,

- Уравнения  
равновесия  
узла  $i$

<p>4) <math>y_i^{(лев)} = y_i^{(np)}</math>,</p> <p>5) <math>\varphi_i^{(лев)} = \varphi_i^{(np)}</math>,</p> <p>6) <math>\Delta_{7,i}^{(лев)} + \Delta_{7,i}^{(np)} = 0</math>,</p> <p>7) <math>\Delta_{8,i}^{(лев)} + \Delta_{8,i}^{(np)} = 0</math>,</p> <p>8) <math>\Delta_{9,i}^{(лев)} + \Delta_{9,i}^{(np)} = 0</math>.</p>	<p>- совместность линейных смещений и углов поворота сечений в опорных точках узла <math>i</math></p> <p>- отсутствие разрывов в разрезах</p>	<div style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; border-top: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; width: 20px; height: 150px; margin: 0 auto;"></div> <p>- уравнения совместности перемещений</p>
--	---	---

В развернутой форме эти уравнения для рассматриваемой балки, изображенной на рисунке 1, приведены ниже:

$$1. R_i = R_3^{(i)} + R_1^{(i+1)} = -C_i \cdot (q_3^{(i)} + \tilde{q}_5^{(i)} - \tilde{q}_5^{(i+1)} - (F_i^{(np)} + F_{i+1}^{(лев)})) = 0,$$

$$2. M_i = R_4^{(i)} + R_2^{(i+1)} = -\tilde{q}_5^{(i)} \cdot \frac{l_i}{2} - \tilde{q}_5^{(i+1)} \cdot \frac{l_{i+1}}{2} - \tilde{q}_6^{(i)} + \tilde{q}_6^{(i+1)} + M_F^{(i)} - M_F^{(i+1)} = 0,$$

$$3. \delta_{5,i} = \tilde{q}_5^{(i)} \cdot \frac{l_i^3}{i \cdot 2 \cdot EI_i} + q_4^{(i)} + q_3^{(i)} + q_2^{(i)} + q_4^{(i)} \cdot \frac{l_i}{2} + \delta_{5,F}^{(i)} = 0,$$

$$4. \delta_{6,i} = \tilde{q}_6^{(i)} \cdot \frac{l_i}{EI_i} - q_2^{(i)} + q_4^{(i)} + \delta_{6,F}^{(i)} = 0.$$

где  $F_{(i)}^{(np)}, F_{(i)}^{(лев)}$  - приведенная к узлу  $i$  нагрузка в левой и правой половинах конечных элементов, примыкающих к нему;

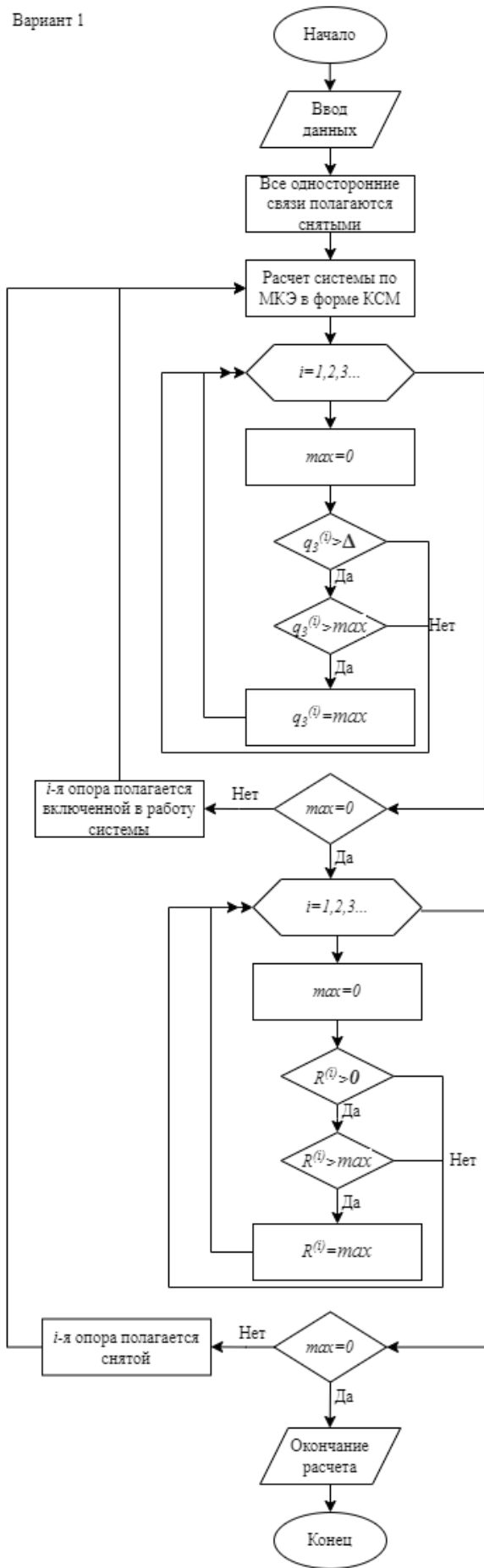
$C_i$  - жесткость  $i$  – ой упругой односторонней опоры;

$\Delta_i$  - зазор между балкой и  $i$  – ой упругой опорой;

$q_3^{(i)} = q_1^{(i+1)}, q_4^{(i)} = q_2^{(i+1)}$  - кинематические неизвестные, относящиеся к одному и тому же узлу  $i$ .

В соответствии с двумя рассмотренными вариантами основной системы для конечного элемента, решение задачи о нахождении рабочей схемы и геометрической конфигурации балки с заданными упругими односторонними связями и заданной нагрузкой также может выполняться в двух вариантах. Блок-схемы алгоритмов приведены на рисунке 3.

Вариант 1



Вариант 2

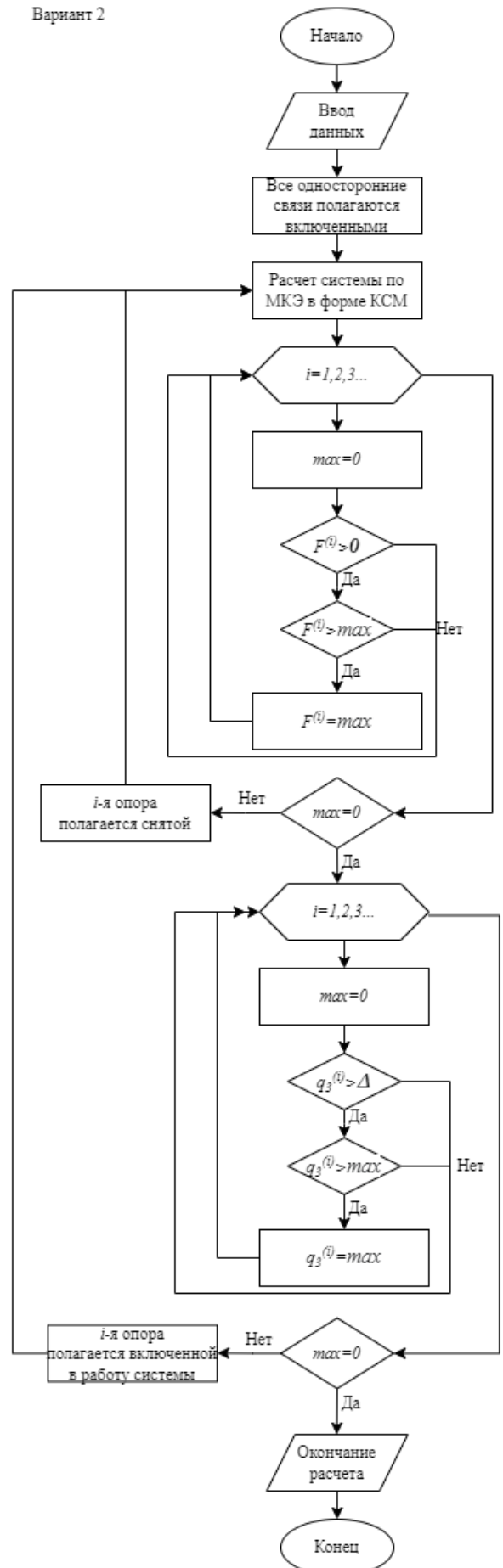


Рисунок 3 – блок-схемы алгоритмов расчета вариант 1, вариант 2

Для иллюстрации выполним расчет балки, изображенной на рисунке 4. Эта задача рассмотрена в работах А. В. Перельмутера и В. И. Сливкера, как задача, приводящая к заикливаю алгоритм, предложенный И. М. Рабиновичем. Так же эта задача используется для верификации ПК «ЛИРА САПР» и приводится в верификационном отчете программного комплекса.

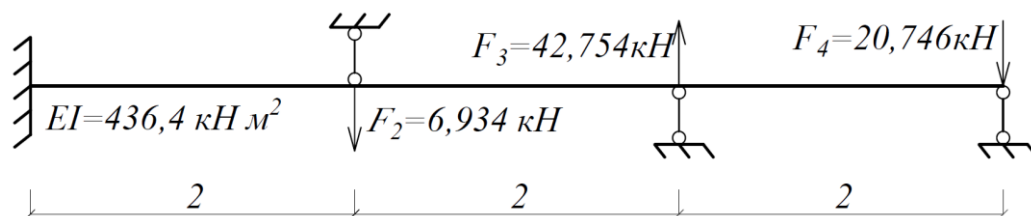


Рисунок 4 – трёхпролётная балка с односторонними опорами

В таблице 1 приведено сравнение результатов расчета системы по МКЭ в форме КСМ и аналитическим решением, приведённым в работе А.В. Перельмутера.

Таблица 1

	Аналитическое решение	МКЭ в форме КСМ	Расхождение, %
$R_2$ , кН	37,14	36,763	1,6
$\Delta_3$ , м	0,0772	0,0772	0
$R_4$ , кН	5,2	5,2	0

Полученный результат совпадает с результатом, приведённым в верификационном отчете. Минимальное количество итераций, приведённое в верификационном отчете – 1000, при использовании нашего алгоритма для нахождения рабочей схемы понадобилось 3 итерации.

Изложенный выше алгоритм расчета одномерных систем (балок) с односторонними упругими связями также во второй главе обобщается на расчет двумерных систем (пластинок) с упругими односторонними связями, как показано на рисунке 5, в узлах конечно-элементной сетки, моделирующими упругое винклеровское основание, в соответствии с рисунком 5, а.

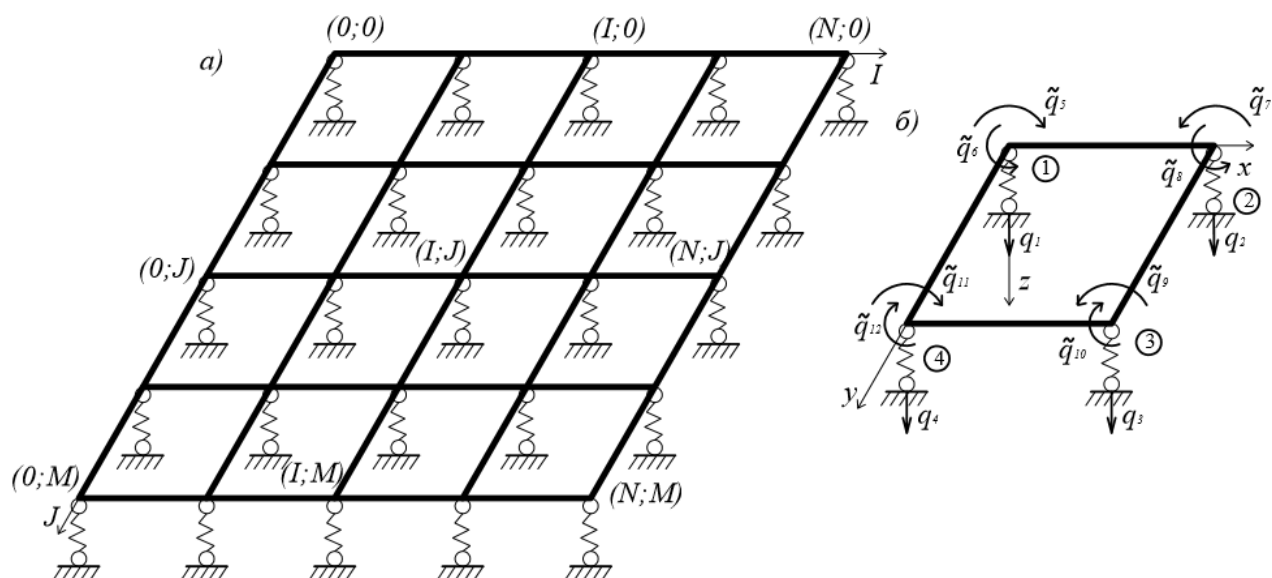


Рисунок 5 – а) плита, опирающаяся на односторонние упруго-податливые опоры в узлах  
б) конечный элемент смешанного типа для плит

Для верификации в таблице 2 произведём сравнение результатов расчета пластинок с сеткой конечных элементов 4x4 в ЛИРА САПР и результатов, полученных с помощью программы SciLab для сетки 4x4.

Таблица 2

№ опоры	SciLab, мм	ЛИРА САПР 2013 R5	Сравнение, %
1	-0,595	-0,864	-31,13
2	-0,595	-0,864	-31,13
7	2,22	2,466	9,99
8	3,112	3,402	8,53
9	2,22	2,466	9,99
12	3,112	3,402	8,53
13	4,322	4,7	8,05
14	3,112	3,402	8,53
17	2,22	2,466	9,99
18	3,112	3,402	8,53
19	2,22	2,466	9,99
21	-0,595	-0,864	-31,13
25	-0,595	-0,864	-31,13

Из приведённой выше таблицы видно, что наибольшее отличие в результатах расчета, до 30%, наблюдается для перемещений в реакциях, удалённых вследствие отлипания. Для основной же системы эта неточность находится в пределах 10%.

Аналогично в таблице 3 приведено сравнение результатов расчета пластинок с сеткой конечных элементов 8x8 в ЛИРА САПР и результатов, полученных с помощью программы SciLab для сетки 8x8.



Таблица 3

№ опоры	SciLab, мм	ЛИРА САПР 2013 R5	Сравнение, %
1	-0,7231	-0,7688	6,3
2	-0,1954	-0,2245	14,9
38	1,7486	1,7855	2,1
39	3,1677	3,2268	0,2
40	4,0684	4,1389	0,2
41	4,3751	4,4489	0,2

Приведём результаты расчета с уточненной сеткой конечных элементов 16 x 16:

Таблица 4

№ опоры	SciLab, мм	ЛИРА САПР 2013 R5	Сравнение, %
1	-0,03673	-0,03424	6,8
9	-0,05581	-0,05395	3,3
19	-0,05435	-0,05412	0,4
37	-0,06794	-0,06879	-1,2
55	-0,07654	-0,07765	-1,4
73	-0,08081	-0,08172	-1,1
91	-0,08216	-0,08273	-0,7
109	-0,08204	-0,08231	-0,3
127	-0,08155	-0,08231	-0,1

Таким образом, при уточнении сетки КЭ уменьшается расхождение результатов расчета с ЛИРА САПР с 36% до 6,8% в угловом узле и с 4,5% до 0% в центральном узле.

В главе 3 на основе базового алгоритма-платформы разработан специализированный алгоритм расчета систем с односторонними связями, работающими только на растяжение. По этому алгоритму был выполнен расчет нескольких видов систем.

Наиболее показательным является расчет системы, изображенной на рисунке 6.

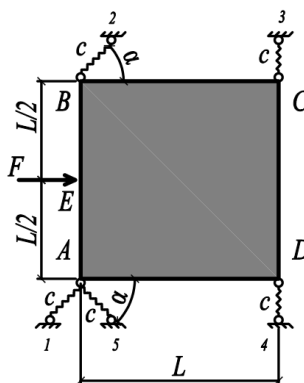


Рисунок 6 – расчетная схема плоского тела, удерживаемого упруго-податливыми связями

Эта задача-тест решалась разными исследователями на основе других подходов и методов. Поэтому для оценки эффективности предлагаемого метода и реализующего его алгоритма выполняется сравнение.

Результаты сравнительного анализа приведены в таблице 5

Таблица 5

Точка	Искомая величина	Аналитическое решение	Результат расчета	Расхождение, %	Погрешность ПК «ЛИРА САПР», %
A	$R_1$ , кН	122	122	0	0
B	$R_2$ , кН	8,76	8,76	0	0,22
C	$R_3$ , кН	56,58	56,54	0,09	0,09
D	$R_4$ , кН	0	0	0	0
A	$R_5$ , кН	0	0	0	0

Далее нами рассмотрен ряд других задач о нити и конструкций, элементами которых являются нити.

Все частные (специальные) алгоритмы расчета систем с односторонними связями, работающими только на растяжение, строятся на основе базового алгоритма-платформы путём добавления в него дополнительного блока, учитывающего особенности рассматриваемой системы.

Выполнено решение известной задачи-теста и сравнение с другими методами расчета, а также сравнение результатов расчета в ПК «ЛИРА САПР» с полученными нами результатами.

Сравнение по трудоёмкости расчета с использованием разных методов показало, что МКЭ в форме классического смешанного метода даёт возможность построения наиболее простого алгоритма построения разрешающих уравнений для рассматриваемых задач.

Четвертая глава посвящена нелинейным задачам расчета систем с односторонними связями. Этот круг задач представляет наибольший интерес, как с точки зрения инженерной практики, так и с точки зрения теории расчета.

Здесь же изложен разработанный диссертантом новый подход к расчету систем с упрочняющимися или разупрочняющимися связями, основанный на применении МКЭ в форме классического смешанного метода и реализующих его алгоритмов. Выполненные примеры расчетов показали преимущество нового

подхода и соответствующих алгоритмов. Для расчета с точностью до 0.5%, с помощью МКЭ в форме КСМ потребовалось выполнить 5 итераций уточнения компенсирующих нагрузок. В работах В. П. Алёнина расчет с помощью метода сил заканчивается после 7-ой итерации. Кроме того, стоит отметить необходимость подсчета дополнительно величин усилий в опорах, при расчете методом сил. При расчете по МКЭ в форме КСМ, все необходимые для принятия решений о величине компенсирующих нагрузок неизвестные входят непосредственно в вектор решения, что также упрощает расчёт.

В качестве примера рассмотрена пространственная система, изображенная на рисунке 7, в виде шарнирно-стержневого треугольника стержни которого воспринимают как растягивающие, так и сжимающие усилия, подвешенного на стержнях из резиноподобного материала, допускающего удлинения, сопоставимые с длиной стержня ( $0.3 - 0.5l$ ). В работе профессора К. В. Жеребко на этой конструкции был поставлен эксперимент, в результате которого авторами были установлены экспериментальные зависимости между величиной растягивающего усилия в стержне и вызываемые ею продольными удлинениями стержней и соответствующие этой нагрузке площади поперечного сечения.

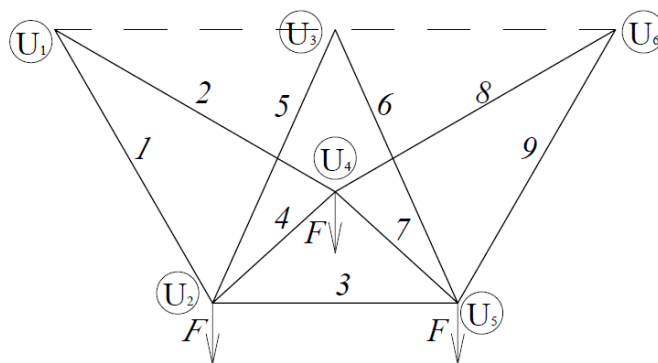


Рисунок 7 - пространственная система в виде шарнирно-стержневого треугольника

Результаты расчета с использованием этих зависимостей с использованием нашего алгоритма расчета показали удовлетворительное совпадение с экспериментом. Можно предположить, что совпадение было бы большим, если бы было учтено, что площади поперечных сечений стержня по его длине в точке закрепления груза и в точке подвеса груза различны.

## **ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ РАБОТЫ**

1. В диссертации впервые выполнен системный анализ эффективности МКЭ в форме классического смешанного метода, применительно к задачам статики одномерных и двумерных систем с изменяющейся расчетной схемой.
2. Разработан унифицированный базовый алгоритм-платформа для расчета систем с изменяющейся расчетной схемой.
3. На основе базового унифицированного алгоритма разработаны частные специализированные алгоритмы численного расчета стержневых и пластинчатых систем, учитывающие особенности расчета систем, с различными типами односторонних связей.
4. Разработан альтернативный алгоритм численного расчета, сочетающий метод компенсирующих нагрузок и МКЭ в форме классического смешанного метода. Доказана эффективность алгоритма по параметру сходимости к обусловленной точности расчета.
5. Выполнено решение задач-тестов, которые ранее решались другими исследователями на основе других подходов и методов, выявившее преимущество предлагаемого алгоритма, заключающееся в уменьшении количества итераций, необходимых для поиска решения при равной точности расчета для ряда систем.

## **ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ**

### **Статьи в ведущих рецензируемых научных журналах и изданиях:**

1. Бочков, М. И. Применение метода конечных элементов в форме классического смешанного метода к расчёту систем с односторонними связями [Текст] / А. В. Игнатъев, В. А. Игнатъев, М. И. Бочков // Строительная механика и расчёт сооружений. - 2017. - № 2. - С. 52-61.
2. Бочков, М. И. Расчёт многопролётных балок с односторонними связями по МКЭ в форме классического смешанного метода [Текст] / А. В. Игнатъев, В. А. Игнатъев, М. И. Бочков // Вестник Волгоградского гос. архит.-строит. ун-та. Сер. Строительство и архитектура. - 2017. - № 48 (67). - С. 94-108.
3. Бочков, М. И. Методика расчета балок с односторонними связями на действие подвижной нагрузки с помощью МКЭ в форме классического

смешанного метода [Текст] / А. В. Игнатъев, М. И. Бочков, С. Ю. Иванов // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Сер.: Строительство и архитектура. - 2019. - Вып. 2 (75). - С. 49-57.

4. Бочков, М. И. Сравнительный анализ эффективности некоторых алгоритмов расчёта систем с односторонними связями [Текст] / А. В. Игнатъев, М. И. Бочков, И. В. Курочкина // Известия высших учебных заведений. Строительство. - 2019. - № 11 (731). - С. 87-98.

5. Бочков, М. И. Базовый унифицированный алгоритм расчета систем с односторонними связями [Текст] / В. А. Игнатъев, А. В. Игнатъев, М. И. Бочков // Известия высших учебных заведений. Строительство. - 2021. - № 4 (748). - С. 21-30.

6. Бочков, М. И. Определение напряженно-деформированного состояния систем с односторонними связями от кинематического смещения связей с помощью метода конечных элементов в форме классического смешанного метода [Текст] / М. И. Бочков // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Строительство и архитектура. - 2021. - Вып. 4 (85). - С. 110-120.

#### **Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ:**

1. Свид-во о гос. регистрации программ для ЭВМ № 2020661264 от 21 сентября 2020 г. Российская Федерация. Модуль расчета систем с упруго-податливыми связями для ПК КСФ МКЭ / А. В. Игнатъев, В. А. Игнатъев, М.И. Бочков; ВолгГТУ. - 2020.

#### **Публикации в других изданиях:**

1. Бочков, М. И. Расчёт многопролётных балок с односторонними связями на основе МКЭ в форме классического смешанного метода [Текст] / В. А. Игнатъев, А. В. Игнатъев, М. И. Бочков // Материалы X Всероссийской конференции по механике деформируемого твёрдого тела (г. Самара, 18-22 сентября 2017 г.). В 2 т. Т. 1 / под ред. Н. Ф. Морозова, А. В. Манжирова, В. П. Радченко ; Научный совет РАН по механике деформируемого твёрдого тела, Ин-т

проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Самарский гос. техн. ун-т [и др.]. - Самара, 2017. - С. 265-267.

2. Бочков, М. И. Расчет систем с упругими односторонними связями по методу конечных элементов в форме классического смешанного метода [Текст] / М. И. Бочков // Долговечность и надежность строительных материалов и конструкций в эксплуатационной среде : сб. материалов I Междунар. науч.-техн. конф. 14 дек. 2017 г. 2017, Балаково: Нац. исслед. ядерн. ун-т (МИФИ), 2018. - С. 42-50.

3. Бочков, М. И. История развития методов нелинейной строительной механики [Текст] / И. В. Курочкина, М. И. Бочков // Роль инноваций и трансформации современной науки : сб. ст. Междунар. науч.-практ. конф. (10 дек. 2018 г, г. Самара). - Уфа, 2018. - С. 55-56.

4. Бочков, М. И. Алгоритм расчёта систем с односторонними связями с заменой реакций опор на силовые неизвестные [Текст] / А. В. Игнатъев, М. И. Бочков // Инженерный вестник Дона : электронный научный журнал. - 2019. - № 5. – 7 с. – URL : <http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/N5y2019/5961>.

Бочков Максим Иванович

АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СТАТИКИ СИСТЕМ С  
ОДНОСТОРОННИМИ СВЯЗЯМИ НА ОСНОВЕ МКЭ В ФОРМЕ  
КЛАССИЧЕСКОГО СМЕШАННОГО МЕТОДА

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук

Подписано в печать 06.12.2022 г. Заказ No \_\_\_\_\_. Тираж 100 экз. Усл. печ. л.1,0 Формат  
60 x 80 1/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.